

DIFFRACTION PAR DES STRUCTURES PÉRIODIQUES

Niveau

Commentaires du jury

- 2017 : Il faut traiter de diffraction par des structures périodiques et pas seulement d'interférences à N ondes.
- 2015 : Il est important de bien mettre en évidence les différentes longueurs caractéristiques en jeu.
- 2012, 2013, 2014 : Cette leçon donne souvent l'occasion de présenter les travaux de Bragg ; malheureusement, les ordres de grandeur dans différents domaines ne sont pas toujours maîtrisés.
- 2009, 2010 : La notion de facteur de forme peut être introduite sur un exemple simple. L'influence du nombre d'éléments diffractants doit être discutée.
- 2008 : Diffraction par des structures périodiques dans différents domaines spectraux.
- 2007 : Le jury souhaite que la diffraction d'ondes autres que les ondes électromagnétiques soit envisagée. C'est pourquoi l'intitulé 2008 précise dans différents domaines de la physique.
- 2005 : On peut admettre que l'expression mathématique du principe de Huygens-Fresnel est acquise, ainsi que son application au cas d'une ouverture unique, plus particulièrement d'une fente fine.
- 2004 : Il faut veiller au bon équilibre de l'exposé : il est inutile de faire l'étude de la diffraction de Fraunhofer qui doit être supposée connue et il est souhaitable de consacrer plus de cinq minutes à l'étude de la diffraction des rayons X par les cristaux par exemple.
- 2003 : La leçon ne peut pas se limiter à une étude du réseau plan en optique. Il faut donc pouvoir dégager les idées importantes assez rapidement pour pouvoir passer à l'étude d'autres domaines.
- 2002 : Cette leçon doit être illustrée expérimentalement de manière efficace. Le pouvoir de résolution d'un réseau est toujours présenté, mais la détermination de son expression théorique pose systématiquement des problèmes aux candidats.

Bibliographie

—

pré-requis

Expériences

- animation geogebra
- Diffraction geogebra
- Ondes sonore
- Une autre anim sur le réseau
- Anim avec le doublet du sodium et la séparation.

Table des matières

1	Structure de l'onde diffracté : Le cas du réseau	2
1.1	Cadre et premier résultat	2
1.2	Diffraction et transformé de fourier	3
1.3	Facteur de forme et de structure	3

2	Application du réseau	4
2.1	Spectromètre à réseau	4
2.2	Réseau blazé	6
3	Diffraction cristalline	7
3.1	Idée	7
3.2	Réseau de Bravais	7
3.3	Conditions d'interférences	8
3.4	Expérience	9

Introduction

Cette leçon fait suite au cours sur les interférences à deux ondes et à la diffraction de Fraunhofer

On observe sur un CD des irisations, on sépare la lumière. Video

ODG : L'ensemble de ces sillons de largeur d'ordre du demi-micron forme un réseau de diffraction. C'est à dire une structure périodique qui diffracte la lumière.

On en voit donc dans la vie courante.

Montrer la diffraction par un réseau en lumière monochromatique

Observation : Une structure périodique qui diffracte peut séparer la lumière blanche et dans le cas d'une lumière monochromatique induit une figure périodique à l'écran.

C'est ce que nous allons essayer de comprendre et d'appliquer dans des exemples concrets.

Remarque : on considère dans toute la leçon que tout est gentil et cohérent spatialement

1 Structure de l'onde diffracté : Le cas du réseau

1.1 Cadre et premier résultat

Un réseau plan unidimensionnel est un objet diffractant dont la transmittance t (rapport du champ en n_0 sur le champ en 0) est une fonction périodique. On distingue plusieurs types de réseaux : les réseaux par transmission ou réflexion ainsi que les réseaux de phase et/ou d'amplitude. Ici nous nous intéresserons aux réseaux d'amplitude par transmission.

Grandeur pertinentes :

- Pas du réseau $a \simeq 1 \text{ à } 10 \mu m$
- Longueur éclairée du réseau $L \simeq 2 cm$
- Nombre de fentes éclairées : $N = 10 \text{ à } 10000$
- Nombre de traits par millimètre : $n = 1/a$

On a N ondes qui passent par des trous différents, on peut utiliser la notion d'interférences : La différence de marche entre deux rayons successifs est : $\delta_{tot} = \delta - \delta' = a(\sin(\theta') - \sin(\theta))$ La conditions d'interférences constructives (de Bragg) est que :

$$a(\sin(\theta') - \sin(\theta)) = p\lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \quad \text{ou en vectoriel } \vec{a}(\vec{k}' - \vec{k}) = 1\pi p$$

Animation.

Dans le cas d'une incidence normale, on a : $a \sin(\theta') = p\lambda$ donc comme $\sin(\theta)$ est borné, il en va de même pour p . **ODG :** avec $\lambda = 500 \text{ nm}$ (en gros le spectre visible) et $n = 500 \text{ traits/mm}$, on obtient $|p| < 4$.

On fait alors le lien entre le pas du réseau et le nombre de tache que l'on va avoir ainsi que leurs distance. Mais on observe que la tache centrale est plus lumineuse et que les autres... comment l'expliquer ?

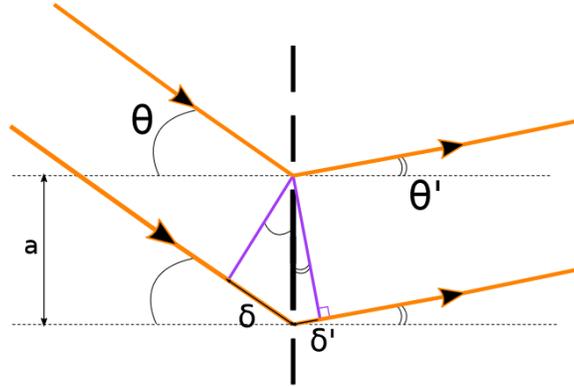


FIGURE 1 – Cadre

1.2 Diffraction et transformé de fourier

Rappel : On a vu la Diffraction de Fraunhofer : Dans le cadre du modèle scalaire de la Lumière, avec un écalirage monochromatique le principe de Huygens fresnel, nous dit : *Chaque point M d'une surface atteinte par la lumière se comporte comme une source secondaire émettant une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde incidente en M. Les ondes des issues des différentes sources sont cohérentes et interfèrent entre elles.*

Nous avons traduit cela de manière mathématique. Ce qui en est sorti c'est qu'observer la figure de diffraction d'un objet de fonction de transparence $t(x, y)$ loin (c'est à dire tel que $\mathcal{F} = \frac{a^2}{\lambda d} \ll 1$) revient à observer sa transformé de fourier.

$$U(\vec{k}) = K \iint_{-\infty}^{\infty} t(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0)\vec{r}} dXdY = K\mathcal{TF}[t(\vec{r})](\Delta\vec{k})$$

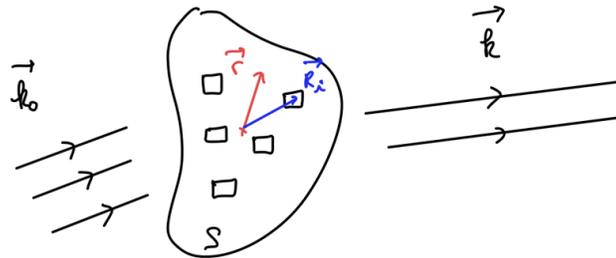


FIGURE 2 – Notation (Schéma de Pascal Wang) à reproduire au tableau

En pratique on observe loin, ou au foyer d'une lentille.

On remarque qu'ici, on n'a pas précisé la forme de $t(\vec{r})$. En fait on a déjà tout fait !! On va pouvoir utiliser les propriétés de la transformé de Fourier.

1.3 Facteur de forme et de structure

Armé de tout cela on peut déterminer complètement le réseau :

$$t(\vec{r}) = \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i) * t_{\text{motif}} = \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i) * t_{\text{Porte}}$$

On en déduit que loin de la source on a :

$$\begin{aligned}
 U &= K \times TF\left(\sum_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i) * t_{\text{motif}}\right) \\
 &= K \times TF\left(\underbrace{\sum_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i)}_{\text{Facteur de structure}}\right) \times \underbrace{TF(t_{\text{motif}})}_{\text{Facteur de forme}}
 \end{aligned}$$

Ca c'est général. On peut l'appliquer au réseau :

— **Facteur de Structure** S . Il donne la répartition dans l'espace des pics d'intensité :

$$TF\left(\sum_i^N \delta(\vec{r} - \vec{R}_i)\right) = \sum_j^N e^{-i\Delta\vec{k}\vec{R}_j} \quad (1)$$

$$= \sum_j^N e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}ja(\sin(\theta') - \sin(\theta))} \quad (2)$$

$$= \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}} e^{i\phi} \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin(\theta') - \sin(\theta)) \quad (3)$$

$$= e^{i\phi\frac{N+1}{2}} \frac{\sin(\phi N/2)}{\sin(\phi/2)} \quad (4)$$

— **Facteur de Forme** F Diffraction par une fente (pré-requis) :

$$F(\theta) = \text{sinc}\left(k(\sin(\theta') - \sin(\theta))\frac{e}{2}\right)$$

On en déduit :

$$I = UU^* = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi e}{\lambda}(\sin(\theta') - \sin(\theta))\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi Na}{\lambda}(\sin(\theta') - \sin(\theta))\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\sin(\theta') - \sin(\theta))\right)}\right)^2$$

On peut ne pas écrire toute la formule et plutôt écrire :

$$I = I_0 |TF(t_{\text{motif}})|^2 \left(\frac{\sin(\phi N/2)}{\sin(\phi/2)}\right)^2$$

Et on dessine la forme de chaque partie au tableau et on illustre avec : Geogebra

Il y a trois longueurs caractéristique :

- La pas du réseau qui se retrouve dans la périodicité des pics. On retrouve la condition de Bragg ici !!
- la largeur du faisceau incident qui se retrouve dans la largeur de chaque pic (cf le PR)
- la taille d'une fente (d'un trait du reseau) qui se retrouve dans la largeur de l'enveloppe en sinus cardinal

2 Application du réseau

2.1 Spectromètre à réseau

La condition de Bragg montre une dépendance de l'angle diffracté en fonction de la longueur d'onde. On peut donc se servir d'un réseau pour disperser la lumière! C'est le principe d'un spectromètre à réseau.

Description :

Le spectromètre à réseau en réflexion est constitué d'une fente d'entrée (a), puis d'un miroir de collimation (b) dont le rôle est de former un faisceau parallèle jusqu'au réseau blazé (c). La lumière est réfléchiée et dispersée sur le réseau, puis rencontre un autre miroir, le miroir de chambre (d) qui refocalise les rayons lumineux sur le détecteur.

Dispersion : le rôle du réseau est de disperser la lumière, comme le prisme. Notons toutefois que :

- Un prisme ne disperse "qu'une fois" la lumière, tandis que le réseau a des ordres de diffraction.
- La diffraction par le réseau disperse plus les grandes longueurs d'onde ($\sin \theta_p - \sin \theta_0 = \frac{p\lambda}{a}$). Pour le prisme, c'est l'inverse (formule de Cauchy pour l'indice : $n(\lambda) = n_0 + B/\lambda^2$).

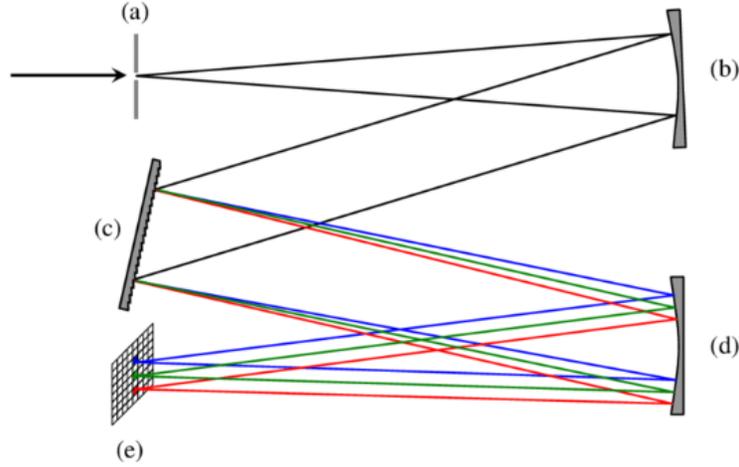


FIGURE 3 – Schéma de principe d'un spectromètre à réseau.

Pour quantifier la dispersion du réseau, on utilise le pouvoir de dispersion : $D = \frac{d\theta'}{d\lambda}$. D décrit à quel point les longueurs d'ondes sont écartées en terme d'angles. On différencie la formule de Bragg pour arriver à :

$$D = \frac{p}{a \cos \theta'}$$

Aux petites angles, $\cos \theta' \approx 1$, donc le pouvoir de dispersion est constant de valeur p/a . La déviation entre 2 raies est proportionnelle à la différence de longueur d'onde entre eux. On parle de spectre normal.

D augmente aussi lorsque l'ordre augmente, et lorsque le nombre de traits par mm du réseau augmente (ou que le pas diminue).

Pouvoir de résolution : il s'agit de déterminer si l'on peut séparer 2 pics à 2 longueurs d'onde différentes. On considère que 2 pics de diffraction sont distinguables quand le maximum de l'un coïncide avec la première annulation de l'autre (faire un dessin). C'est le critère de Rayleigh. On définit alors le pouvoir de résolution comme :

$$PR = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

où $\delta\lambda$ est le plus petit écart en longueur d'onde à λ qui donne un pic séparé.

On regarde la position d'un maximum d'ordre p : elle est donnée par la condition de Bragg : $\sin \theta'_p = \sin \theta + p \frac{\lambda}{a}$.

Pour trouver la première annulation, il faut regarder la formule de l'intensité : celle-ci s'annule lorsque :

$$\phi = 2\pi p \pm \frac{2\pi}{N}$$

Cela donne lieu à l'angle de sortie $\theta' = \theta'_p + \delta\theta'$ tel que :

$$\phi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin(\theta'_p + \delta\theta') - \sin \theta)$$

On a donc

$$\sin(\theta'_p + \delta\theta') - \sin \theta'_p = \frac{\lambda}{Na}$$

On cherche la longueur d'onde $\lambda + \delta\lambda$ qui a son maximum à l'ordre p à l'angle $\theta'_p + \delta\theta'$ (c'est à dire, la longueur d'onde donnant un maximum à l'endroit où λ donne un pic qui s'annule) : par la formule des réseaux,

$$\sin(\theta'_p + \delta\theta') = \sin \theta + \frac{p}{a}(\lambda + \delta\lambda)$$

On égalise les $\sin(\theta'_p + \delta\theta')$:

$$\begin{aligned}
\sin \theta + \frac{p}{a}(\lambda + \delta\lambda) &= \frac{\lambda}{Na} + \sin \theta'_p \\
&= \frac{\lambda}{Na} + \sin \theta + p\frac{\lambda}{a} \\
\implies \frac{p}{a}\delta\lambda &= \frac{\lambda}{Na} \\
\implies PR &= \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Np
\end{aligned}$$

Si on introduit la largeur L de la tâche lumineuse sur le réseau, on a $N = n \times L = L/a$ où n est le nombre de traits par mm du réseau. Alors $PR = \frac{pL}{a}$

Autre méthode :

- La première annulation autour de l'ordre p a lieu pour : $\phi = 2\pi p + 2\pi/N$ (faire un dessin)
- Avec la relation de Bragg, en différenciant logarithmiquement on trouve :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta\phi}{\phi}$$

Car tous les autres paramètres sont fixes

- On en déduit :

$$PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\phi}{\Delta\phi} = \frac{2p\pi}{\frac{2\pi}{N}} = Np = \frac{pL}{a}$$

ODG : On considère l'ordre $p = 1$, une tâche de 20 mm de diamètre et un réseau à 500 traits/mm. Alors $N = 10^4$ et $PR = 10^4$. Est-ce suffisant pour séparer le doublet du sodium ? On a $\lambda = 589.3$ nm (la moyenne des 2), donc $\delta\lambda = \lambda/PR = 6 \times 10^{-11}$ m = 0.06 nm, ce qui est suffisant pour distinguer les 2 raies.

On voit avec la formule qu'il peut arriver qu'on ne distingue pas 2 raies à l'ordre 1, mais qu'on les distingue à des ordres supérieurs.

On a aussi négligé la diffraction sur la fente d'entrée : cette limitation est théorique.

Limitations pratiques :

- Des ordres trop hauts mènent à un recouvrement des spectres aux différents ordres. En fait, ça peut arriver dès l'ordre 3.
- La majorité de la luminosité va dans l'ordre 0, qui ne sépare rien du tout.

L'utilisation d'un réseau blazé permet d'éviter la dispersion de la lumière sur plusieurs ordres (et notamment le pic de luminosité pas intéressant à l'ordre 0) et augmente la sensibilité du spectromètre par rapport à un spectromètre qui fonctionnerait avec un réseau "classique".

2.2 Réseau blazé

Encore une anim pas piqué des hannetons : Ici.

On est dans le même ca que tout à le même cas que précédement :

$$I = I_0 |TF(t_{\text{motif}})|^2 \left(\frac{\sin(\phi N/2)}{\sin(\phi/2)} \right)^2$$

Mais ce qui change ici c'est la transformé de Fourier du motif. On fait déjà assez de calcul donc un raisonnement avec les mains suffit : La fonction de transparence est la même que si c'était un trou mais avec un déphasage. Ce déphasage est donné par la différence de marche entre 2 rayons frappant au centre du miroir et au bord du miroir (de largeur projetée selon x égale à e) : $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\alpha x$. Or on sait qu'un déphasage se répercute en TF comme une translation :

$$TF(f(x) \times e^{ik_0 x})(k) = TF(f)(k - k_0)$$

Le calcul exact est :

$$TF(t) = \int_{-e/2}^{e/2} e^{\frac{2i\pi}{\lambda}(n-1)\alpha x} e^{-ikx} dx = e \operatorname{sinc} \left(\left(k - \frac{(n-1)\pi\alpha}{\lambda} \right) e \right)$$

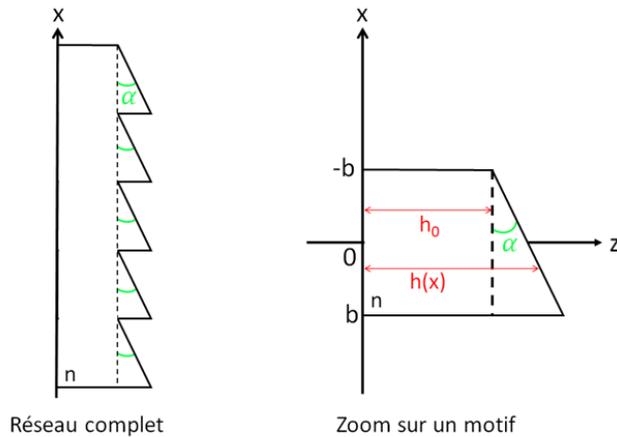


FIGURE 4 – Réseau blazé

On translate donc, par exemple sur l'ordre 1. Faire un dessin de la figure de diffraction par un réseau, puis rajouter la figure de diffraction du réseau blazé.

Calcul pour trouver le bon α : on veut superposer les max de \hat{t} et de la fonction réseau : le max de la fonction réseau en incidence normale arrive pour $k = \frac{2\pi}{e}$; le max de \hat{t} arrive pour $k = \frac{(n-1)\pi\alpha}{\lambda}$.

On remet tout ca ensemble pour obtenir : $\alpha = \frac{\lambda}{(n-1)e}$. Pour un réseau en verre $n \approx 1.5$, à 600 traits/mm et $\lambda = 500\text{nm}$, $\alpha \approx 0.6 \text{ rad} = 34 \text{ degrés}$.

3 Diffraction cristalline

3.1 Idée

L'idée est maintenant d'étudier une figure de diffraction en connaissant parfaitement la lumière incidente, afin d'obtenir des informations sur le réseau diffractant. C'est un moyen utilisé pour sonder la matière cristalline !

En ordre de grandeur, la distance inter-atomique dans un cristal est de 1 Å (angstrom), il faut donc choisir une onde incidente qui vérifie $\lambda < 1\text{Å}$, donc des rayons X ! On peut aussi utiliser la dualité onde-particule en envoyant un faisceau d'électrons accélérés par une tension U , leur longueur d'onde est donc $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2em_eU}}$ **ODG** $U = 150 \text{ eV}$ pour $\lambda = 1\text{Å}$.

Attention, deux critères sont à prendre en compte : la nécessité de voir au moins un ordre non nul impose une longueur d'onde plus petite (ou égale) que le pas du réseau (en l'occurrence la distance interatomique), d'où les rayons X). Il faut aussi que les effets de la diffraction se manifestent suffisamment, c'est-à-dire que l'angle de diffraction ne soit pas trop petit, ce qui nécessite une longueur d'onde qui ne soit pas trop petite devant ce même pas. De plus, on veut éviter, en cristallographie, de sonder la structure du noyau (néanmoins, la structure interne de la cellule élémentaire du réseau peut être d'intérêt). La longueur d'onde doit en fin de compte avoir l'ordre de grandeur de la taille des noyaux, de manière à ne pas sonder leur structure interne, mais à sonder tout ce qui est plus grand.

Pour un rayonnement EM, cela correspond aux rayons X. Ils sont produits par synchrotron (Grenoble) en accélérant des électrons sur une cible métallique, ce qui les ralentit et donc provoque un rayonnement (dû à la décélération, c'est le Brehmstrahlung). Le spectre produit est large. Les rayons X interagissent avec les électrons car ils sont plus légers que les noyaux (Hamiltonien d'interaction en $1/m$) **ODG** : 10 keV pour $\lambda = 0.1\text{Å}$

On peut aussi utiliser des neutrons...

3.2 Réseau de Bravais

On a une structure périodique dans l'espace. On définit un **réseau de bravais** avec une base de l'espace qui permet d'atteindre tous les motifs (pouvant être plus complexes) avec des coordonnées entières. $\vec{\mathbf{R}} = n_1\vec{\mathbf{a}}_1 + n_2\vec{\mathbf{a}}_2 + n_3\vec{\mathbf{a}}_3$

On définit le **réseau réciproque** telle que tout point $\vec{\mathbf{G}}$ dans ce réseau réciproque soit tel que : $e^{i\vec{\mathbf{G}}\vec{\mathbf{R}}} = 1$, on décrit alors un point du réseau réciproque par $\vec{\mathbf{G}} = m_1\vec{\mathbf{b}}_1 + m_2\vec{\mathbf{b}}_2 + m_3\vec{\mathbf{b}}_3$. On a donc : $\vec{\mathbf{a}}_i\vec{\mathbf{b}}_j = \delta_{i,j}$

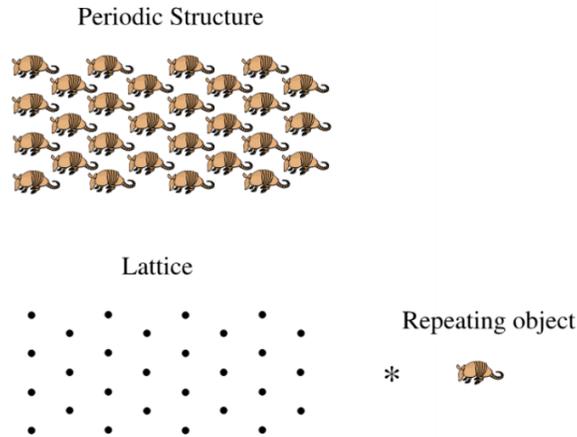


FIGURE 5 – *Simon Steven*

\vec{G} nous permet de caractériser des plans réticulaire (plan équidistant qui contiennent tous les points du réseaux). En effet si \vec{G} est de norme minimal $|\vec{G}| = 2\pi/a$ alors $\vec{G} = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3$ avec h k et l les indices de Miller

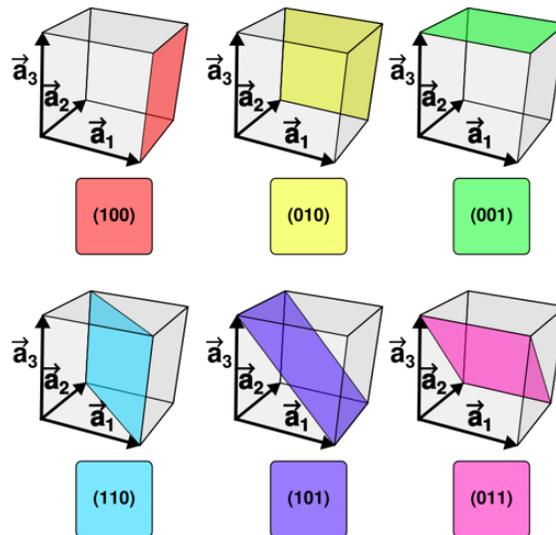


FIGURE 6 – *Plan réticulaire*

L'approche de la matière condensé me semble compliquée dans le temps impari... (utilise la règle d'or de Fermi)

3.3 Conditions d'interférences

Bragg (PN 1915) suppose en 1913 que la lumière incidente se réfléchit sur les plans réticulaires. La différence de marche entre deux faisceaux issus de réflexions sur des plans successifs (on a ici un réseau par réflexion mais on continuera à noter a la distance entre deux plans) s'écrit : $\delta = 2a \sin(\theta)$ C'est la même formule qu'avant mais avec $\theta' = -\theta$

On a donc interférence constructive pour :

$$n\lambda = 2a \sin(\theta)$$

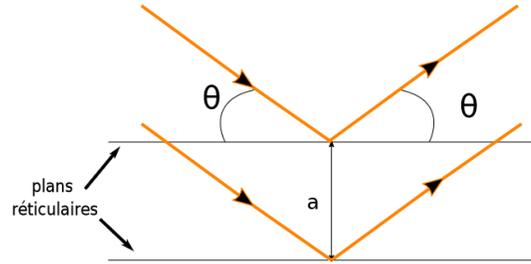


FIGURE 7 – Bragg

Cette formule est équivalente à celle trouvée par Von Laue (prix nobel 1914) :

$$\vec{k}_0 - \vec{k} = \vec{G} \in \text{réseau réciproque}$$

Cela provient de la règle d'or de fermi (wiki) qui dit que la diffusion s'écrit comme un terme rendant compte du couplage entre l'onde et le potentiel du milieu et d'un terme de collision élastique. Le facteur d'interaction correspond à la TF du potentiel, or il est périodique.. On retrouve tout ce qu'on a fait depuis le début.

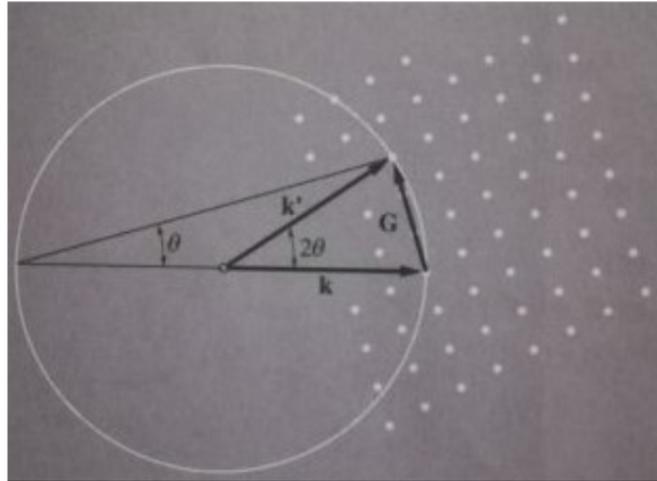


FIGURE 8 – Van laue : utilisation de la sphère d'Ewald pas à présenté mais ca sera surement abordé dans les questions

3.4 Expérience

Fair l'expérience de la diffraction des electrons... Voir montage mesure de longueur

Conclusion

Nous avons vu que La diffraction par des structures périodique était très bien décrite par la diffraction. On remarque que les interférences à N ondes sont "comprise" dans la diffraction. Ainsi on peut toujours séparé facteur de forme et de structure. Ceci nous permet tanto d'obtenir des informations sur les sources et tanto des informations sur la matière.

Autre phénomène lié à la diffraction : Devant le temple maya de Chichen Itza, un curieux phénomène a lieu : Vidéo. On dit que ce bruit imite le cri du quetzal, oiseau sacré pour les mayas.

Il est possible d'interpréter ce phénomène avec un modèle de diffraction des ondes sonores. Article de vulgarisation