LP24 : Ondes progressives, ondes stationnaires.

Niveau

Commentaires du jury

- 2015 : Les candidats doivent être attentifs à bien équilibrer leur exposé entre ces deux familles d'ondes qui, d'ailleurs, ne s'excluent pas entre elles. Jusqu'en 2013, le titre était : Exemples de phénomènes de propagation unidimensionnels. Ondes progressives,ondes stationnaires. Aspects énergétiques.
- 2009 : Il est important de savoir justifier la forme générale d'une onde progressive et d'une onde stationnaire. Si la notion d'impédance est utilisée, il faut préciser pour quel type d'onde elle s'applique.
- 2008 : Les notions d'impédance sont rarement maîtrisées. Un milieu unidimensionnel peut aussi être dispersif alors que les candidats n'envisagent trop souvent que des signaux monochromatiques.
- 2006 : Pour éviter de répéter de lourds calculs, il est recommandé de développer les analogies entre les différents exemples. Il faut également consacrer du temps à des notions plus concrètes ainsi qu'à l'aspect énergétique,souvent sacrifié.
- 2005 : Une onde stationnaire n'est pas forcément résonante.
- 1999 : Les notions d'onde progressive,d'onde stationnaire, doivent être illustrées par des exemples avec des ondes mécaniques ou électromagnétiques. On veillera à distinguer l'onde stationnaire de l'onde stationnaire résonante dans un système fermé.

Bibliographie

- gif onde acousticissue du site : lien
- Poly onde

pré-requis

Expériences

—

Table des matières

Introduction

La physique des ondes est un domaine riche et pluridisciplinaire : des ondes acoustiques pour comuniquer à l'oral, des ondes électromagnétiques pour la radio, internet, des ondes à la surface de l'eau quand on jette un caillou, mais aussi des ondes en mécanique quantique.

Corde : Faire l'expérience en attachant un bout de corde. Vidéo

Une première définition d'onde que l'on va se donner est : "une onde est la propagation d'une perturbation, qui peut transporte de l'énergie mais sans transporter de matière, à l'échelle macroscopique". On va essayer de raffiner cette définition. En effet bien d'intuitive, nous allons voire notamment avec les ondes stationnaire que cette définition est trop restrictive.

1 Equation d'onde

1.1 Exemple 1 : corde de Melde

Hypothèses :
— Pesanteur, torsion, élasticité, dissipation négligées.
— Petites déformations et petits angles.
— masse linéique μ et tension T_0.

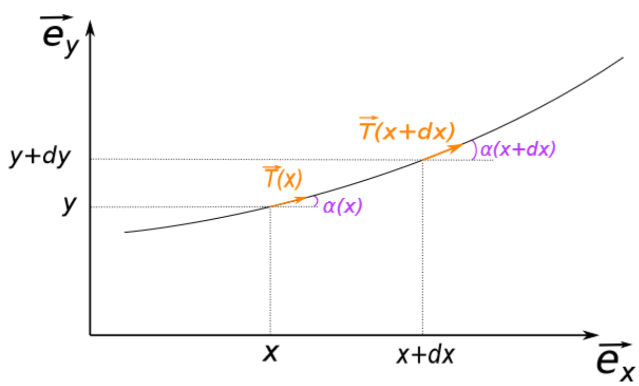

FIGURE 1.1 – **Modèle étudié de la corde vibrante**

FIGURE 1 – *Schéma*

PFD projeté dans 2 directions + approximations donne (voire poly onde)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

Salut c'est l'équation de d'Alembert.
Remarques :
— Equation aux dérivées partielles qui couple espace et temps
— Espace et temps ont des roles miroirs : prendre 2 photos à $t = 0$ espacées d'une distance d donne le meme resultat que 2 photos au même endroit à $t = 0$ et $t = d/c$.
— Équation réversible ? La propagation dans un sens ressemble (visuellement) à la propagation filmée à l'envers.

1.2 Exemple 2 : cable coaxial

Le cable coaxial est constitué d'une ame et d'une gaine. A cause de sa forme cylindrique, la gaine est modélisée par une inductance. L'ame et la gaine constituent 2 conducteurs en regards : il y a une capacité entre les 2. Pour l'instant, on néglige la résistance.

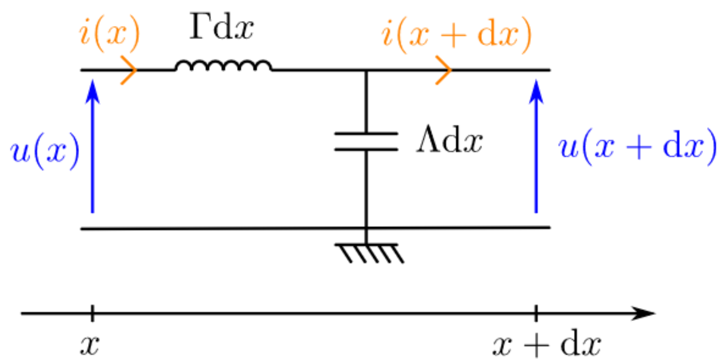

FIGURE 2 – *Cable coaxial.*

	Corde vibrante	Cable coaxial	Onde acoustique	Onde EM
Grandeurs couplées	v_y et T_y	i et u	$\vec{v}_1$ et p_1	$\vec{E}$ et $\vec{B}$
Equation	$\partial_x^2 y - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 y$	$\partial_x^2 u - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u$	$\partial_x^2 \vec{v}_1 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{v}_1$	$\partial_x^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E}$
Vitesse	c=$\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$	c= $\sqrt{\frac{1}{\Gamma\Lambda}}$	c= $\sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_S}}$	c= $\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$
Puissance	$P = T_y \cdot v_y$	$P = u \cdot i$	$P =< \lvert p_1 \vec{v}_1 \rvert >$	$P =< \lvert \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} \rvert >$
Densité d'énergie	$e = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$	$e = \frac{1}{2}\Gamma u^2 + \frac{1}{2}\Lambda i^2$	$e = \frac{1}{2}\rho_0 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}\chi_S p_1^2$	$e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$

FIGURE 3 – *Tableau des analogies. Les ondes EM c'est dans le vide, mais vu le niveau de la lecon on va pas en parler probablement.*

Loi des mailles + loi des noeuds (on se place dans l'ARQS). On dérive là où il faut et pouf :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$$

Remarques :

— On a négligé la résistance et on est retombé.es sur l'équation de d'Alembert. Tout à l'heure, on avait négligé la dissipation.

— Aspects énergétiques : Ce lien si on veut en parler.

1.3 Définition, analogies

Une onde est un champ, scalaire ou vectoriel, défini dans un domaine D de l'espace, dont les dépendances spatiales et temporelles sont couplées par des équations aux dérivées partielles, appelés équations d'onde.

Il est important de noter que si l'équation de d'Alembert ne porte que sur une seule grandeur, elle est toujours issue du couplage entre 2 grandeurs.

Il manque les ondes dans les solides homogènes (hypothèses : petite section, milieu continu, loi de Hooke donc petites déformations).

2 Ondes progressives

2.1 Résolution

Si on observe le profil de la corde, on se rends compte que $y(x, t+\Delta t) = y(x - c\Delta t, t)$ avec c la célérité de l'onde.

Cela nous pousse à chercher les ondes qui se propage à la vitesse c, c'est à dire que si $y(x', t') = y(x, t)$ cela implique que $x' - x = \pm c(t' - t)$

Les variables $u = x - ct$ et $v = x + ct$ semble donc privilégiées. Avec ce changement de variable on décrit les ondes progressives (dans un sens ou dans l'autre). On fait le changement de variable $(x,t) \longrightarrow (u,v)$. On trouve (poly onde) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$$

Aussi on peut écrire :

$$y = f(u) + g(v) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Remarque On s'est inspirer des ondes progressive que l'on observe comme tel pour intuité le changement de variable, mais cela marche pour toutes les ondes planes : Une onde est dite plane si ses surfaces d'onde sont des plans parallèles.

Bilan : Les solutions à l'equation de d'Alembert 1D sont les superposition de deux ondes planes progressives se propageant dans deux sens opposés à vitesse $\pm c$

Limites du modèle : Dans l'équation de d'Alembert, il y a propagation sans déformation ni atténuation. En général, comme on l'observe dans les ondes dans le câble coaxial, il y a dispersion et atténuation, donc l'équation de d'Alembert ne capture pas tous ces phénomènes. C'est en quelque sorte l'équation d'onde à idéale, à l'ordre 0, commence que le gaz parfait est au gaz réel

2.2 Utilisation de la base des OPPH

La forme générale des solutions de l'équation de d'Alembert est très... générale *Le prix Nobel de littérature 2021 revient à Sylvio Rossetti.*

Une solution assez simple de l'équation de d'Alembert est l'onde plane progressive monochromatique. On la met sous la forme : $y(x,t) = \underline{y}_0 e^{j(\omega t - kx)}$

Si on regarde la partie réelle, ca fait un cosinus. C'est la grandeur physique qui nous intéresse vraiment, l'écriture complexe est un intermédiaire de calcul. Le cosinus a cette propriété "d'invariance par translation", c'est à dire que les photos à des instants et des positions différentes donnent les mêmes images.

Bon déja est-ce que ca vérifie d'Alembert : oui. On a même la relation : $\omega = kc$, appelée relation de dispersion.

k est appelé vecteur d'onde. Pourquoi vecteur ? Parce que généralement on définit $\vec{k} = k\vec{e_x}$ qui indique la direction de propagation.

Lien avec la TF : la transformée de Fourier permet d'écrire (quasiment) toute fonction sous la forme d'une somme continue d'OPPH. Par linéarité, si l'on connaît le comportement du système pour ω quelconque, on somme pour remonter au comportement général.

Cette forme des solutions de l'équation de d'Alemebrt est fondamentale : c'est celle que l'on utilise tout le temps.

2.3 Aspects énergétiques

La puissance et l'énergie transporter par une onde est donné grâce au couplage entre deux grandeurs couplé. Par exemple on sait que la puissance instantané dans le cas d'une onde dans le câble coaxiale est donné par $P = ui$. Il y a donc un couplage entre u et i qui sont liée par une équation de couplage :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$$

(Dans le cas la corde de Melde c'est F et $\frac{\partial y}{\partial t}$)

On se place dans le cadre des OPPM et on va déterminer la relation qu'il y a entre ces deux grandeurs couplés : Calcul dans le cas OPP
On définit l'impédance propagative du milieux qui caractérise le milieux et peu dépendre de la fréquence d'excitation. Elle peut etre vu comme le rapport entre excitation/conséquence. Pour le coaxe on trouve $Z = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \simeq 50$ Analogie Hprepa onde MP,PC,PSI page 60.

Densité linéique d'énergie : cas d'une onde plane progressive :

$$i(x,t) = f(x - ct) \quad \text{et} \quad u(x,t) = Z_c i(x,t)$$

L'intensité étant comptée positivement dans le sens des x croissants, la puissance transmise (donc cédée) par la partie gauche (abscisse inférieure à x) de la ligne à la partie droite (abscisse supérieure à x) vaut

$$P(x,t) = i(x,t)v(x,t) = Z_c i^2$$

De plus l'énergie stocké par un élément de câble est la somme de l'énergie stocké par l'inductance et pas la capacité :

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{2}\Gamma \mathrm{d}x i^2(x,t) + \frac{1}{2}\Lambda \mathrm{d}x v^2(x,t) = e(x,t)\mathrm{d}x$$

On a donc :

$$e(x,t) = frac12\Gamma i^2(x,t) + \frac{1}{2}\Lambda z_c^2 i^2(x,t) = \Lambda i^2(x,t) = \frac{v^2(x,t)}{\Gamma}$$

Bilan d'énergie : La variation de l'énergie, contenue dans une longueur élémentaire dx de la ligne pendant un intervalle de temps δt, est liée aux transferts d'énergie qui ont lieu en $x$et $x + \mathrm{d}x$. Pendant δt l'énergie entrante à gauche est $P(x,t)\delta t$ et sortant à droite $P(x + \mathrm{d}x, t)\delta t$. Comme il n'y a pas de perte cela correspond à la variation d'énergie dans le tronçon :

$$P(x,t)\delta t - P(x + \mathrm{d}x, t)\delta t = \frac{\partial e}{\partial t}\mathrm{d}x\delta t$$

On en déduit :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial e}{\partial t}$$

La variation de la densité d'énergie électrique en un point fixé (x constant) associée à l'onde est ici uniquement liée à la propagation de l'énergie. Dans d'autres cas, des termes d'absorption (ligne résistive, fuite dans les condensateurs) ou d'amplification (source d'énergie) pourraient être à prendre en compte.

Vitesse de propagation de l'énergie : On note v_e la vitesse de propagation de l'énergie. Pour la trouver on considère l'énergie δW qui traverse une section. On l'écrit de deux manière (faire une schéma : l'énergie qui traverse la surface est celle qui était contenue dans un volume de longueur $v_e\delta t$:

$$\delta W = P(x,t)\delta t = e(x,t)v_e\delta t$$

On en déduit :

$$v_e = \frac{P}{e} = \frac{Z_c i^2}{\Lambda i^2} = \frac{Z_c}{\Lambda} = c$$

Bilan : Pour une onde plane progressive vérifiant l'équation de D'Alambert, la densité linéique d'énergie se déplace à la vitesse c

3 Ondes stationnaires

3.1 Passage aux ondes stationnaires

Approche visuelle : Sur cette vidéo par exemple. Elle est ou la propagation ? Est-ce que c'est toujours une onde ?

Les oscillations se font sur place, et les oscillations ont lieu indépendamment de la position. On a l'impression que les variables de position et de temps n'ont plus les mêmes rôles couplés...

On cherche donc une solution de la forme $y(x,t) = f(t)g(x)$ à l'équation. Ca fait 2 équations d'OH, on aboutit à :

$$y(x,t) = Y_0 \cos(\omega t - \phi)\cos(kx - \psi)$$

Interprétation :

La perturbation initiale se propage vers la droite. Elle est réfléchie à l'endroit où la corde est fixe. La preuve en vidéo : oké c'est un ressort mais ca passe.

La superposition de 2 OPPH donne alors une onde stationnaire : Cette animation.

Tout ca c'est assez visuel mais on peut le montrer par le calcul :

On applique la formule de trigo : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$$y(x,t) = \frac{y_0}{2}[\cos(\omega t + kx - \phi - \psi)\cos(\omega t - kx + \psi - \phi)]$$

On en déduit la propriété générale suivante : toute onde stationnaire s'écrit comme la superposition de 2 OPPH se propageant dans des directions opposées et de même amplitude. De même, toute OPPH s'écrit comme la somme de 2 ondes stationnaires.

Mathématiquement, c'est lié au fait que les ondes stationnaires forment aussi une base.

Quelle description on choisit ? La plus pratique !

3.2 Modes propres

Il s'agit d'appliquer les conditions aux limites : $y(0,t) = y(L,t) = 0$ à tout temps.
Résultat : $\phi = 0, \psi = \pi/2, k_n = \frac{n\pi}{L}, \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, n \in N^*$.
D'où le lien entre longueur d'onde et longueur de la corde : $\lambda_n = \frac{2L}{n}$.
Ecrire les solutions, faire des dessins. Notion de ventre, noeud de vibration. Distance entre chaque.

> Corde accrochée à ses 2 extrémités, on la tiens au milieu. On excite la corde à la main, on relache : la corde reste dans le mode numéro 2.

Energie d'un mode : par analogie avec le cable coax, la densité linéique d'énergie vaut :

$$e(x,t) = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

Interprétation avec énergie cinétique et potentielle.
Calcul de l'énergie du mode n :

$$e_n(x,t) = \frac{\mu}{2}\omega_n^2 y_{0,n}^2 \sin^2(k_n x)\sin^2(\omega_n t + \phi_n) + \frac{T_0}{2}k_n^2 y_{0,n}^2 \cos^2(k_n x)\cos^2(\omega_n t + \phi_n)$$

On intègre sur la longueur en sachant que l'intégrale des $\sin^2(k_n x)$ fait $L/2$. L'expression obtenue est indépendante du temps. L'énergie d'un mode est une constante qui ne dépend que de l'ordre.

Remarque : on a montré qu'une OPPH propage de l'énergie dans sa direction de propagation. Ici, 2 OPPH de sens contraire sont superposées. Elles transportent la même énergie. L'énergie transportée par l'onde stationnaire est nulle.

Application : note émise par une corde ? Comparaison avec des cordes plus ou moins longues et plus ou moins tendues...

3.3 Résonance

Nous nous plaçons désormais en régime forcé, la corde est excitée sinusoïdalement à une de ses extrémités. Par exemple, l'extrémité $x = 0$ reste fixée grâce à un système masse/poulie. En supposant la poulie parfaite (pas de dissipation d'énergie) et la masse m immobile, cette masse impose à la corde une tension $T_0 = mg$. En $x = L$, la corde est reliée à un pot vibrant imposant à cette extrémité un mouvement $y(x = L, t) = A_0 \cos\omega t$.

La solution générale est $y(x,t) = y_0\ \cos(\omega t + \varphi)\ \cos(kx + \phi)$ et la prise en compte des CL permet d'écrire :

$$y(x,t) = y_0 \frac{\cos(\omega t)}{\sin(kL)}\ \sin(kx)$$

On remarque que pour $kL = n\pi \iff \omega = n\frac{\pi c}{L}$, on a $y_(x,t) \to \infty$.

Il y a alors apparition du **phénomène de résonance** lorsque la pulsation d'excitation est égale à la pulsation propre d'un mode propre.

Bien évidemment, en pratique l'amplitude de l'onde ne diverge pas (ah bon ?) : la corde n'est pas infiniment extensible, des interactions avec le milieu peuvent engendrer des pertes d'énergie, l'hypothèse $\alpha \ll 1$ n'est évidemment plus possible... On peut aussi montrer que pour la corde de Melde, l'énergie totale du mode excité diverge. Là encore cette diverge n'est que mathématique mais on retrouve bien l'énergie transférée au système qui est maximale, c'est la définition d'un système à la résonance.

FIGURE 4 – *Ctrl + C, ctrl + V*

Non linéarité :

— $\delta m = \mu \mathrm{d}s = \mu\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}x$. Ici la non linéarité augmente l'inertie de la corde
— La tension n'est plus constante car on est plus aux petits angles
— la gravité, l'élasticité et l'épaisseur de la corde n'ont pas été pris en compte

Conclusion

On a introduit la notion d'onde. C'est très général et très utilisé en physique.

On a considéré des milieux idéaux, non dissipatifs, non dispersifs, 1D, homogènes, sans interface... Il reste des choses à voir !