
RAYONNEMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE

Niveau

Commentaires du jury

- 2017 : La leçon ne doit pas se réduire à une suite de calculs.
- 2015 : Le sens physique des approximations réalisées, ainsi que les propriétés de symétrie des champs électrique et magnétique rayonnés, doivent être discutés. Cette leçon peut également être l'occasion de réfléchir à la stabilité de la matière.
- 2014 : Certains candidats utilisent un modèle faisant intervenir une charge électrique variable, ce qui ne semble pas très réaliste. Cette leçon ne doit pas être exclusivement technique et doit être l'occasion de discussions physiques poussées.

Bibliographie

—

pré-requis

- EM dans le vide
- \vec{A}, V
- ARQS
- champ créé par une sphère chargée

Expériences

—

Table des matières

1 Rayonnement d'un dipôle oscillant	2
1.1 Cadre et hypothèses	2
1.2 Calcul du champ	3
1.3 Analyse de la zone de rayonnement	5
1.4 Aspect énergétique	5
2 Diffusion de Rayleigh	6
2.1 Interaction avec un nuage électronique	6
2.2 Couleur et polarisation du ciel	7
3 Antennes (bonus)	8

Introduction

Nous avons vu dans les cours précédents la propagation d'ondes électromagnétiques dans différents milieux. Néanmoins, on ne s'est pas intéressé à la source de ces ondes. Pour comprendre la création de ces ondes il va falloir

s'intéresser à ce qu'on appelle un dipôle oscillant.

Ceci nous permettra de comprendre également un autre phénomène : l'interaction entre une onde électromagnétique (la lumière) et de la matière neutre (le ciel), interaction qui rend le ciel bleu la journée et rouge lors du coucher du soleil. Tout d'abord, c'est quoi un dipôle? On a déjà vu en statique : On a effectivement vu que deux charge

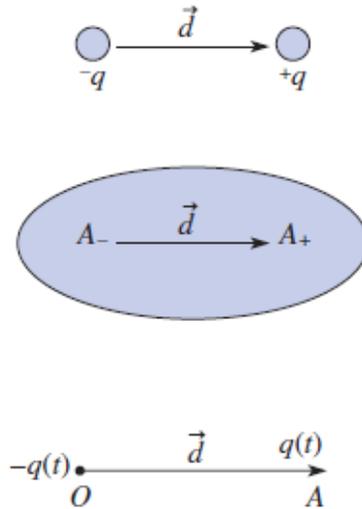


FIGURE 1 - Dipôle

espacé d'une distance d pouvait être représenté par un moment dipolaire $\vec{p} = ed\vec{e}_z$. Ce moment dipolaire entraîne un champ statique dans l'espace. Cependant cela ne fait pas une onde!! Aujourd'hui on s'intéresse à savoir ce qu'il se passe si la distance d varie avec le temps! **Important** : Insister directement sur le fait que ce sont les charges en mouvement qui sont les source du rayonnement émis.

1 Rayonnement d'un dipôle oscillant

1.1 Cadre et hypothèses

On considère un domaine D contenant des charge et courants variable. On veut déterminer le champ électrique émis par ce domaine.

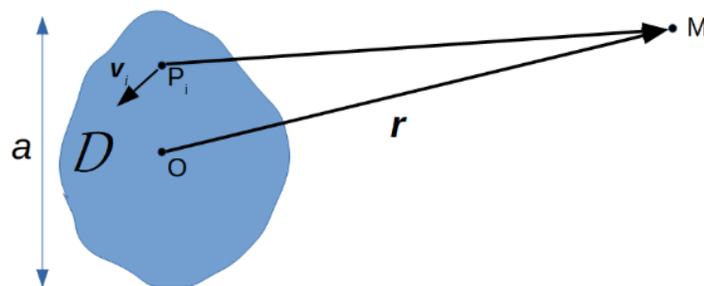


FIGURE 2 - Cadre

On choisit de travailler avec la Jauge de Lorentz : $\nabla \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$. On va travailler avec le potentielle vecteur \vec{A} . On admet que l'on peut déduire ce potentiel vacteur de la fomule des potentiels retardées :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{j(P, t - \frac{PM}{c})}{|\vec{PM}|} d\tau \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in D} \frac{q_i \vec{v}_i(P_i, t - \frac{PM}{c})}{|\vec{PM}|}$$

(Pourquoi cette formule à du sens, c'est l'expression que l'on a pour une distribution de courant statique, mais dont l'information ne nous parvient translaté dans le temps du à la limite de propagation de l'information) On l'écrit en continue et en discret parce que le continue c'est sur lui qu'on fait les calcul et le discret il permet de faire le lien avec les moment dipolaire. En effet le terme au numérateur ressemble à la dérive des moments dipolaire! (comme on admet la formule autant lui donner du sens physique)

Le problème c'est que l'on ne sait pas calculer!! Il nous faut faire des hypothèses : **Hypothèses** :

- **Charges non relativiste** : $|\vec{v}_i| \ll c$ On peut réécrire cette hypothèse : Si on considère un mouvement périodique de pulsation ω alors comme $v_i \simeq r_i \omega$, on note a la taille typique de la distribution, la vitesse est majorée par $a\omega$. Donc la condition de mouvement non relativiste s'écrit $\omega a \ll c$. On pose $\lambda = 2\pi c\omega$, la condition non-relativiste se réécrit

$$\lambda \gg a$$

En fait on l'avais déjà supposé pour écrire le potentiel vecteur comme on l'a fait.

- **Hypothèse dipolaire** : On se place loin des sources :

$$r = |\vec{OM}| \gg a$$

Concrètement : $\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \frac{1}{|\vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{OM}|}$ On peut sortir le dénominateur de l'intégrale

- **ARQS des sources** : On suppose que le retard du signal reçu des différents points de la source sont égaux. Par exemple soient P_1 et P_2 deux points de D distants de a . Le déphasage temporel entre les deux signaux est alors typiquement a/c . Si on note τ le temps typique de variation des charges et courants, on suppose alors que :

$$\frac{a}{c} \ll \tau \implies a \ll \lambda$$

On retrouve la condition d'un mouvement non relativiste.

Concrètement $\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}' - \vec{r}|}{c}\right) = \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}'|}{c}\right)$

Avec ces hypothèse on va pouvoir calculer le potentiel vecteur et en déduire le champ!

1.2 Calcul du champ

(Le faire en discret et étendre au continu me semble plus sûr, mais ça change rien)

Potentiel vecteur : Loi de Biot et Savart :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}' - \vec{r}|}{c}\right)}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d\vec{r}' \underset{\text{hypothèse}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_D \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}'|}{c}\right) d\vec{r}'$$

Expression de \vec{j} : si l'on considère un seul type de porteurs de charge q à la vitesse \vec{v} ,

$$\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}'|}{c}\right) = \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}'|}{c}\right) \vec{v}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}'|}{c}\right) \quad \text{En discret on a } \vec{j}_i\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}'|}{c}\right) = q_i \vec{v}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}'|}{c}\right)$$

on pose alors $t' = t - \frac{|\vec{r}'|}{c}$:

$$\vec{v}\left(t - \frac{|\vec{r}'|}{c}\right) = \frac{d}{dt'} \left(\vec{r}' \left(t - \frac{|\vec{r}'|}{c} \right) \right)$$

Il vient :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|} \frac{d}{dt'} \left(\iiint_D \rho(\vec{r}', t') \vec{r}' d\vec{r}' \right)$$

Lien avec le moment dipolaire de la distribution :

$$\vec{P}(t') = \iiint_D \rho(\vec{r}', t') \vec{r}' d\vec{r}'$$

On aboutit à l'expression :

$$\boxed{\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{P}}(t')}{|\vec{r}'|}}$$

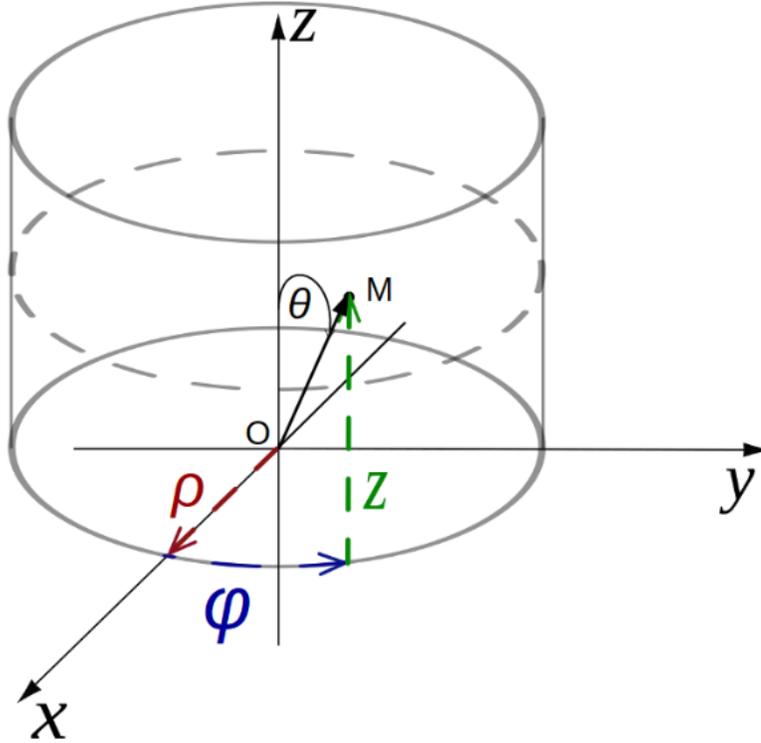


FIGURE 3 – Schéma pour les coordonnées.

Calcul de \vec{B} :

On va calculer \vec{B} à l'aide de sa définition à partir du potentiel vecteur, puis on pourra remonter à \vec{E} en intégrant l'équation de Maxwell-Ampère. **Attention** : à partir de maintenant, on va travailler avec \vec{P} ou \vec{p} et ses dérivées, on n'aura plus besoin d'écrire la densité de charge ρ . On va allégrement abuser des notations en notant ρ le rayon des coordonnées cylindriques.

Pour ce calcul, on fixe $\vec{P}(t') = P(t')\vec{e}_z$. Ca n'est pas une perte de généralité, ça dépend uniquement du système de coordonnées que l'on se fixe. En conséquence, $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$.

$$\vec{B}(M, t) = \nabla \times \vec{A}(M, t) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_\phi$$

On va avoir besoin de dériver $\vec{P}(t')$ et $\frac{1}{|\vec{r}|}$ par rapport à ρ :

— $\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \rho}$ Or, $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ donc :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{\sin \theta}{r^2}$$

— Règle de la chaîne :

$$\frac{\partial \dot{P}}{\partial \rho} = \ddot{P} \frac{\partial t'}{\partial \rho} = -\ddot{P} \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial \rho} = -\ddot{P} \frac{\sin \theta}{c}$$

D'où :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{P}}{cr} + \frac{\dot{P}}{r^2} \right) \sin \theta \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{P}}{cr} + \frac{\dot{P}}{r^2} \right) \wedge \vec{e}_r$$

Remarque : A grande distance, le champ est surtout dicté par l'accélération des charges.

Calcul de \vec{E} : à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère hors du domaine D (donc sans courants),

$$\begin{aligned}
\vec{E}(M, t) &= \vec{\mathcal{E}}(M, O) + c^2 \int_0^t dt'' \nabla \times \vec{B}(M, t'') \\
&= \dots \text{ Calcul dans le P\'erez d'EM} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \cos \theta \left(\frac{P}{r^3} + \frac{\dot{P}}{r^2 c} \right) + \frac{Q_{tot}}{r^2} \right] \vec{e}_r + \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{P}{r^3} + \frac{\dot{P}}{r^2 c} + \frac{\ddot{P}}{rc^2} \right] \vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

Concrètement cela donne ca : lien

1.3 Analyse de la zone de rayonnement

On se place dans la zone de rayonnement, c'est à dire :

$$a \ll \lambda (= c\tau) \ll r$$

Dans un cas général on a dans la zone de rayonnement (loins des sources) on a donc :

$$\begin{aligned}
\vec{E}(M) &= \frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})(\theta)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \\
\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \sin(\theta)}{4\pi cr}
\end{aligned}$$

Maintenant que l'on a les champs on va essayer de tout bine interpréter. **Interprétation physique :**

— Etude des symétries :

- Invariance par rotation : les champs ne dépendent pas de ϕ
- Tout plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie, donc $E_\phi = 0$ et $B_r = B_\theta = 0$
- On remarque que l'axe Oz passe pas une infinité de plans de symétries, donc E_θ et B_ϕ y sont nulle
- On aura u maximum d'amplitude perpendiculairement au dipôle car c'est là que l'amplitude est mu maximale

- Les champs décroissent lentement (en $1/r$)
- Le rayonnement est anisotrope, les champ sont nulle sur l'axe du moment dipolaire
- Le champ crée se déplace à grande distance à la vitesse c
- Localement on a une structure d'onde plane (On peut alors utiliser la relation de structure qui explique le lien entre les deux ondes)
- Le rayonnement est généré par les dérivés secondes du moment dipolaire : ce sont les charges accéléré qui permettent le mouvement

1.4 Aspect énergétique

Calcul du vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\ddot{p}^2(t') \sin^2(\theta)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \vec{e}_r$$

Ainsi $\vec{\Pi}_i$ décroît en $1/r^2$ contre $1/r^3$ pour un dipôle statique. Par exemple, à une distance de 10km d'un émetteur radio, l'amplitude du champ électrique reçu ne varie que de 10% sur une zone de 1 km de long.

Pour mesurer cette anisotropie on trace ce qu'on appelle un diagramme de rayonnement, ce qui consiste dans le tracé de la fonction :

$$F(\theta, \phi) = \frac{|\vec{\Pi}(r, \theta, \phi, t')|}{|\vec{\Pi}_{max}(r, \theta_{max}, \phi_{max}, t')|} = \sin^2(\theta)$$

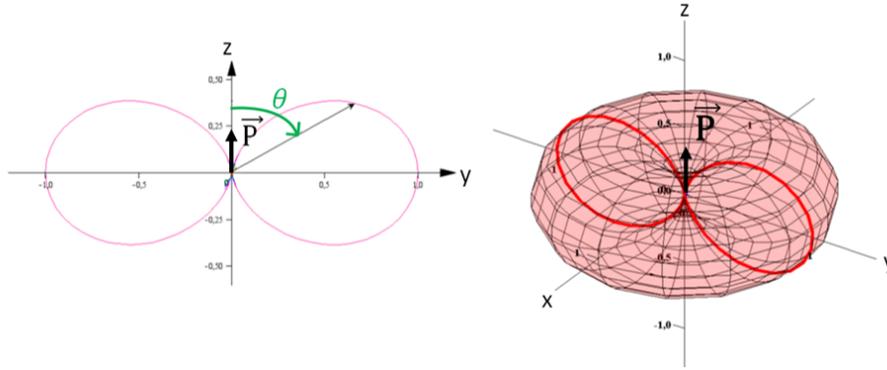


FIGURE 4 – Rayonnement

On peut calculer la puissance totale rayonnée :

$$P = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{\Pi} \vec{e}_r r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{\ddot{p}(t)}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

Elle est indépendante de r "Pouvez-vous expliquer la puissance rayonnée dépend de l'accélération et pas de la vitesse. En effet, si une charge en mouvement rectiligne uniforme rayonne, cela veut dire, par principe de relativité galiléenne, qu'une charge au repos rayonne, ce qui n'est pas le cas." Puissance de l'émetteur : Grandes Ondes de France Inter à Allouis 2100 kW

2 Diffusion de Rayleigh

On s'intéresse au rayonnement de la matière. Par exemple :

On place du lait entier dans une cuve. On envoie un faisceau avec une lampe QI + AC. Observations :

- La lumière après avoir traversé la cuve est rougeâtre.
- La lumière diffusée sur le côté de la cuve est polarisée et bleue.

Version des zigotos : Ce site. C'est la même chose mais avec du thiosulfate, il y a aussi des vidéos.

2.1 Interaction avec un nuage électronique

Poly de JF EM dans le vide, p. 109 Pour modéliser cette petite expérience, on doit s'intéresser à la modélisation de l'interaction lumière-matière.

Hypothèses du modèle : on considère un atome soumis au champ électrique \vec{E}_{ext} .

- On ne considère que le mouvement des électrons, la masse du noyau étant très supérieure à celle des électrons.
- Les électrons sont répartis de manière sphérique dans une boule de rayon a . En l'absence de champ les barycentres des charges positives et négatives sont superposés.
- En présence d'un champ, on note $\vec{r} = P\vec{N}$ l'écart entre les positions des barycentres positifs et négatifs.
- On reste dans le cadre classique.
- Le noyau est supposé ponctuel (taille du noyau : 10^{-15} m VS taille de l'atome (du nuage donc) : 10^{-10} m).

On applique le PFD à la sphère électronique pour un noyau de charge Ze :

$$Zm_e \ddot{\vec{r}} = F_{P/N} \vec{r} - Ze\vec{E}_{ext}(\vec{r}, t) - Ze\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{f}_{dissip}$$

On analyse les termes un à un :

- Si la longueur d'onde du rayonnement incident extérieur λ est grande devant la taille du nuage électronique, le champ \vec{E}_{ext} est uniforme dans le PFD.
- Partie magnétique de la force de Lorentz : négligeable si $|\vec{v} \wedge \vec{B}| \ll |\vec{E}|$. Or, $|\vec{E}| \approx v_\phi |\vec{B}|$. On vérifiera dans la suite que la vitesse des électrons est petite devant v_ϕ .

- On prend une dissipation linéaire, proportionnelle à \vec{v} . On n'en connaît pas la forme... $\vec{f}_{dissp} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$. On fait une approximation à l'ordre 1, la puissance dissipée étant celle dissipée par le rayonnement (elle est en ω^4 , ce qui n'est pas cohérent avec une force en ω qui donne une puissance dissipée en ω^2 ... mais on se limite au premier ordre.
- Le terme de la force électrostatique du noyau sur le nuage se calcule en remarquant que d'après la 3^e loi de Newton : $\vec{F}_{P/N} = -F_{N/P}$. Vue dans ce sens là, c'est la force qu'applique une sphère uniformément chargée sur une charge ponctuelle (le noyau). Si le champ de la boule est \vec{E}_b , la force s'écrit $\vec{F}_{N/P} = Ze\vec{E}_b$

Champ créé par la distribution sphérique : On pourrait donner le résultat direct. Parce que sinon il faut se taper les

Symétries et invariances de la distribution sphérique homogène de charges de centre O en coordonnées sphériques :

- symétrie sphérique : $\vec{E} = E_r\vec{e}_r$ par le principe de Curie.
- Invariance par rotation θ, ϕ : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

On applique le théorème de Gauss à la sphère :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

D'où la force subie avec $\rho = \frac{Ze}{4\pi a^3/3}$ et $r\vec{e}_r = \vec{NP}$:

$$\vec{F}_{P/N} = -\frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} P\vec{N}$$

On réécrit le PFD et on introduit le moment dipolaire $\vec{P} = -ZeN\vec{P}$:

$$\ddot{\vec{P}} = -\frac{Ze^2}{4\pi a^3 m_e} \vec{P} - \frac{Ze^2}{m_e} \vec{E}_{ext}(t) + \frac{\dot{\vec{P}}}{\tau}$$

On pose $\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e}$: on obtient $\omega_0 \approx Z \times 1.6 \times 10^{16}$ rad/s avec $a = 10^{-10}$ m.

Remarque : ca ressemble au modèle de l'électron élastiquement lié.

On aboutit en passant en fréquentiel :

$$\vec{P}_\omega = \frac{Ze^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau} \vec{E}_\omega$$

On distingue 3 régimes. Voir le poly de JF EM dans le vide p. 111.

Dans le cas général, la puissance rayonnée vaut :

$$P_{ray} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 |E_\omega|^2 |\alpha_\omega|^2$$

2.2 Couleur et polarisation du ciel

Dans le domaine visible les pulsations sont inférieures à 5×10^{15} rad s⁻¹ et que $\omega_0 \simeq 10^{16}$, on est dans le régime de Rayleigh. On a donc (en RSF) :

$$\vec{P} = \frac{q^2}{m\omega_0^2} \vec{E} \implies \ddot{\vec{P}} = \frac{-q^2\omega^2}{m\omega_0^2} \vec{E}$$

La puissance rayonnée est alors : $P_{ray} = \frac{\alpha_0^2}{12\pi c^3 \epsilon_0^2} E_\omega^2 \omega^4$ La puissance rayonnée est proportionnelle à ω^4 (soit en $\frac{1}{\lambda^4}$ donc 4 fois plus importante pour le bleu que pour le rouge. Le rayonnement bleuté observé vient précisément de cela : les dipôles absorbent ne partie du rayonnement incident et le réémettent sous forme de rayonnement dipolaire et dans tout l'espace. C'est pour les pulsations les plus importantes (correspondant au bleu) que ce phénomène de est le plus important. Le faisceau de lumière blanche initial va donc au cours de son parcours dans la cuve, s'appauvrir petit à petit en rayonnement haute fréquence.

Les dipôles absorbent une partie du rayonnement et le réémettent sous forme de rayonnement dipolaire.

On peut expliquer la couleur rouge du coucher de soleil. Le soleil couchant est rouge car la lumière émise traverse un épaisse couche d'atmosphère et s'appauvrit en bleu

La distance caractéristique d'atténuation est de 24 km pour le bleu et 200km pour le rouge. 90% de la masse de l'atmosphère est en dessous de 16 km d'altitude.

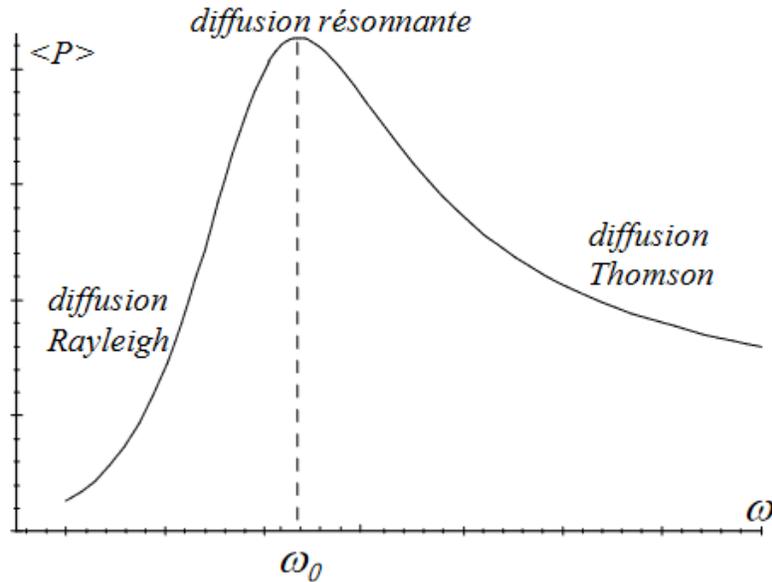


FIGURE 5 – Régime de diffusion

Polarisation

C'est un phénomène bien connu des photographes qui utilisent des filtres polarisants pour obtenir des paysages contrastés sur fond de ciel bleu profond en éteignant la lumière polarisée.

A cause des diffusions multiples, la lumière n'est pas entièrement polarisée, même à 90° .

Les abeilles sont sensibles à la polarisation de la lumière et utilisent la polarisation issue de la diffusion dans le ciel pour s'orienter par rapport au soleil, qui peut lui-même être caché

Remarque : Diffusion de Mie : lorsque les molécules sont de taille comparable à la longueur d'onde $a > \lambda/10 \simeq 0.1m$ le modèle de l'électron élastiquement lié n'est plus valable, c'est la diffusion de Mie. La diffusion de Mie d'une onde électromagnétique plane par une particule sphérique est élastique : sans changement de longueur d'onde. Pour les nuages ou le brouillard, les gouttes d'eau de taille $a=10m$ diffusent dans le régime de Mie. Comme la diffusion de Mie ne sélectionne pas les couleurs, ils paraissent blancs/laiteux. De plus, comparé au diagramme de rayonnement de la diffusion Rayleigh, la diffusion de Mie présente un lobe plus intense dans la direction de l'onde incidente : on peut avoir une zone blanchâtre (l'auréole) autour du soleil, due aux aérosols. Dans le régime des grandes particules, les résultats de la diffusion de Mie se rapprochent des résultats d'optique géométrique : perte de chromaticité et polarisation.

3 Antennes (bonus)

Site de Pascal Wang En fonction du temps et du sujet : Ca peut être un choix pour se forcer à passer moins de temps sur la théorie et plus sur la pratique... (mais il faut pas vouloir faire trop de choses)

L'idée est $i = \frac{1}{l} \frac{\partial P}{\partial t}$. Cependant on est pas dans l'ARQS, il faut découper l'antenne en tronçon et sommer.

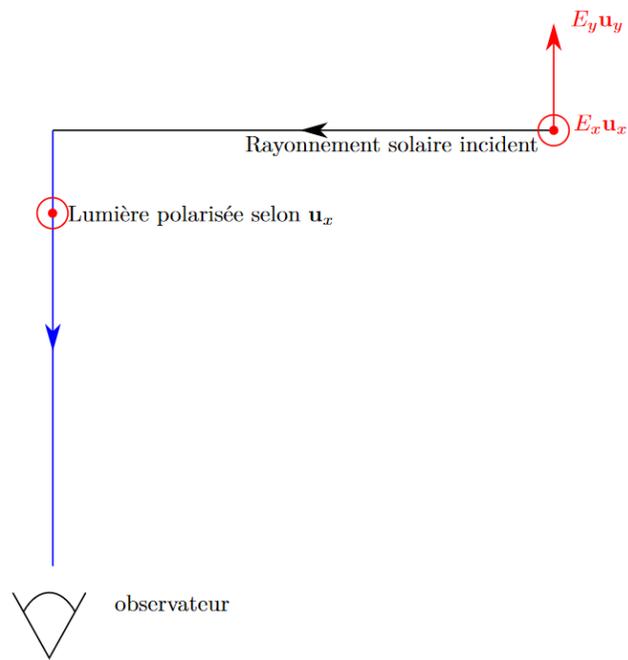


FIGURE 6 – Polarisation du rayonnement