

DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

Niveau

Commentaires du jury

- 2011-2017 : Les conditions de Fraunhofer (pour autant, elles ne constituent pas le coeur de la leçon) et leurs conséquences doivent être présentées, ainsi que le lien entre les dimensions caractéristiques d'un objet diffractant et celles de sa figure de diffraction.
- 2009-2010 : Les phases associées aux amplitudes doivent être traitées avec soin.
- 2006-2008 : Le principe de Huygens-Fresnel doit être exposé clairement, sans débordements mathématiques excessifs. Il faut expliquer pourquoi la diffraction de Fraunhofer est pertinente dans la formation des images.
- 2005 : Rappelons que la diffraction de Fraunhofer accompagne l'image géométrique d'une source initiale et que l'écriture du principe de Huygens-Fresnel dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer doit être rigoureuse. Les applications ne doivent pas se limiter au trou circulaire et à la fente fine. Dans ce dernier cas, il faut justifier le calcul qui est mené.
- 2001 : Il faut éviter les calculs trop lourds et valoriser les applications. Notons que le pouvoir séparateur de la lunette astronomique n'est pas le seul exemple d'application

Bibliographie

- BUP 889(2)
- Hetch optique
- Femptophysique et Deuxieme fempto

pré-requis

Expériences

—

Table des matières

1 De Huygens-Fresnel à Fraunhofer	2
1.1 Principe de Huygen-Fresnel	2
1.2 Diffraction de Fraunhofer	4
1.3 Réalisation pratique	5
2 Etude de la figure de diffraction	7
2.1 Cas d'une fente	7
2.2 Propriété de la figure de diffraction	7
2.3 Résolution en optique : critère de Rayleigh	8
3 Application : Filtrage	8
3.1 Filtrage de Fourier	8
3.2 Imagerie par contraste de phase	9

Introduction

On a vu l'optique géométrique et la notion de rayon lumineux, qui fonctionne dans le cadre de l'optique géométrique. Mais

lorsque l'on envoie un rayon laser dans une fente fine, la tache formée par le rayon n'est plus ponctuelle. On sort complètement du cadre de l'optique géométrique!

Et pour cause : une des hypothèses fondamentales de ce cadre est que la taille typique des objets rencontrés est grande devant la longueur d'onde des rayonnement utilisés. Lorsqu'on place une fente de taille a qui n'est pas très grande devant la longueur d'onde, l'optique géométrique n'est plus valide.

1 De Huygens-Fresnel à Fraunhofer

1.1 Principe de Huygen-Fresnel

Cadre : On considère une onde arrivant sur un diaphragme. On considère un modèle scalaire de la lumière, sans

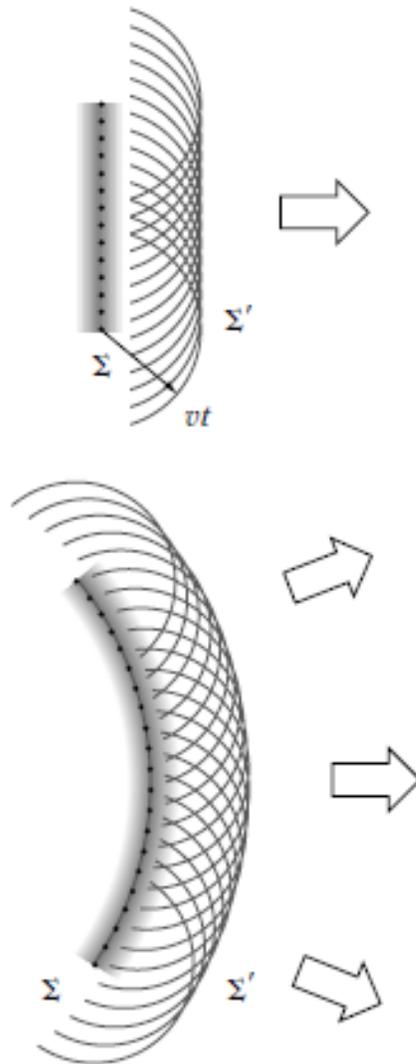


FIGURE 1 – Principe de Huygens fresnel (Hetch optique)

effet de polarisation et une onde monochromatique $\omega = ck$. On peut représenter une onde lumineuse monochromatique par un champ scalaire :

$$U(\vec{r}, t) = U_0(\vec{r}) \exp\{i(\omega t - \phi(\vec{r}))\}$$

Principe de Huygens Fresnel :

Chaque point non obstrué d'un front d'onde, à un instant donné, peut être considéré comme une source d'ondelettes secondaires sphériques (de la même longueur d'onde que l'onde primaire). Pour un point quelconque situé au-delà, l'amplitude du champ optique est la superposition de toutes ces ondelettes (en tenant compte de leur amplitude et de leur phase relative). En d'autres termes : **Chaque point M d'une surface atteinte par la lumière se comporte comme une source secondaire émettant une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde incidente en M. Les ondes des issues des différentes sources sont cohérentes et interfèrent entre elles**

Historiquement Huygens exprime cette idée dans son traité sur la lumière de 1690. Il retrouve ainsi les lois de Descartes. Fresnel fit la synthèse des concepts de la description ondulatoire de Huygens et du principe d'interférence. Grâce à ces conceptions, Fresnel fut à même de calculer les figures de diffraction obtenues pour un certain nombre d'ouvertures et d'obstacles caractéristiques ; il put aussi expliquer de manière satisfaisante le phénomène de propagation rectiligne de la lumière dans les milieux homogènes isotropes et ainsi dissiper la principale objection newtonienne à la théorie ondulatoire.

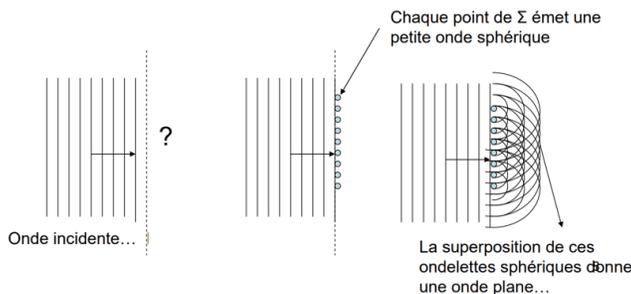


FIGURE 2 – Principe de Huygens fresnel (Hetch optique)

Fresnel, dans les années 1800, a modifié mathématiquement et avec succès le principe de Huygens pour inclure le concept d'interférence. Plus tard, Kirchhoff a montré que le principe de Huygens-Fresnel était une conséquence directe de l'équation différentielle de l'onde. Interprétation avec les mains de la diffraction **Interprétation** : Le phénomène de diffraction peut donc être interprété comme un phénomène d'interférences avec un nombre continu de sources.

En réalité, il n'y a pas de source secondaire, c'est un résultat mathématique qui dit que c'est comme s'il y avait des sources secondaires

Dans un cas générale on considère la situation suivante : Un point source S éclaire un objet, celui ci diffracte et on observe ce qu'il se passe en un point M

On caractérise l'objet avec la fonction de transparence (c'est un outil mathématique pratique) : t

- $t(P) = 0$ C'est opaque, comme les bord d'une fente
- $t(P) = 1$ La lumière passe complètement sans être modifié, c'est l'intérieur de la fente.
- $|t| \leq 1$ l'objet et partiellement transparent.

On peut alors formaliser tout cela :

$$U(M) = \frac{-iA}{2\lambda} \iint dS \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} (\cos \theta_r - \cos \theta_s) = \frac{-iA}{2\lambda} \frac{e^{iks}}{s} \iint dS \frac{e^{ikr}}{r} (\cos \theta_r - \cos \theta_s)$$

Le mieux c'est d'écrire :

$$U(M) = \iint_{\Sigma} K(\theta_s, \theta_M) \underbrace{s_0 \frac{e^{ikSP}}{SP}}_{\text{Amplitude incidente}} \underbrace{t(P)}_{\text{Objet}} \underbrace{\frac{e^{ikPM}}{PM}}_{\text{Huygens Fresnel}} d^2P \quad \text{Avec} \quad K = \frac{-iA}{2\lambda} (\cos \theta_r - \cos \theta_s)$$

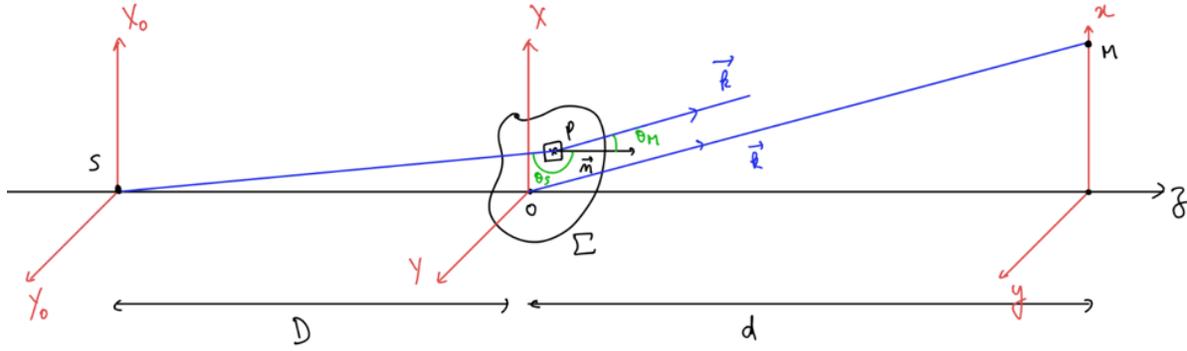


FIGURE 3 – Schémas et notations (de Pascal Wang).

On est pas obligé de mentionner le K , on peut simplement dire qu'il dépend des cosinus des angles que l'on suppose faible (ou autour de π) et donc que l'on apprime par des constantes.

On pourrait corriger le principe de Huygens Fresnel : Chaque point M d'une surface atteinte par la lumière se comporte comme une source secondaire émettant une onde sphérique d'amplitude **modulée par un facteur d'inclinaison** et proportionnelle à celle de l'onde incidente en M . Les ondes des issues des différentes sources sont cohérentes et interfèrent entre elles. Ce qui expliquerait que l'onde ne va que vers devant à partir des sous sources.

1.2 Diffraction de Fraunhofer

On va se placer dans un cadre particulier qui modifie la formule établie.

— On considère une onde incidente plane issue d'un point S à l'infini, de sorte que $\cos \theta_s = -1$. Par ailleurs, en tout point de l'ouverture, l'amplitude sera la même car le chemin parcouru depuis la source sera le même.

On note cette amplitude A_0 (elle comprend les termes A_i et $\frac{e^{iks}}{s}$).

— On place l'écran à une distance d grande devant les dimensions de l'ouverture Σ . Cela permet d'écrire $\cos \theta_r = 1$ et $d \gg x, X, y, Y$.

Ainsi,

$$U(M) = \frac{-iA_0}{2\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} t(P) dX dY$$

Il faut exprimer r : on a

$$r^2 = d^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2$$

Préférer des x et x_1 si on écrit pas bien ?

Amplitude : on néglige les termes d'ordre supérieur à 0. L'approximation $r \approx d$ est suffisante.

Phase : ici, on ne peut négliger les termes entre eux. Ce qui compte, c'est de comparer à 2π : un terme négligeable devant 2π change très peu la phase, tandis que pour un terme négligeable devant d , on ne peut rien dire.

On écrit :

$$r = \sqrt{d^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2} \approx d + \frac{(x - X)^2 + (y - Y)^2}{2d}$$

Cet ordre d'approximation mène à la formule de diffraction de Fresnel :

$$U(M) = \frac{A_0}{i\lambda} \frac{e^{ikd}}{d} \iint_{\Sigma} e^{ik \frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{2d}} t(P) dX dY$$

Pour arriver au régime de Fraunhofer, on doit se placer dans un cadre légèrement différent. On reste dans l'approximation $d \gg X, Y$ (loin de la source), mais on se place à des angles constants.

On a donc $\tan \alpha \approx \alpha = \frac{x}{d}$ et $\tan \beta \approx \beta = \frac{y}{d}$. On a toujours $d \gg x, y$ mais on peut avoir (et on va se placer dans ce cas) $x, y \gg X, Y$.

Ainsi, l'exponentielle s'écrit :

$$\exp\left\{ik \frac{x^2 + X^2 - 2xY + y^2 + Y^2 - 2yY}{2d}\right\} \approx \exp\left\{ik \frac{x^2 + y^2}{2d}\right\} \exp\{-ik(\alpha X + \beta Y)\}$$

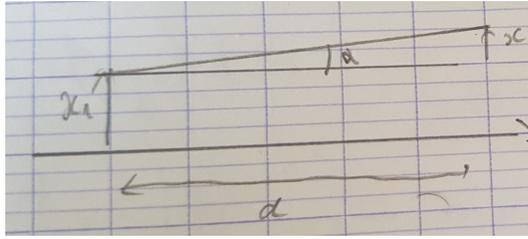


FIGURE 4 – Schéma pour voir les angles.

On en déduit :

$$U(M) = \frac{A_0}{i\lambda} \underbrace{e^{ik(d + \frac{x^2+y^2}{2d})}}_{A'_0(x,y)} \iint_{\Sigma} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha X + \beta Y)} t(X, Y) dX dY$$

Nombre de Fresnel : on a négligé la taille de l'objet diffractant devant d ... mais pas vraiment. Il faut être un peu plus précis que ça. Notre approximation est bonne si :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2d} \ll 2\pi \implies \frac{X^2 + Y^2}{2\lambda d} \ll 1 \quad \text{dans le régime de Fraunhofer}$$

Si on note $a^2 = X^2 + Y^2$ le carré de la taille caractéristique de l'objet, on définit le nombre de Fresnel comme :

$$\mathcal{F} = \frac{a^2}{2\lambda d} \ll 1$$

Le régime de Fresnel est vérifié lorsque $\mathcal{F} \gg 1$.

Remarques :

— On peut (doit) voir $U(M)$ comme une transformée de Fourier : on pose $u = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $v = \frac{\beta}{\lambda}$ les **fréquences spatiales**. Alors

$$U(u, v) = C \iint_{-\infty}^{\infty} t(X, Y) e^{-i2\pi(uX + vY)} dX dY \propto \mathcal{TF}[t(x, y)](u, v)$$

On a changé les bornes de l'intégrale en disant que $t(x, y) = 0$ lorsque l'on est dans une zone opaque.

— Rappel des hypothèses :

- Petits angles, grandes distances
- Rayonnement mono-chromatique
- Modèle scalaire de la lumière
- $\mathcal{F} \ll 1$

— $I = UU^* = I_0 |\hat{t}(u, v)|^2$

1.3 Réalisation pratique

Partie pour faire le bilan sur les approximations que l'on a fait en pratique. L'idée c'est de faire passer tous les calculs en discutant sur une expérience :

A partir d'une onde plane : On a l'objet diffractant et il faut observer à l'infini pour voir la diffraction de Fraunhofer :

Montage de Frenel en 4f (rigoureux)

Les 3 montages et leurs caractéristiques sont décrits ici : Leçon de Pascal

Mais du coup, on sait écrire mathématiquement ce qu'on observe à l'écran ?

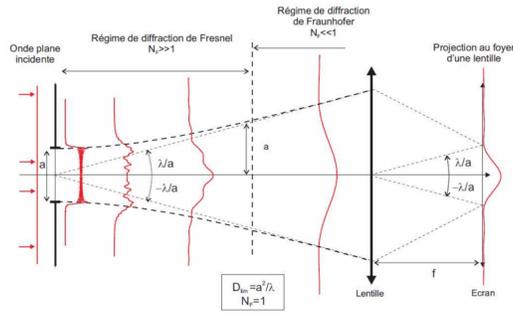


FIGURE 5 – Limite Fraunhofer-Fresnel

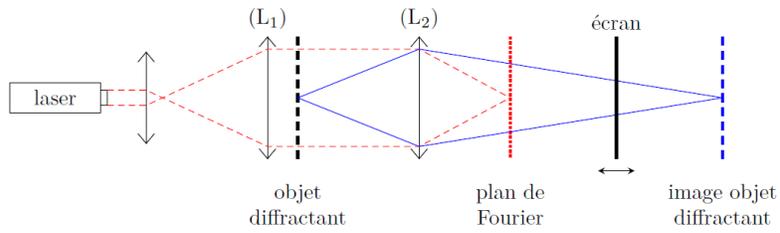


FIGURE 6 – Montage

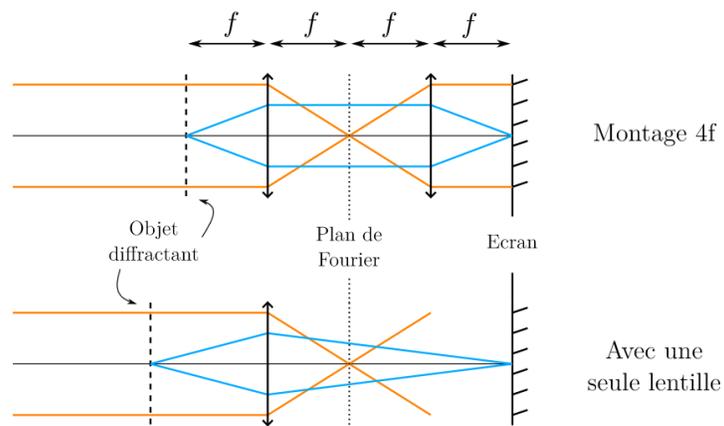


FIGURE 7 – Montage 4f

2 Etude de la figure de diffraction

2.1 Cas d'une fente

Toujours sur le montage précédent (ca fait la transition) On observe, es taches horizontale avec celle du milieu très lumineuse

$$\begin{aligned}U(u, v) &= C \iint_{-\infty}^{\infty} t(X, Y) e^{-i2\pi(uX+vY)} dXdY \\&= C \int_{-a/2}^{a/2} dX \int_{-b/2}^{b/2} dY e^{-i2\pi(uX+vY)} \\&= \left[\frac{-i2\pi uX}{-i2\pi u} \right]_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{-i2\pi vY}{-i2\pi v} \right]_{-b/2}^{b/2} \\&= C \operatorname{sinc}(\pi ua) \operatorname{sinc}(\pi vb)\end{aligned}$$

On en déduit avec $u = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{x}{\lambda d}$ et $v = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{y}{\lambda d}$:

$$I(x, y) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{xa}{\lambda d}\right) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{yb}{\lambda d}\right)$$

On a $I = 0$ pour $\frac{xa}{\lambda d} = 1 \implies \theta = \frac{x}{d} = \frac{\lambda}{a}$

On fait varier la taille de la fente, la figure varie en sens opposé. On le voit dans l'équation. On peut prendre un point si on veut mais je pense qu'il y aura pas le temps.

2.2 Propriété de la figure de diffraction

Cette partie dépend du temps que l'on a et de comment on arrive à faire marcher les manip et à quelle point ça prend du temps de bouger des trucs en live

La figure de diffraction de Fraunhofer d'un objet diffractant éclairé par une onde plane est la transformée de Fourier de la transparence. C'est très bien car on a plein d'outil pour calculer les TF.

On peut souligner certains aspects : **Théorème de Babinet** La figure de diffraction d'un objet est la même que celle de son objet complémentaire (transparence 1-t) au terme de fréquence spatiales nulles (au centre) près. On peut le montrer expérimentalement

$$\text{Linéarité } TF(1-t) = \delta(u) - TF(t)$$

Translation

$$\text{Modulation } TF(t(x+x_0)) = e^{i2\pi ux} TF(t)$$

Donc Une translation ne change pas la figure de diffraction (car on est sensible à l'intensité)

Produit de convolution Avec cette propriété on peut facilement prévoir la figure de diffraction de motifs répétés (application bifente?) :

$$TF(f * g) = TF(f) \times TF(g)$$

Changement d'échelle : Déjà fait

$$TF(at)(u) = \frac{1}{|a|} TF(t)(u/a)$$

2.3 Résolution en optique : critère de Rayleigh

Limite de diffraction : Dans tout appareil optique (microscope, lunette astronomique, télescope, ...), il y a une ouverture de taille finie, que l'on va modéliser par une diaphragme d'ouverture, qui peut par exemple être la monture d'une lentille de microscope. Or cela signifie qu'il y a diffraction.

Tache d'Airy : Une lentille d'ouverture circulaire forme à partir d'un objet ponctuel une tache d'Airy. La tache d'Airy étant représentée mathématiquement par une fonction de Bessel, la taille angulaire de la tache d'Airy correspond au premier zéro de la fonction de Bessel. C'est comme la fente diffractante, sauf qu'il y a un préfacteur 1.22 dû à la géométrie circulaire :

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Le pouvoir de résolution d'un instrument d'optique est sa capacité à différencier deux objets ponctuels. On définit la résolution angulaire $\delta\theta$ comme la séparation angulaire minimale entre deux sources ponctuelles que l'instrument peut différencier. La diffraction constitue une limite théorique de diffraction.

Code Rayleigh

Conséquence : course aux grands diamètres Ce phénomène est notamment à l'oeuvre en astronomie, et fait qu'on ne peut pas toujours séparer les étoiles binaires. C'est aussi pour ça qu'on a construit des télescopes avec des GROS miroirs (par exemple le radio télescope d'Arecibo et ses 305 m de diamètre, ou ALMA qui peut atteindre un diamètre équivalent de 16 km).

Application : DVD vs Blu-ray Le blue ray utilise un laser bleu, de longueur d'onde 430 à 450 nm donc deux fois plus courte que pour un DVD (625 à 740 nm). On peut donc stocker 4 fois plus de données sur un blu-ray : 25Go contre 4.7 Go.

3 Application : Filtrage

3.1 Filtrage de Fourier

On sait où est positionnée la transformée de Fourier. En la tronquant, on peut enlever des fréquences et donc faire du filtrage.

Montrer expérimentalement dans le cas d'un objet quadrillé ou tramé. avec un montage 4f

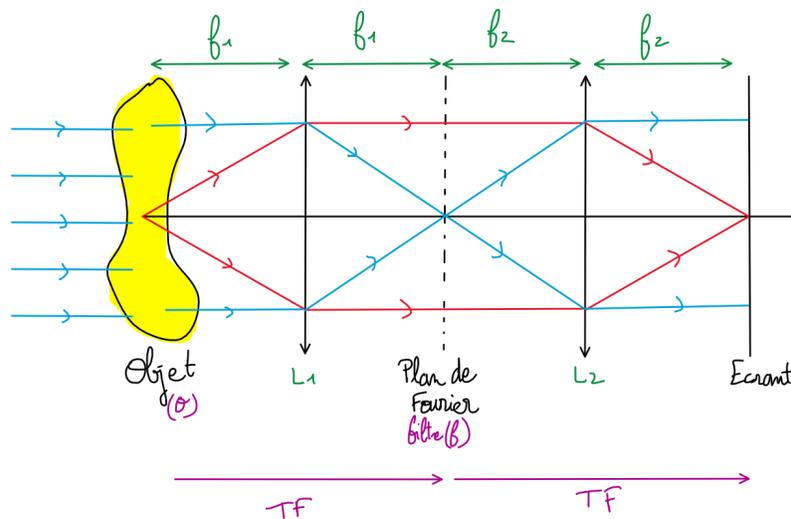


FIGURE 8 – Montage 4f

- L'objet est éclairé en lumière parallèle. Dans ces conditions, la TF de l'objet est au plan focal de la lentille 1
- Au plan de Fourier (avant de traverser) l'objet, on a donc une amplitude : $TF(\text{objet})$

- On place un objet au plan de fourier. On à donc en sortie de cette objet l'amplitude : $TF(\text{objet}) \times t_{\text{filtre}}$
- On applique le même théorème et on trouve donc sur l'écran (au foyer de la lentille 2) la transformé de fourier de cette amplitude : $TF(TF(\text{objet}) \times t_{\text{filtre}})$
- On remarque que c'est l'image géométrique de l'objet si il n'y a rien dans le plan de fourier. Et c'est cohérent :

$$TF(TF(f(x))) = f(-x)$$

Ce qui correspond à l'objet inversé.

Si on ajoute un objet dans le plan de Fourier, on agit directement sur la transformé de fourier. On fait du filtrage spatiale.

Application : épurateur de faisceau! (élargit le faisceau, le rend moins divergent et la tavelure lié aux irrégularités des surfaces des miroirs, des lentilles...)

3.2 Imagerie par contraste de phase

On a utiliser jusqu'à présent des objet dont la fonction de transparence était toujours réel. Mais on peut également mettre des objets qui modifient la phase.

Prix nobel Zernike 1953 (microscope réalisé en 1934) Hetch page 635 Un objet peut être « vu » parce qu'il se distingue de son environnement, par sa couleur, sa teinte ou par une absence de couleur, qui contraste avec le milieu. On appelle ce genre de structure un objet d'amplitude, parce qu'elle est observable grâce aux variations qu'elle provoque dans l'amplitude de l'onde lumineuse. L'onde réfléchié ou transmise par un tel objet devient modulée en amplitude par ce processus. En revanche, il est souvent désirable de « voir » des objets de phase, c'est-à-dire, des objets transparents qui, pour cette raison, ne produisent quasiment aucun contraste avec leur environnement et n'altèrent que la phase de l'onde détectée. Puisque l'oeil ne peut pas détecter les variations de phase, de tels objets sont invisibles. C'est ce problème qui a poussé les biologistes à développer des techniques pour permettre de voir des spécimens microscopiques transparents en convertissant ainsi des objets de phase en objets d'amplitude.

Idée :

- $I = I_0|t|^2 = I_0$ si l'objet déphase uniquement et faiblement
- $t(x, y) = e^{i\phi(x, y)} \simeq 1 + \phi(x, y)$
- Cette objet et éclairé, on observe à l'infini sa transformée de fourier dans le plan de fourier : l'amplitude est alors $A = TF(t) = \delta(u, v) + iTF(\phi)(u, v)$
- Au plan de Fourier, on met un lame de verre parallèle tel que le centre est plus épais (ou plus fin) de sorte de déphaser les le centre uniquement l'amplitude : $A = i\delta(u, v) + iTF(\phi)(u, v)$
- Dans le plan image, on a alors l'amplitude : $A = i + i(-x, -y)$, donc une intensité $I = AA^* \simeq I_0(1 + 2\phi)$ On a alors transformé une information sur la phase en amplitude
- On peut toutefois augmenter la sensibilité en rendant la lame de phase absorbante. Supposons qu'elle réduise l'intensité de la lumière directe par un facteur β , on a alors : $I = I_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \phi \right)^2 \simeq \frac{I_0}{\beta} (1 + 2\phi\sqrt{\beta})$ on a donc augmenter le contraste d'un facteur $\sqrt{\beta}$

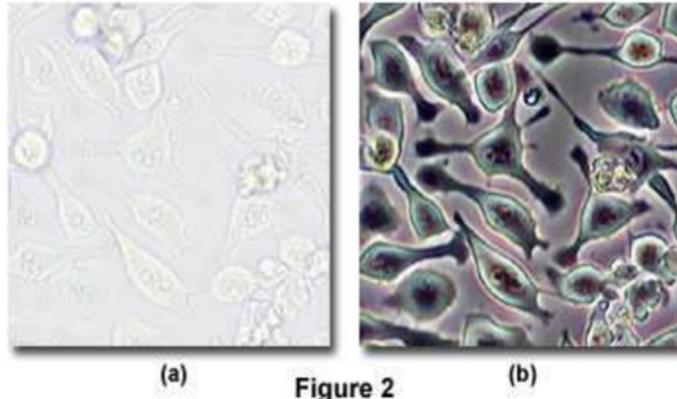
Anneaux En pratique, on utilise des anneaux Pour cela, on crée un faisceau d'illumination en forme de cône avec un diaphragme en anneau derrière le condenseur. La lame de retard est alors en forme d'anneau, disposé pour coincider avec un section transverse du cône. La lumière diffusée, donc déviée hors du cône ne traverse pas l'anneau à retard donc n'est pas affecté par un déphasage

Conclusion

Le message est que la diffraction est bien décrite par le principe de Huygens-Fresnel. Dans les conditions de-Fraunhofer, la figure de diffraction est la transformée de Fourier de la transparence.

Les applications en terme de filtrage optique sont nombreuses. On peut aussi citer la diffraction des rayons X pour sonder les solides cristallins, ou la diffraction des électrons qui valide la dualité ondes-corpuscules.

Living Cells in Brightfield and Phase Contrast



(a) Microscopie classique

Figure 2

(b) Microscopie à contraste de phase

FIGURE 9 – *Contraste de phase*

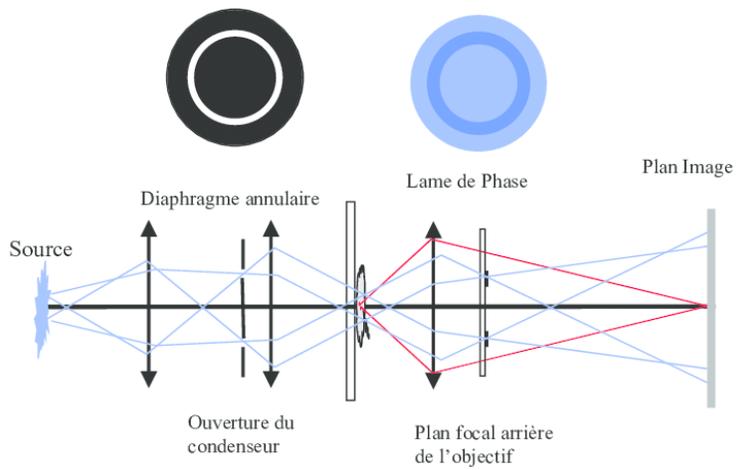


FIGURE 10 – *Contraste de phase*