
ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX DIÉLECTRIQUES

Niveau

Commentaires du jury

- 2017 : Cette leçon ne doit pas se limiter à un cours sur les milieux diélectriques ; cela n'en est pas l'objet.
- Jusqu'en 2013, le titre était : Dispersion et absorption d'une onde électromagnétique plane dans un milieu diélectrique. Modélisation microscopique.
- 2009-2010 : Les conventions adoptées doivent être précisées avant toute discussion sur la partie imaginaire du vecteur d'onde.
- 2006 : Il y a souvent confusion entre absorption et atténuation.
- 2001 : Dans un diélectrique, l'équation de propagation ne peut être écrite sans précaution : en général la permittivité dépend de la fréquence et est complexe. Le modèle de l'électron élastiquement lié ne peut être utilisé sans en discuter les limitations. Les aspects quantiques de l'interaction entre l'onde électromagnétique et la matière peuvent être évoqués.
- 1999 : Le modèle de l'électron élastiquement lié n'est pas toujours bien compris. Il est trop souvent assimilé au rayon vecteur noyau-électron, le lien entre le terme de rappel et la force électrostatique n'est pas fait et l'origine du terme de frottement fluide n'est pas interprétée.
- 1998 : Cette leçon mérite une discussion physique des phénomènes de dispersion et d'absorption, supportée par des modèles de milieux matériels. Il est parfaitement inutile et contre productif de s'enfermer dans de longs calculs formels sur les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction.

Bibliographie

- Hprepa ondes
- Cours de Volk

pré-requis

- Milieu diélectrique
- Polarisation dans la matière ?
- Equation de Maxwell dans les milieux
- Ondes EM dans le vide
- Relations de passage en EM : passage de 1 à 2

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}; \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

Expériences

—

Table des matières

1	Propagation dans les milieux diélectrique	2
---	---	---

1.1	Rappel des équations de Maxwell dans les milieux diélectrique	2
1.2	Équation de propagation	3
1.3	Relation de dispersion	3
2	Dispersion et absorption	5
2.1	Modèle de l'électron élastiquement liée	5
2.2	Observation expérimentale de la susceptibilité	5
2.3	Dispersion	5
2.4	Absorption	7
3	Interface entre deux milieux	7
3.1	Lois de Descartes	7
3.2	Couche anti-reflet	8

Introduction

On a vu jusqu'à présent la propagation d'onde dans les métaux, les plasmas et le vide. On a décrit une certaine catégorie de matériaux, mais un autre cas n'a pas été encore abordé.

- On peut chauffer des aliments au micro-onde. Le rayonnement électromagnétique est la source d'énergie. Pour comprendre ce qu'il se passe, il faut modéliser les interactions entre les ondes et la matière.
- Plus simplement, un prisme en verre disperse la lumière. La propagation dans le verre est dispersive.

Dispersion d'un prisme

Ces milieux sont isolants : leur cas n'est pas celui des métaux. On n'est pas non plus dans le cas du plasma ionisé ; les charges sont localisées vers atomes. Ces milieux sont des **diélectriques** : ce sont des matériaux qui possèdent un moment dipolaire permanent, ou qui sont susceptibles d'en acquérir un lorsqu'on leur applique un champ électrique.

La différence avec les conducteurs c'est que les charges ne sont pas libres. Dans le cas du diélectrique parfait, $\vec{j}_{libres} = \vec{0}$ et $\rho_{libres} = 0$. On néglige aussi l'aimantation.

1 Propagation dans les milieux diélectrique

1.1 Rappel des équations de Maxwell dans les milieux diélectrique

Rappel (pour nous ?) Dans un milieu isolant, encore appelé milieu diélectrique, les électrons sont dits liés car ils ne se déplacent mais dans l'ensemble du milieu, ils sont liés aux atomes ou aux molécules. Cependant, ces charges ne sont pas complètement immobiles, elles peuvent se déplacer sur des distances de l'ordre des dimensions atomiques autour de leur position moyenne sous l'action d'un champ électrique par exemple (ou d'une action mécanique : les piézoélectriques, ou au repos : les ferroélectriques..) Ces déplacements de charges peuvent provoquer l'apparition de moments dipolaires induits : on dit que le milieu se polarise. Il existe divers types de polarisation : électronique (déformation du nuage électronique des atomes), dipolaire(orientation des molécules polaires) et ionique (mouvement relatif des atomes dans un cristal). On caractérise l'état du milieu en tout point M par son moment dipolaire volumique, défini par :

$$d\vec{p} = \vec{P}(M)dV$$

$\vec{P}$ s'exprime en C/m².

DLHI : Milieux diélectrique linéaire homogène isotrope : La plupart des milieux n'ont pas de polarisation permanente à champ nulle. Si $\vec{E}$ est suffisamment faible, on suppose que $\vec{P}$ et $\vec{E}$ sont liés par une équation différentiel linéaire. Leurs composantes de Fourier sont alors reliés par une matrice. Dans un milieu isotrope (pas un cristal), ils diffèrent par un scalaire : la susceptibilité électrique. Dans un milieu homogène, la susceptibilité électrique ne dépend pas des coordonnées de l'espace. On a donc : $\vec{P}(\omega, M) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\omega, M)$ $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ Attention ici c'est une relation dans l'espace de Fourier, vrai uniquement dans cette espace !!

ODG : Dans le cas statique $\omega = 0$: $\chi_e \simeq 10^{-3}$ pour les gaz, $\chi_e \simeq 1$ à 10 phase condensée. Eau pure $\epsilon_r \simeq 80$ polarisation d'orientation. En général ϵ_r est complexe.

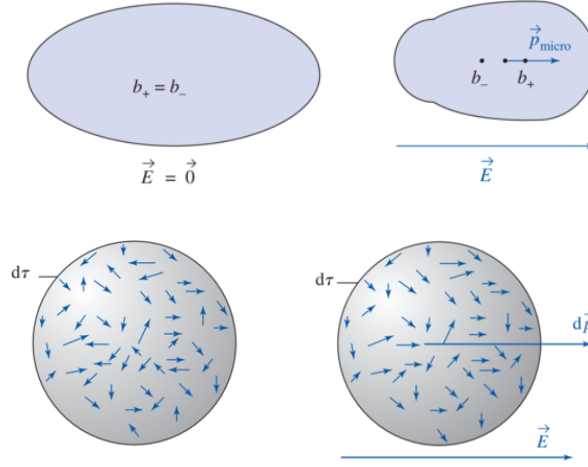


FIGURE 1 – *moment dipolaire microscopique et polarisation (Brébec, ondes)*

Les équation de Maxwell dans un milieux diélectrique non magnétiques s'écrivent :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Avec

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \text{car on considère} \quad \vec{M} = \vec{0}$$

Ce sont des équations de Maxwell moyennées/lissées à l'échelle mésoscopique. C'est possible uniquement car les opérateurs moyenne et dérivées commutent

1.2 Équation de propagation

cadre : on se place à ω fixée (car la relation $\vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\omega)$ est valable à ω fixée).

Equation : technique $\nabla \times \nabla \times$. Tout est similaire au cas du vide, sauf que ϵ_0 est remplacé par $\epsilon_r \epsilon_0$. On aboutit à l'équation de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}}$.

Attention : L'équation obtenue n'est valable que pour l'OPPH à ω , si on veut le champ totale il faut sommer (continuellement) les composante de fourier à différentes fréquence :

$$\vec{E}(x, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} E(x, \omega) e^{-i\omega t}$$

1.3 Relation de dispersion

Relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$$

Attention, pour l'instant aucune hypothèse sur ϵ_r qui est a priori complexe.

On considère une OPPM de pulsation ω selon les x croissants : $\underline{k} = \underline{k} e_x$. On définit alors n comme $\underline{n}^2 = \epsilon_r$ (on prend la solution à partie réelle ≥ 0). $\underline{n}$ est l'indice du milieu.

Convention utilisée : On prend $\omega \in \mathbb{R}$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On note $\underline{k} = k' - ik''$, ainsi que $n = n' - in''$.

On regarde ce que ça donne sur l'expression de l'OPPM de départ :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{e}_x e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}$$

En revenant à la notation réelle :

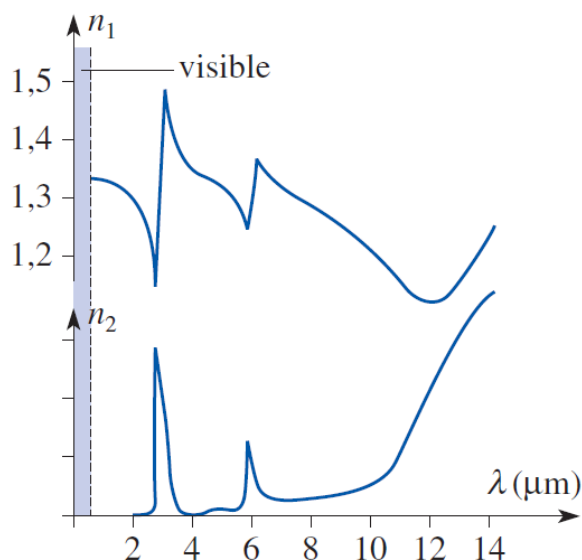
$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{-k_2 x} \cos(\omega t - k_1 x)$$

Cette onde est une onde plane (les surfaces de phases sont des plans). On voit que k' caractérise la propagation, tandis que k'' caractérise l'absorption.

Vitesse de phase : la vitesse de phase de l'onde s'exprime comme $v_\phi = \omega/k_1 = c/n'$: la partie réelle de n caractérise la dispersion dans le milieu, car si $n = n(\omega)$, $v_\phi = v_\phi(\omega)$. C'est l'indice de réfraction utilisé en optique. *C'est ce qui se passe dans le prisme si on l'a fait en intro.*

n'' caractérise l'absorption de l'onde par le milieu. C'est l'indice d'extinction.

Jusque là, on a pas encore modélisé l'interaction entre rayonnement et matière : les grandeurs qu'on a identifiées, les indices, peuvent être mesurés :



Doc. 14. Courbes expérimentales $n_1(\lambda)$ et $n_2(\lambda)$ pour l'eau, de l'ultraviolet proche ($\lambda = 0,6 \mu\text{m}$) à l'infrarouge proche ($\lambda = 8 \mu\text{m}$). Nous retrouvons les absorptions dans l'I.R. et l'U.V. signalées auparavant.

FIGURE 2 – Courbes expérimentales des indices d'absorption et de réfraction pour l'eau. Source : Hprepa Ondes MP-PC-PSI-PT.

Tiens c'est marrant, le visible c'est justement la zone où l'eau est transparente... Est-ce parce que les organismes primaires qui se sont développés dans l'eau avaient un avantage à être sensibles au rayonnement de "visible" ?

Donc modéliser les interactions entre matière et rayonnement, c'est modéliser l'allure de ces courbes.

2 Dispersion et absorption

2.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

Démarche : On veut exprimer la permittivité diélectrique du milieu pour pouvoir caractériser la propagation des ondes. Il nous faut donc faire une étude à l'échelle microscopique de l'interaction entre le champ et les charges. Il faudrait utiliser la méca Q. Mais on se propose de faire un modèle classique qui permet de rendre compte des observations. C'est un modèle phénoménologique que l'on doit à Lorentz au début de XX.

(Pour les questions : Approche semi-classique : Pour un traitement semi-quantique, on prendrait un système à deux niveaux et un champ classique, on tomberait sur les oscillations de Rabi. Puis en utilisant le formalisme de la matrice densité, on tombe sur les équations de Bloch optiques. Il faut introduire des temps de relaxation dus aux collisions et à l'émission stimulée. Moyennant une hypothèse d'adiabaticité (les coefficients off-diagonaux suivent adiabatiquement les populations), on peut calculer la susceptibilité, qui est la même que celle de l'électron élastiquement lié, à un facteur près : la "force de l'oscillateur")

On se place dans le cas d'un atome monoélectronique (Hydrogène) et on étudie l'électron : **Hypothèses :**

- Le noyau est fixe
- L'électron subit une force de rappel vers le noyau. (C'est une modélisation de l'interaction Coulombienne purement empirique)
- La dissipation est modélisée par une force de frottement visqueuse. Cette dissipation est interprétée comme la perte d'énergie due au rayonnement de l'électron (charge accélérée).
- Le champ électrique extérieur est uniforme à l'échelle de l'atome

On note $\vec{r}$ la position de l'électron repéré par rapport au barycentre des charges + :

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} - \frac{m}{\tau}\dot{\vec{r}} - e\vec{E}$$

Dans l'espace de Fourier, en modélisant l'atome comme un dipôle ($\vec{p} = -e\vec{r}$) on a :

$$\vec{p} = \epsilon_0 \frac{e^2/(\epsilon_0 m)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E} = \epsilon_0 \alpha(\omega) \vec{E}$$

α est le coefficient de polarisabilité. C'est un coefficient complexe homogène à des m³

Pour un milieu dilué, le champ ressenti par le dipôle est le champ extérieur. On en déduit que $\vec{P} = n\vec{p}$:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \frac{ne^2/(\epsilon_0 m)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E} = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E} \quad \text{avec} \quad \chi_e = \frac{ne^2/(\epsilon_0 m)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} = \chi'_e - i\chi''_e$$

Deux points importants : χ_e dépend de ω (donc l'équation de constitution est bien valable uniquement en Fourier) et est complexe. On peut tracer les parties réelle et imaginaire de χ_e en fonction de ω

Bilan Dans cette sous-partie avec un modèle phénoménologique, nous avons obtenue la forme de ϵ_r dans un cas de polarisation électronique. Comment cela se compare-t-il à l'expérience ?

2.2 Observation expérimentale de la susceptibilité

La polarisabilité électronique n'est pas la seule source microscopique de polarisation. Il faut aussi citer la polarisabilité ionique, même phénomène mais changement d'échelle, ω_0 correspond à de l'IR et la polarisabilité d'orientation qui concerne l'alignement des moments dipolaires permanents avec un champ extérieur.

On remarque que les parties imaginaire et réelle semblent être corrélées. En effet, les relations de Kramers-Krönig permettent de la partie réelle et imaginaire de la susceptibilité (car la susceptibilité est analytique). Aussi dans un diélectrique la dispersion et l'absorption sont liées.

on peut observer que cela se compare bien aux vraies courbes de susceptibilité.

2.3 Dispersion

Zone de transparence : domaine de pulsation où l'absorption est très faible.

Les courbes montrent que loin de ω_0 , n' varie peu avec la fréquence : il y a peu de dispersion. Dans ces zones, on a $n \approx n_1 \gg n_2$.

On ne prend en compte qu'un seul type de porteur de charge. On peut écrire :

$$\epsilon_r = 1 + \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{avec} \quad \epsilon_r > 0$$

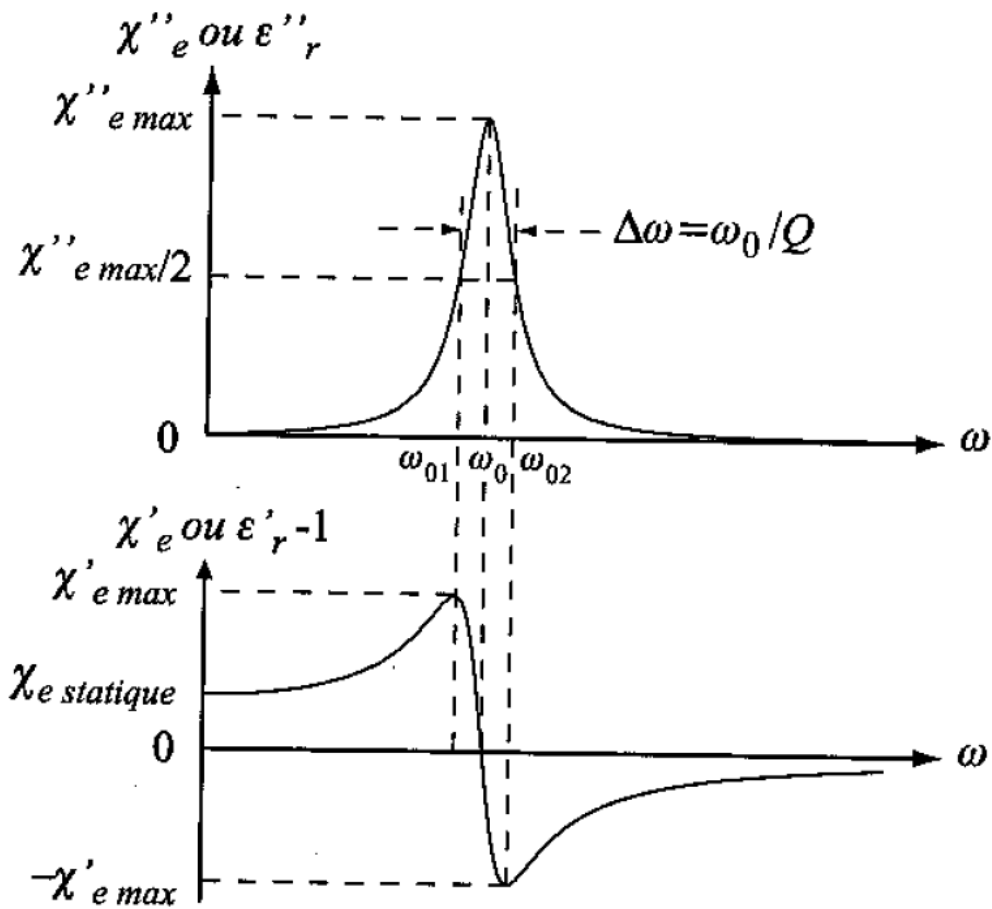


FIGURE 3 – χ_e Murras onde

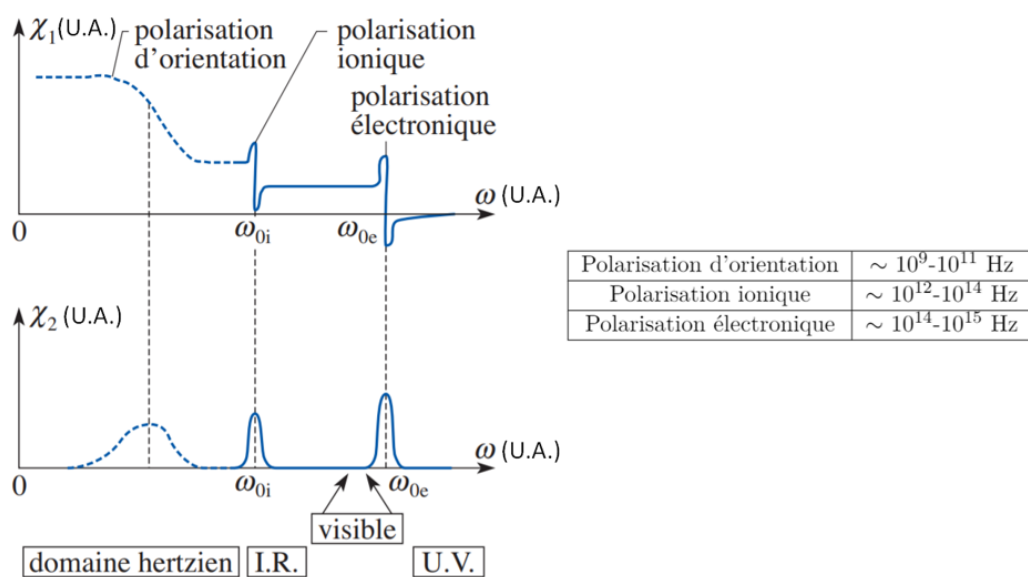


FIGURE 4 – Représentation schématique de la susceptibilité des diélectriques (brébec ondes) et on remet l'eau

En pratique, ça revient à se placer dans le domaine du visible pour l'air, le verre ou l'eau.

Loi de Cauchy si ya le temps :

On fait un dl de ϵ_r à basse fréquence (loin de l'absorption).

$$n^2 \approx 1 + \chi_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \right) = (1 + \chi_0) + \left(\frac{2\pi c}{\omega_0} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{2\pi c}{\omega_0} \right) \frac{1}{\lambda^4}$$

On a retrouvé la loi de Cauchy. Dans le visible, on mesure : $n(\lambda) = 1 + 1.36 \cdot 10^{-4} + \frac{1.06 \cdot 10^{-18}}{\lambda^2}$.

La longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ calculée à partir des données du modèle donne : $\lambda_0 = 88 \text{ nm}$, assez loin du visible.

2.4 Absorption

On se place proche de ω_0 . On s'intéresse à l'absorption, on ne néglige plus la partie imaginaire de la permittivité et de l'indice. On a vu que la décroissance de l'amplitude du champ était exponentielle.

Applications :

- Verre anti-UV : le verre absorbe le rayonnement ultraviolet, ce qui protège les yeux des UV.
- L'ozone absorbe aussi dans l'UV : rôle protecteur.
- Effet de serre : les rayons solaires qui traversent l'atmosphère sont absorbés et réémis dans l'IR par le sol. Ces rayonnements sont ensuite absorbés par l'eau et le dioxyde de carbone de l'atmosphère.
- Micro-onde : exactement une fréquence de 2.45 GHz l'eau absorbe le rayonnement et devient excitée. Elle se met à vibrer et l'agitation thermique augmente. ODG Pascal : épaisseur de pénétration des micro ondes dans l'eau : 14 cm.
- Spectroscopie IR
- Spectroscopie UV-visible, loi de Beer Lambert.

Aspect énergétique Ici on a bien de l'absorption, pour le montrer on peut calculer la puissance cédée au milieu. On considère une OPPH à 1D (on est en complexe) :

$$P_d = \langle \vec{j}_{\text{liée}} \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(j_{\text{liée}} \vec{E}^* \right)$$

Or dans le milieu, $\vec{j}_{\text{liée}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. On en déduit :

$$\vec{j} = i\omega \vec{P} = i\omega\epsilon_0(\chi' - i\chi'')\vec{E}$$

On a donc

$$P_d = \frac{1}{2} \omega_0 \epsilon_0 \chi'' E_0^2$$

Il y a bien de la puissance transmise au milieu. L'onde est absorbée et l'absorption est liée à χ'' (c logique).

3 Interface entre deux milieux

3.1 Lois de Descartes

HPrepa Ondes MP, PC, PSI, PT. p. 270.

Ecrire le champ électrique incident, le champ magnétique incident à l'aide de la relation de structure $\vec{B}_i = n_1 \frac{\vec{u}_1 \wedge \vec{E}_i}{c}$ pour les champs complexes.

Relations de continuité (pré-requis) impliquent la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ à l'interface.

On aboutit à :

$$\vec{k}'_1 = \vec{k}_1 + \alpha \vec{N} \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 = \vec{k}_1 + \beta \vec{N}$$

où $\vec{N}$ est la normale locale au dioptré, $\vec{k}_1$ le vecteur d'onde incident, $\vec{k}'_1$ le réfléchi, $\vec{k}_2$ le réfracté.

D'après ces relations,

- Les rayons réfléchi et réfracté appartiennent au plan d'incidence, défini par la normale et le rayon incident.
- La projection selon la direction tangente au dioptré des relations donne égalité des composantes tangentielles des vecteurs d'onde. En utilisant les relations de dispersion, on retrouve $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Coefficients de reflexion/transmission : on peut les établir comme dans HPrepa. On peut retrouver l'angle de Brewster, et deviner si il y a déphasage lors d'une réflexion.

Manip et code angle de Brewster

3.2 Couche anti-reflet

HPrepa p. 279, leçon de Pascal

$R = 0.04$ en incidence normale on veut l'améliorer. Voir Hprépa ondes il ya un exo corrigé dessus p279 .

$$n_2^2 = n_1 n_2 \quad \text{et} \quad e = \frac{p\lambda}{2n_2}$$

Si p est trop grand, R passe rapidement d'un minimum à un maximum quand la longueur d'onde varie, il faut choisir e de l'ordre de la longueur d'onde. Les traitements anti reflet font appel à l'utilisation de couches minces. En pratique, on utilise des dépôts multiples de diélectriques pour rendre le traitement presque achromatique.

Conclusion

On a caractérisé certains milieux diélectriques. Quid des milieux non linéaires (effet Kerr, Pockels) ? Des milieux non isotropes (biréfringence) ? Autres comportements (piezzoélectricité, ferroélectricité...) ? Cristaux nématiques ? Relations de Clausius Mossoti, lien de n avec ρ ...