

LP27 : PROPAGATION GUIDÉE DES ONDES.

Niveau

Commentaires du jury

- 2014 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.
- 2012,2013 : Les notions de modes et de fréquence de coupure doivent être exposées. On peut envisager d'autres ondes que les ondes électromagnétiques.
- 2010 :Il faut insister sur les conditions aux limites introduites par le dispositif de guidage

Bibliographie

- Poly 2015

pré-requis

- Electromagnétisme dans le vide
- Relation de dispersion, vitesse de phase
- Relations de passage en EM : passage de 1 à 2

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} n_{12} \vec{e}_n; \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge n_{12} \vec{e}_n$$

Expériences

—

Table des matières

1	Première approche : La fibre à saut d'indice	2
1.1	Approche géométrique	2
1.2	Approche interférentielle	2
1.3	Dispersion	4
2	Guidage d'onde électromagnétique	5
2.1	Guide Plan plan	5
2.2	Structure du champ	5
2.3	Dispersion	7
2.4	Aspect énergétique	7
2.5	Mode TEM optionnel?	8
3	Applications aux télécommunication	8
3.1	Câble coaxiale	8
3.2	fibre optique	9

Introduction

On a vu dans des cours précédents que la propagation d'onde dans un milieu pouvait être dispersive : aujourd'hui, on va étudier un autre cas particulier de propagation, la propagation guidée.

Envoyer un laser dans un filet d'eau qui coule d'un vase de Mariotte? Guidage d'onde coustique dans un long tuyau ?

Afin de favoriser le transport d'information, notamment pour diminuer l'atténuation, on utilise des supports de transmission : les cables, les fibres optiques... Ces dispositifs permettent la transmission d'information sur de plus grandes distances que la propagation dans le vide/l'air assimilé au vide. Nous allons étudier les conséquences du guidage sur la propagation.

1 Première approche : La fibre à saut d'indice

La fibre optique à saut d'indice est constituée d'un coeur et d'une gaine d'indices respectifs n_1 et n_2 .

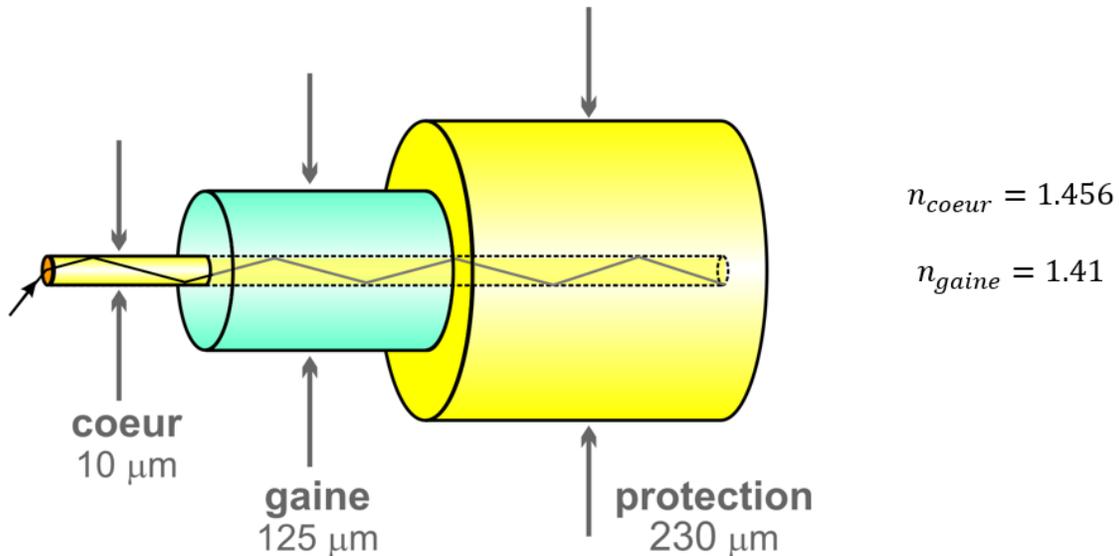


FIGURE 1 – Schéma fibre à saut d'indice

Pour qu'il y ait réflexion totale à chaque interface, il faut que $n_2 < n_1$.

1.1 Approche géométrique

Le rayon incident suit les lois de Snell-Descartes. Il y a réflexion totale lorsque $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) > \frac{n_2}{n_1} \implies \cos\theta > \frac{n_2}{n_1}$.

En suivant des réflexions successives, on voit déjà que le guidage de l'onde permet de propager la lumière dans une direction privilégiée.

1.2 Approche interférentielle

Modélisation ondulatoire : On se place maintenant dans le cadre de l'optique ondulatoire. Associons une onde plane à chaque rayon lumineux. Elle est supposée monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ , et sa direction est celle du rayon. Les fibres en silice connaissent un minimum d'atténuation vers 1 550 nm. Cette longueur d'onde du proche infrarouge sera donc privilégiée pour les communications optiques. (Au début, on utilisait 1300 nm pour minimiser la dispersion chromatique. De nos jours, la maîtrise des procédés de fabrication permet d'atteindre couramment une atténuation aussi faible que 0,2 dB/km à 1 550 nm : après 100 km de propagation, il restera donc encore 1% de la puissance initialement injectée dans la fibre, ce qui peut être suffisant pour une détection.

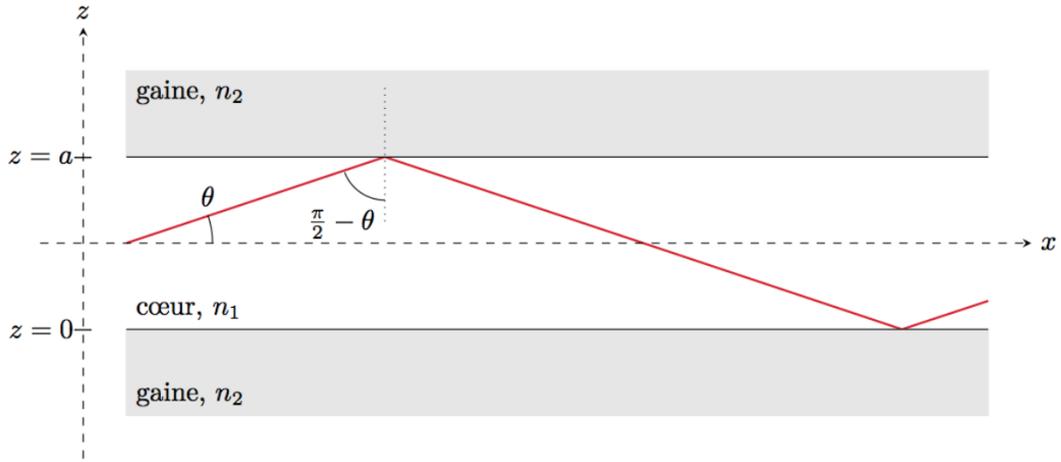


FIGURE 2 – Schéma et notations, fibre à saut d'indice, poly Ondes de JF.

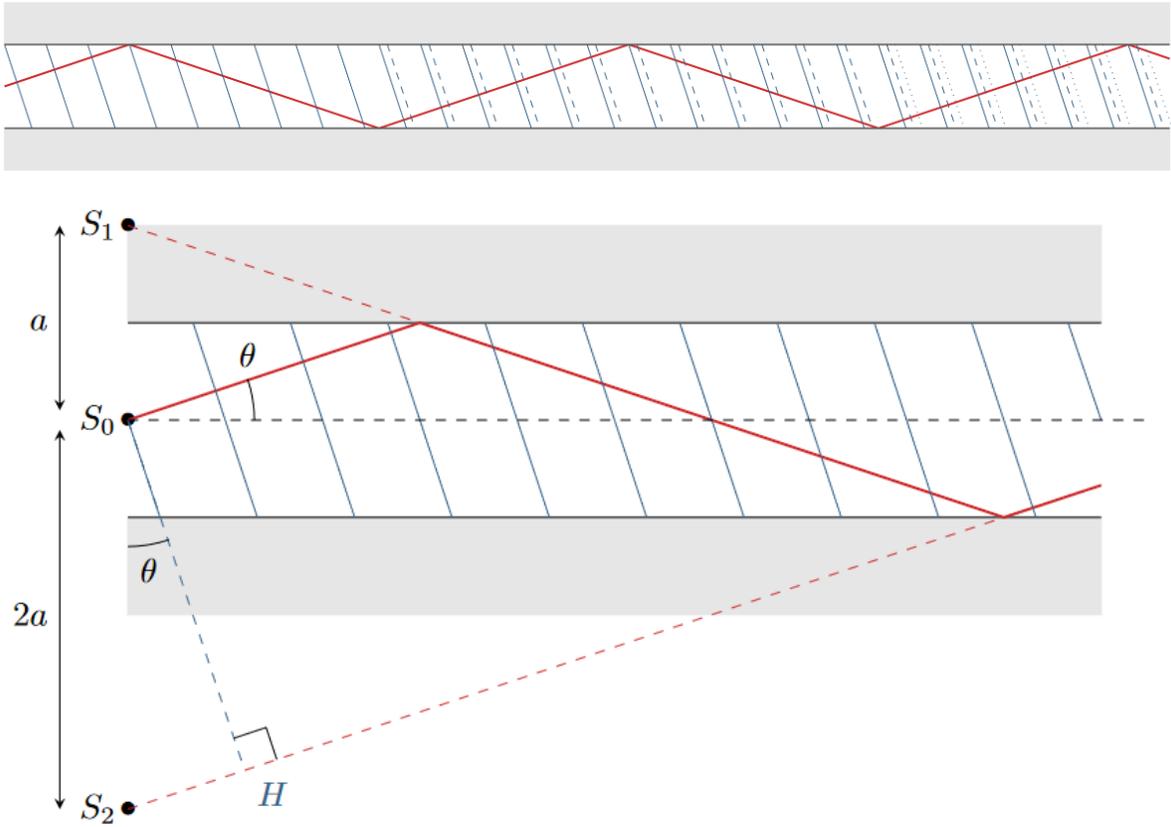


FIGURE 3 – Schéma et notations, fibre à saut d'indice, approche interférentielle poly Ondes de Etienne Thibierge.

Si l'on désire transmettre l'information sur des milliers de kilomètres, il faudra avoir recours à une réamplification périodique du signal, le plus généralement par l'intermédiaire d'amplificateurs optiques, aussi appelés répéteurs.)

Lorsque la condition de guidage est satisfaite, la fibre contient une superposition de toutes les ondes réfléchies, qui interfèrent entre elles. Exactement comme dans un interféromètre de Fabry-Pérot, les ondes qui se propagent sans atténuation sont celles pour lesquelles toutes les interférences sont constructives, ce qui signifie que leurs plans d'onde sont confondus.

C'est un raisonnement un peu étonnant car à priori les deux ondes ne se voient pas... cependant, on verra dans l'étude plus poussée des guides d'onde que cela est cohérent. Ici on admet que la condition d'interférences constructives permet bien de trouver la bonne condition de propagation .

Le déphasage entre l'onde issue de S_2 et S_0 vaut :

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{(S_2 H)}{\lambda_{n_1}} = \frac{4\pi a \sin(\theta)}{\lambda}$$

Les indices optiques se simplifient. Les interférences constructives sont alors données par :

$$\sin(\theta_p) = \frac{p\lambda}{2a}$$

(C'est la condition donnant les pics d'intensité pour un réseau) Les angles d'incidence permettant la propagation dans la fibre prennent des valeurs discrètes. Chaque valeur de l'indice p définit un mode de propagation de la fibre optique

Un mode de propagation de la fibre est bien une solution propagatrice, harmonique, et compatible avec les conditions aux limites, ici prises en compte par le biais des interférences.

Attention un mode est donné par la donnée de p et de λ . Mais dans la suite on appellera mode p , l'ensemble des OPPH qui sont caractérisés par p .

On remarque alors que pour un mode p donné, il ne laisse pas passer toutes les longueurs d'ondes car le sinus est borné par 1 :

$$\lambda \leq \frac{2a}{p}$$

On a une pulsation de coupure basse associée à chaque mode (la fibre se comporte comme un passe haut)

ODG : fréquence de coupure, pour $p = 1, \lambda_1 = 2a = 20m$. on a donc $f_{c,1} = c/\lambda_1 = c/2a = 3 \times 10^{13}$ Hz. Le signal à 1550nm à une fréquence $:2 \times 10^{14}$ Hz passe bien dans la fibre

1.3 Dispersion

Pour qu'une pulsation puisse se propager, elle doit être supérieure à une pulsation de coupure :

$$\sin \theta_p \leq 1 \implies \omega \geq \omega_p^c = \frac{\pi c}{a} p$$

On remarque que le mode 0 se propage toujours car $\omega_0^c = 0$.

On s'intéresse à la dispersion : regardons la vitesse de phase de l'onde. Voir le poly de Jérémy p. 58.

A pulsation fixée, on a dispersion due aux conditions aux limites : c'est la **dispersion intermodale**.

Par ailleurs, comme l'indice de la fibre dépend de la longueur d'onde, on a aussi de la **dispersion intramodale**. Celle-ci est liée au milieu de propagation.

En résumé, on a vu que le guidage dans la fibre avait les propriétés suivantes : onde confinée, guidage de la propagation, quantification des modes due aux conditions aux limites, qui provoque de la dispersion intermodale, et dispersion intramodale liée à la dépendance de l'indice en la fréquence de l'onde.

La dispersion intermodale limite le débit d'information :

En effet la vitesse effective d'une onde dans un mode est :

$$v_p = \frac{c}{n_1} \cos(\theta_p)$$

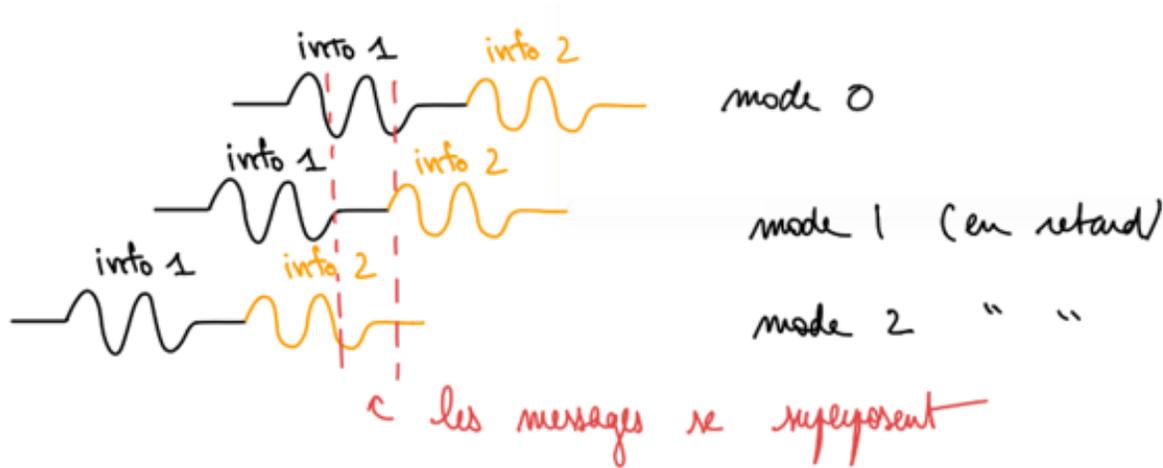


FIGURE 4 – Dispersion intermodal : schéma de Pascal Wang

Elle dépend donc du mode. On peut déterminer l'ordre du mode maximal que peut emprunter l'onde :

$$p < p_{max} = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2} 2a}{n_1 \lambda}$$

Pour s'affranchir de ce problème on veut des fibres monomodes : soit $p_{max} = 2$ pour $n_1 \simeq n_2 \simeq 1.5 \times 10^{-2}$, $\lambda \simeq 1m$, $a \simeq 10m$ on a une différence d'indice $n_1 n_2 \simeq 10^{-2}$. Fin 1970 : fibres monomodes 100 GBit/s. Aujourd'hui (multiplexage), 100Tbit/s

2 Guidage d'onde électromagnétique

Poly de JF Electromagnétisme dans le vide p. 83.

2.1 Guide Plan plan

Hypothèses et simplifications : On considère 2 plans métalliques illimités selon y et z , parallèles distants de a . On se place dans le vide et la direction de propagation est celle de l'axe x .

Rappel cours sur la réflexion : Le champ électrique se déphase de π à la réflexion sur un métal parfait, le champ magnétique ne subit aucun déphasage. on utilise des métaux pour avoir une réflexion totale de l'onde. Epaisseur de peau du cuivre à 1GHz : 1 μm . On assimile le guide à un conducteur parfait.

Les relations de continuité imposent :

$$\begin{aligned} B_z(z=0) &= B_z(z=a) = 0 \\ E_x(z=0) &= E_x(z=a) = 0 \\ E_y(z=0) &= E_y(z=a) = 0 \end{aligned}$$

Les champs sont indépendants de y car le système est invariant par translation dans cette direction.

2.2 Structure du champ

On écrit les équations de Maxwell composante par composante. On regarde la figure 5.

Expression du mode TE :

On écrit le champ sous la forme : $\vec{E}(x, z, t) = E(z)e^{i(\omega t - \beta x)}\vec{e}_x$.

On a choisi un β au lieu d'un k pour ne pas confondre avec le vecteur d'onde de l'onde plane...

La propagation suit l'équation de d'Alembert (milieu vide de charge ; pas de courant). Cela donne l'équation :

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right)E(z) + \frac{d^2 E}{dz^2} = 0$$

On pose $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$ qui caractérise la forme de $E(z)$:

Décomposition en modes TE et TM Écrivons explicitement les équations de Maxwell en termes des composantes des champs, en remarquant que dans le cas du guide plan envisagé ici, la propagation a lieu selon e_x , mais le système demeure invariant par translation parallèle à e_y . Par conséquent les champs ne dépendent pas de y .

Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson donnent

$$\partial_x E_x + \partial_z E_z = 0 \quad (8)$$

$$\partial_x B_x + \partial_z B_z = 0 \quad (9)$$

Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday donnent

$$\begin{bmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_t B_x \\ \partial_t B_y \\ \partial_t B_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} -\partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \partial_t E_x \\ \partial_t E_y \\ \partial_t E_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

Deux familles d'ondes : TE (en bleu) et TM (en rouge).

- Mode TE : connaître E_y suffit à connaître sans ambiguïté les autres composantes du groupe
- Mode TM : connaître B_y suffit à connaître sans ambiguïté les autres composantes du groupe

Le champ électrique d'une onde du groupe TE est transverse à la direction de propagation, et réciproquement pour le groupe TM, d'où la dénomination. La linéarité des équations donne qu'on peut étudier les groupes TE et TM séparément. Les modes TE et TM forment une base des modes de propagation d'un guide d'onde uniaxe.

La solution générale est une superposition des modes TE et TM

FIGURE 5 – *Laura et Pascal.*

- Si $K^2 < 0$: solutions en exponentielles réelles qui ne s'annule pas 2 fois sauf en étant identiquement nulles : cas exclu.
- Si $K^2 = 0$: De même ; la solution ne peut s'annuler 2 fois à moins d'être identiquement nulle.
- Si $K^2 > 0$: Solution en sinus et cosinus : elle peut s'annuler 2 fois. On se place donc dans ce cas.

$$E(z) = A \cos(Kz) + B \sin(Kz)$$

La condition d'annulation en $z = 0$ et a implique :

$$E(z) = E_0 \sin\left(\frac{p\pi z}{h}\right), p \in \mathbb{N}$$

L'onde résultante n'est pas plane (encore heureux). On voit bien la quantification des modes liée aux conditions aux limites.

Généralement, un mode TE est caractérisé par un entier p . On parle de mode TE_p . Les modes TE et TM sont symétriques, les mêmes conclusions s'appliquent. Attention, pour calculer \vec{B} il faut repartir de l'équation de Maxwell-Faraday.

Remarque : l'hypothèse $K^2 > 0$ redonne la même pulsation de coupure qu'auparavant ! Maintenant, on sait ce qui arrive à une onde de pulsation trop basse : elle est atténuée exponentiellement.

Retour sur la partie 1 On peut décomposer l'onde trouvée en deux OPPH :

$$\vec{E}_p = \vec{E}_{0,p} \sin\left(\frac{p\pi z}{a}\right) \cos(\beta x - \omega t) \vec{e}_y = \vec{E}_{p,1} + \vec{E}_{p,2} \quad \text{avec} \quad \vec{k}_{1/2,p} = \beta \vec{e}_x \pm \frac{p\pi}{a} \vec{e}_z$$

Le champ électrique dans le guide apparaît donc comme la superposition de deux OPPH de vecteurs d'onde $\vec{k}_{1,p}$ et $\vec{k}_{2,p}$. Ces vecteurs d'onde ont la même composante selon \vec{e}_x , mais composante opposée selon \vec{e}_z . Ainsi, ils s'obtiennent l'un l'autre par réflexion sur les parois du guide. On retrouve donc les ingrédients du modèle géométrique. Attention à ne pas se méprendre : il est normal que l'onde dans le guide s'écrive comme une somme d'OPPH, puisque celles-ci constituent une base des solutions de l'équation de d'Alembert, dont fait partie l'onde guidée. Ce qui n'est a priori pas évident est que seules deux OPPH suffisent à la décrire. Ainsi, le modèle géométrique développé précédemment permet de bien décrire la propagation dans le guide plan car « par chance » il ne considère que les deux OPPH dont la somme redonne l'onde guidée.

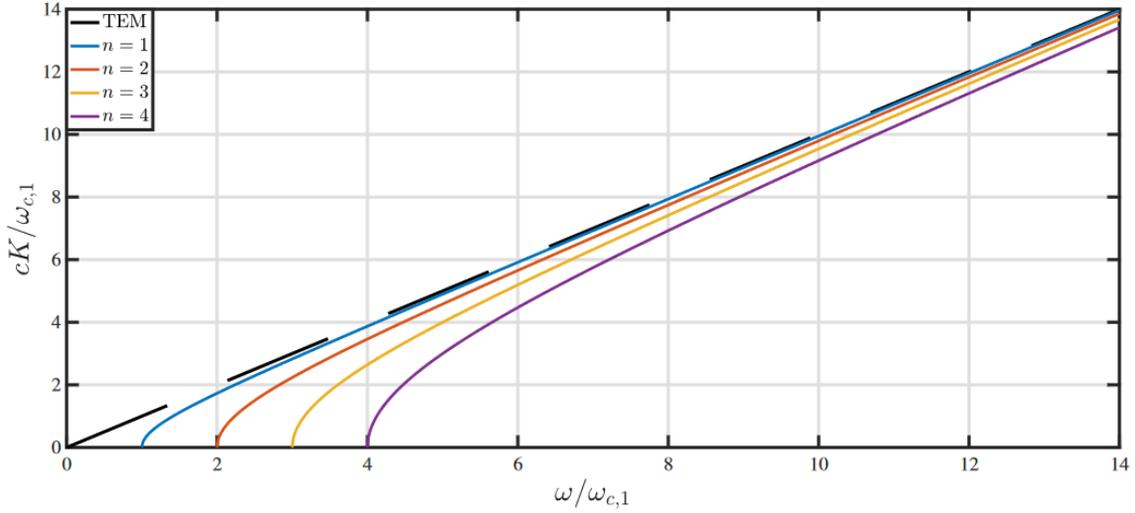


FIGURE 6 – Relation de dispersion pour le mode TE. Fréquence de coupe. Poly de JF.

2.3 Dispersion

La relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2$$

C'est une dispersion de type Klein Gordon. On identifie alors $\omega_{c,p} = \frac{p\pi c}{a}$

On retrouve la même discussion sur les modes : dispersion inter et intra modale.

On peut écrire les vitesses de phases et de groupe :

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,p}}{\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,p}}{\omega}\right)^2}$$

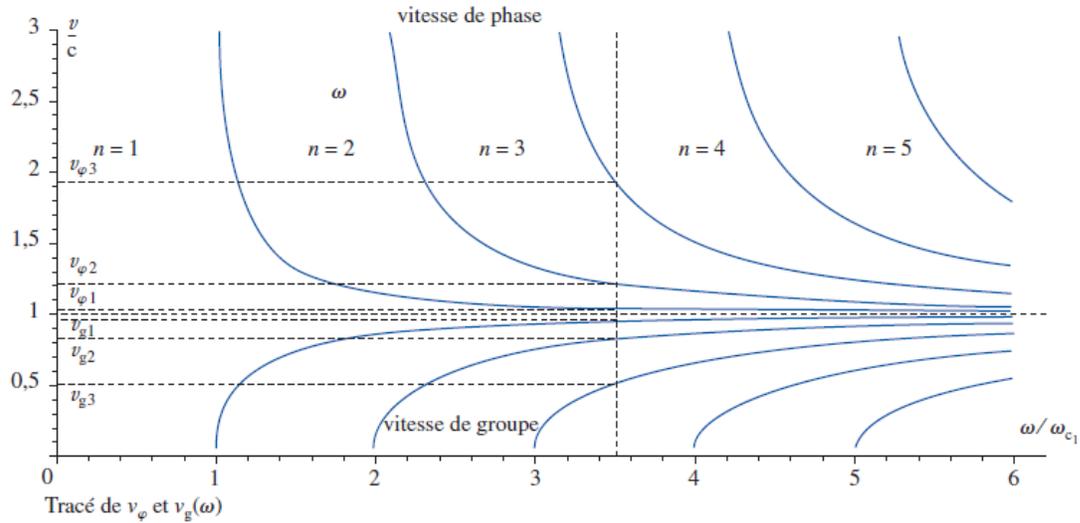


FIGURE 7 – Vitesse de phase et de groupe Hprepa onde MP,PC,PSI page 228

2.4 Aspect énergétique

Après avoir trouvé l'expression du champ magnétique, on peut calculer le vecteur de Pointing. (il vaut peut être mieux l'admettre on a déjà fait assez de calculs)

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \implies \langle \vec{\Pi} \rangle_t = \frac{E_0 \beta_p}{2\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{p}{a}\right) \vec{e}_x$$

L'énergie se propage donc bien selon l'axe de propagation de l'onde \vec{e}_x sans atténuation. On a réussi l'objectif fixé : obtenir une onde directionnelle.

2.5 Mode TEM optionnel ?

La dispersion pose problème en pratique, l'idéal serait donc d'avoir un mode où il n'y a pas de dispersion intermodale. Il faut alors considérer les modes $p = 0$ (pour enlever le deuxième terme dans l'équation de Klein-Gordon). Pour le mode TE₀, le champ est nul partout. Mais puisque les CL sont moins strictes pour le champ magnétique, le mode TM₀ est non identiquement nul et la relation de dispersion associée est celle d'une onde plane $\beta^2 = \omega^2/c^2$. On a donc trouvé un mode TEM, qui a exactement la structure d'une onde plane EM. Plus généralement, on peut montrer que dès qu'on a un mode TEM, celui-ci est unique et vérifie la relation de dispersion d'une onde se propageant de manière libre dans le milieu.

Ce mode est très intéressant car il y a possibilité de transmission d'information sans déformation et sans dispersion lors de son transport entre l'émetteur et le récepteur, et seul le mode TEM peut satisfaire ces conditions.

Il faut nécessairement que la géométrie soit non simplement connexe (2 conducteur séparé) Si il existe le mode TEM est unique.

3 Applications aux télécommunication

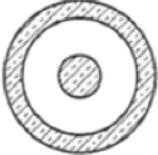
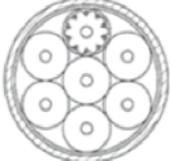
	Ligne bifilaire	Ligne coaxiale	Guide d'ondes	Fibre optique
Vue en coupe				
Fréquence d'utilisation	10 ⁹ Hz	10 ¹⁰ GHz	3 - 90 GHz	10 ¹⁴ Hz
Bande passante	Très faible	12 - 60 MHz	10 GHz	1 GHz
Modes	-	TE, TM, TEM	TE, TM	-
Atténuation	-	-	-0.1 dB/m	-0.01 dB/m
Débit de données	1 communication téléphonique par ligne	Plusieurs centaines de communications	-	10 ¹⁰ bits/s

FIGURE 8 – Ordre de grandeur de différent guide d'onde (Houard, p 67)

3.1 Câble coaxiale

Il est constitué de 2 conducteur on va donc potentiellement pouvoir avoir un mode TEM. C'est le cas. voir site

$$\vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\ln b/a} e^{i(\beta z - \omega t)} \vec{u}_r$$

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{c \ln b/a} e^{i(\beta z - \omega t)} \vec{u}_\theta$$

Ainsi en dessous de la fréquence $f_0 = 8.5GHz$, aucun mode TE ou TM ne peuvent se propager et donc seules des modes TEM sans composante longitudinale peuvent se propager dans le câble coaxial. La limite f_0 est bien loin de la fréquence maximale d'un générateur basse fréquence de l'ordre de 1 MHz, cf formules et ODG dans la leçon de Pascal.

on développe si on a le temps comme dans le poly d'Etienne? Section 3.4.

Les pertes dans le câble coaxial sont dûs à l'effet Joule dans l'épaisseur de peau des conducteurs. Plus le diamètre du conducteur est petit, plus grande sera sa résistance, et donc plus il y aura de pertes, plus la fréquence augmente, plus il y aura de pertes, plus on augmente la longueur du câble, plus il y aura de pertes. ODG :19 dB/100 mètres à une fréquence de référence de 800 MHz

3.2 fibre optique

Voir le Taillet chpt 8? (Hprepa?) Grande distance : fibre monomode. La propagation se fait dans le mode 0, qui est ce qu'on a vu dans l'approche géométrique.

Petite distance : fibre multimode : la dispersion intermodale ne se fait pas trop sentir.

Conclusion

A priori, les effets de guidage sont pratiques pour la propagation de l'information. Néanmoins, on a mis en évidence le fait que la dispersion d'une onde au cours de la propagation pouvait être induite par les conditions aux limites. Cette dispersion peut poser problème lorsque les modes se superposent : on ne peut plus les distinguer et les "lire" correctement, d'où l'intérêt des canaux de transmission monomode.

Afin que la dispersion ait le moins d'impact possible, on se place dans les modes fondamentaux des guides, dont le comportement est le plus proche de la propagation libre dans le vide (notamment en terme de dispersion).

Il ne faut pas oublier qu'on a négligé l'atténuation : on a supposé que l'épaisseur de peau était nulle dans le cas d'un guide d'onde métallique, mais il y a aussi de l'absorption dans la fibre. Un autre aspect est l'adaptation d'impédance?