

---

# EFFET TUNNEL

---

## Niveau

### Commentaires du jury

- 2017 : Cette leçon est une leçon de physique et ne doit donc pas se limiter à des calculs.
- 2015 : Trop de candidats pensent que l'effet tunnel est spécifique à la physique quantique.
- 2011-2014 : Dans le traitement de l'effet tunnel, les candidats perdent souvent trop de temps dans les calculs. Le jury invite les candidats à réfléchir à une présentation à la fois complète et concise sans oublier les commentaires physiques relatifs à la dérivation de la probabilité de transmission. Certains candidats choisissent d'aborder le cas de la désintégration alpha mais ne détaillent malheureusement pas le lien entre la probabilité de traversée d'une barrière et la durée de demi-vie de l'élément considéré. La justification des conditions aux limites est essentielle! Le microscope à effet tunnel peut être un bon exemple d'application s'il est analysé avec soin (hauteur de la barrière, origine de la résolution transverse, . . .).
- 2008 : Une justification physique des conditions aux limites adoptées est attendue.

### Bibliographie

- BUP
- Tout quantique

### pré-requis

- Effet de peau
- Equation de Schrödinger
- Fonction d'onde
- Courant de probabilité

### Expériences

—

### Table des matières

|   |          |
|---|----------|
| <b>1 Principe de l'effet tunnel</b>                                 | <b>2</b> |
| 1.1 Barrière de potentiel . . . . .                                 | 2        |
| 1.2 Résolution du problème . . . . .                                | 2        |
| 1.3 Facteur de transmission (on notera l'ironie du terme) . . . . . | 4        |
| <b>2 Microscope à effet tunnel</b>                                  | <b>5</b> |
| 2.1 Principe de fonctionnement . . . . .                            | 5        |
| 2.2 Sélectivité et limite . . . . .                                 | 8        |
| 2.2.1 Résolution verticale . . . . .                                | 8        |
| 2.2.2 Résolution latérale . . . . .                                 | 8        |

|  |          |
|--|----------|
| <b>3 Bonus : Radioactivité <math>\alpha</math></b> | <b>8</b> |
| 3.1 Rappels . . . . .                              | 8        |
| 3.2 Modèle de Gamov . . . . .                      | 9        |
| 3.3 Loi de désintégration exponentielle . . . . .  | 10       |

## Introduction

Quand un objet fonce dans un mur, s'il n'a pas assez d'énergie pour casser ce mur, alors il ne le traverse pas (n'en déplaie à Harry Potter). Dans le cas d'une onde cela peut être plus subtil. En effet si une onde est réfléchié à la surface d'une objet, nous avons vue le le chapitre sur les ondes qu'il existait sur une certaine distance  $\delta$ , dans le milieu où l'onde ne peut pas propager une onde évanescence. Mais que ce passe t'il si sur une distance plus courte que  $\delta$  on place un autre milieu qui permet la propagation du l'onde. Alors, l'onde arrive a traverser le milieu qui lui est pourtant interdit. C'est l'effet **Tunnel**.

Effet tunnel avec des ondes centrimétrique

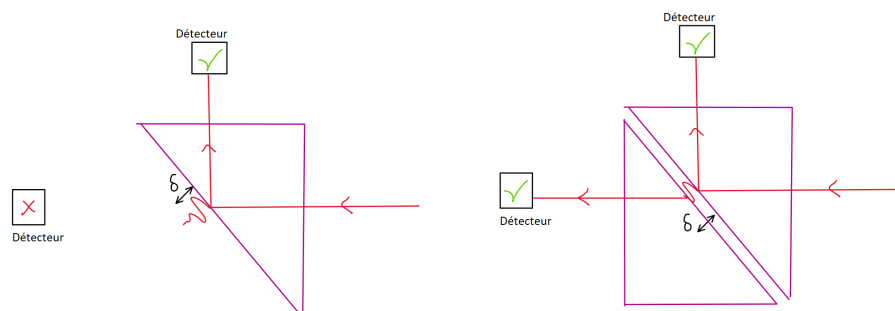


FIGURE 1 – Schéma de l'expérience

Un des grand résultats de la mécanique quantique est la dualité onde corpuscule. Aussi, cette effet tunnel va prendre tout sont ampleur avec la possibilité de faire traverser à des particules des potentiels qu'elle ne peuvent a priori pas (classiquement) traverser.

Ceci est le principe du microscope a effet tunnel qui est un des microscope permettant de dépasser la limite de résolution optique. (mais c'est pas un microscope optique)

## 1 Principe de l'effet tunnel

### 1.1 Barrière de potentiel

Description mathématique de la barrière figure 2 :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -a/2 & \text{(région I)} \\ V_0 & \text{pour } x \in [-a/2, a/2] & \text{(région II)} \\ 0 & \text{pour } x > a/2 & \text{(région III)} \end{cases}$$

On se limite au cas  $0 < E < V_0$ , les cas  $E > V_0$  pouvant être interprété classiquement et le cas  $E = 0$  ne présentant aucun intérêt.

On écrit l'équation de Schrödinger 1D :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)$$

### 1.2 Résolution du problème

On considère une particule que l'on décrit par une fonction d'onde. Le potentiel est indépendant du temps, on considère donc une solution à variable séparé

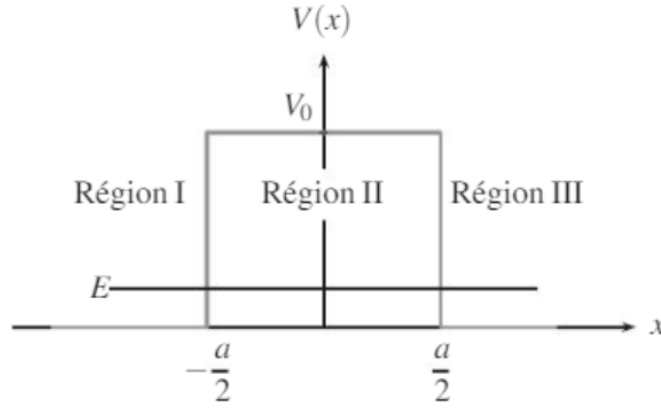


FIGURE 2 – Schéma et notations pour la barrière de potentiel.

$\psi(x, t) = \phi(x)\chi(t)$  En injectant cette forme dans l'équation de Schrodinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

On en déduit que l'on peut séparer le problème en 2 (prérequis) comme on l'a fait pour le puit de potentiel infini :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = E\chi \quad \text{et} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x)$$

On s'intéresse au cas  $0 < E < V_0$  On résout alors dans les trois zones :

— Zone 1 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = E\phi_1(x)$$

On peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k^2 \phi_1 = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

On sait résoudre cette équation :

$$\psi_1 = \underbrace{A_1 e^{i(kx - \omega t)}}_{\text{Propagation x croissant}} + \underbrace{B_1 e^{i(-kx - \omega t)}}_{\text{Propagation x décroissant}}$$

— Zone 2 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V_0 \phi(x) = E\phi(x)$$

On peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - K^2 \phi_1 = 0 \quad \text{avec} \quad K = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

On en déduit

$$\psi_2 = \underbrace{A_2 e^{-Kx - i\omega t} + B_2 e^{Kx - i\omega t}}_{\text{Onde évanescentes}}$$

— Zone 3 : Pareil que la zone 1 :

$$\psi_3 = \underbrace{A_3 e^{i(kx - \omega t)}}_{\text{Propagation x croissant}} + \underbrace{B_3 e^{i(-kx - \omega t)}}_{\text{Propagation x décroissant}}$$

On peut d'hors et déjà remarqué que dans notre système il n'y à rien qui vient de l'infini, aussi on sait que  $B_3 = 0$

### 1.3 Facteur de transmission (on notera l'ironie du terme)

On s'intéresse à la possibilité pour la particule de traverser la barrière. On introduit le coefficient de transmission en amplitude  $\tau = A_3/A_1$ .

**Relation de continuité :** Comment se comporte la fonction d'onde lors d'une variation discontinue de potentiel ? La démo est un peu longue.

On se place dans le cas d'un saut de potentiel de 0 à  $V$  en  $x = 0$ . On intègre l'équation de Schrödinger indépendante du temps entre  $x = -\epsilon$  et  $x = \epsilon$  :

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d^2\phi}{dx^2} dx = \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=\epsilon} - \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=-\epsilon} = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)\phi(x)$$

Toutes les grandeurs sont finies, sauf  $V(x)$  qui peut être infini. Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

— Soit  $V$  est fini et alors l'intégrale tend vers 0, et  $\frac{d\phi}{dx}$  est continue au saut de potentiel.

— Soit  $V$  est infini, et  $\frac{d\phi}{dx}$  est discontinue au saut de potentiel.

Dans tous les cas,  $\phi$  (et donc  $\psi$ ) est continue au saut de potentiel. Ce calcul montre aussi que  $\phi$  est nulle lorsque  $V$  est infini, sinon l'intégrale diverge.

Calcul dans le Perez p. 171 ou le BA devant p. 72, à l'aide des CL :

$$\tau = 4ik \frac{e^{-ikL}}{(K + ik)^2 e^{-Ka} - (K - ik)^2 e^{Ka}}$$

On définit ensuite le coefficient de transmission à l'aide des courants de probabilité :

$$T = \frac{J_i}{J_t} = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2$$

Rappel :

$$J = \text{Re} \left\{ -\frac{i\hbar}{m} \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \psi^* \right) \right\}$$

Ca permet d'arriver à l'expression :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(Ka)}$$

**Remarques :**

—  $T > 0$  : la particule peut passer !

— Pas de perte : on n'a pas fait le calcul mais  $R+T = 1$  (la particule ne disparaît pas).

**Distance caractéristique de pénétration :** c'est la distance carac dans le sinh :  $\delta = \frac{1}{K} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$

**Approximation de la barrière épaisse :**  $a \gg \delta$  donc

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2a/\delta}$$

**Ordres de grandeurs :**

| Particule | $m$ (kg)   | $V_0$ (eV) | $a$ (nm) | $\delta$ (nm)      | $T$         |
|-----------|------------|------------|----------|--------------------|-------------|
| Électron  | $10^{-30}$ | 4          | 0,3      | 0,1                | $10^{-2}$   |
| Électron  | $10^{-30}$ | 40         | 0,3      | $4 \times 10^{-2}$ | $10^{-6}$   |
| Électron  | $10^{-30}$ | 4          | 3        | 0,1                | $10^{-20}$  |
| Proton    | $10^{-27}$ | 4          | 0,3      | $4 \times 10^{-3}$ | $10^{-63}$  |
| Proton    | $10^{-27}$ | 4          | 3        | $2 \times 10^{-3}$ | $10^{-628}$ |

FIGURE 3 – Quelques ordres de grandeur.

**Représentation graphique :**

**Interprétation délicate :** à l'aide de l'inégalité de Heisenberg temps-énergie.

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$

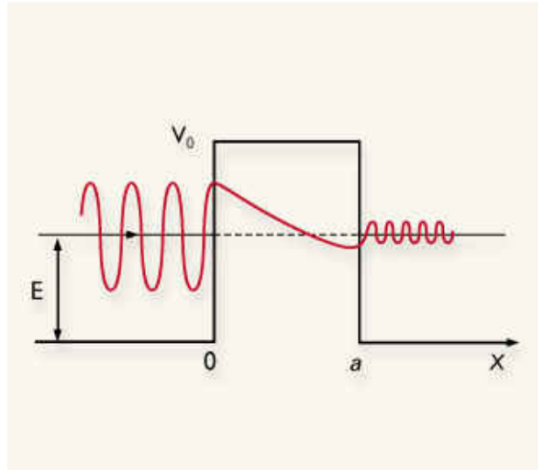


FIGURE 4 – Représentation graphique des ondes de probabilité.

On interprète cela en disant que la particule a une énergie qui fluctue de  $\Delta E$ , pendant un temps caractéristique  $\Delta t$ . Plus  $\Delta E$  est élevé, plus  $\Delta t$  est faible. Cela explique que la particule puisse passer des barrières fines et hautes, ou bien épaisses et basses.

## 2 Microscope à effet tunnel

### 2.1 Principe de fonctionnement

Lien Poly

Sanz PC 864 parrait il mais Scholarvox veux pas!!!

L'intègre MP Salamito page 865

Les microscopies optiques sont limités par la diffraction donc à l'échelle de la longueur d'onde  $\simeq 100nm$ . On cherche à avoir une meilleure résolution. Inventé en 1984 chez IBM (PN 1986), le microscope à effet tunnel (MET) permet d'explorer les propriétés locales des métaux et semi-conducteurs à l'échelle atomique, et de les "visualiser". C'est un type de microscope à sonde locale, comme le microscope à force atomique.

Sa résolution (on va le voir) est  $0.05\text{\AA}$  en vertical,  $1\text{\AA}$  en latéral. On peut résoudre l'échelle atomique.

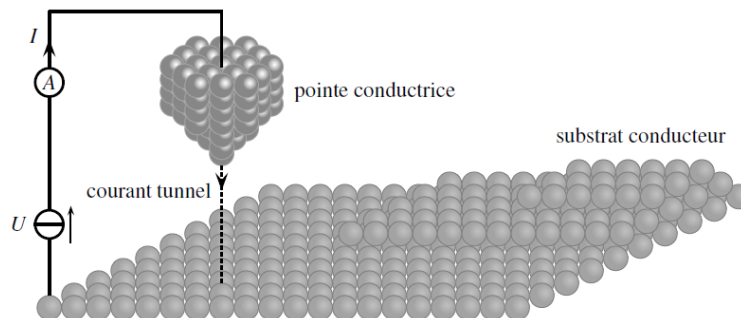
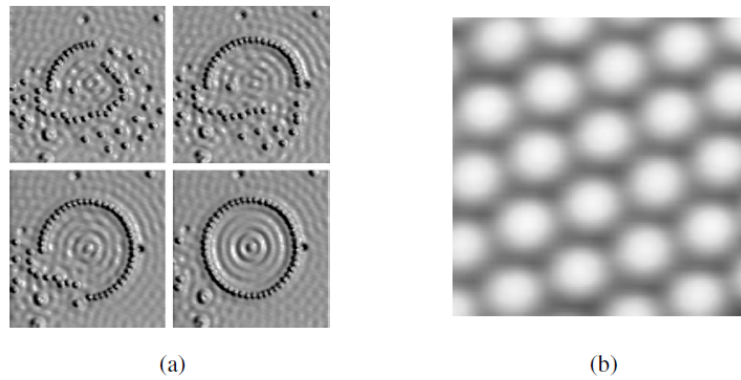


FIGURE 5 – Microscope ( $J$ 'intègre)

Une pointe métallique en tungstène, avec un seul atome au bout, reposant sur 3 atomes, s'approche de la surface métallique à imager. La pointe fait qq angstrom et s'approche à moins de  $50\text{\AA}$ . Lorsqu'on applique une différence de potentiel entre la pointe et la surface métallique, on observe l'apparition d'un courant  $\simeq 1nA$ .

Ici s'il y a un courant c'est parce qu'il y a un transfert d'électrons. Or les électrons dans le métal n'ont pas assez d'énergie pour être envoyé dans la sonde. Il sont donc face à une barrière de potentiel. Le passage d'un électron



**Figure 26.10** – (a) Réalisation d'un enclos d'atomes de fer pour confiner des électrons à la surface d'un échantillon de cuivre (l'image révèle clairement la nature ondulatoire des électrons). Les atomes de fer ont été déplacés par la pointe d'un microscope à effet tunnel. Cette image est une création originale d'IBM Corporation. (b) Visualisation d'atomes de silicium à la surface d'un cristal de carbure de silicium. Image réalisée à l'aide d'un microscope à effet tunnel par G. Baffou (LPPM Orsay).

FIGURE 6 – *Microscope (J'intègre)*

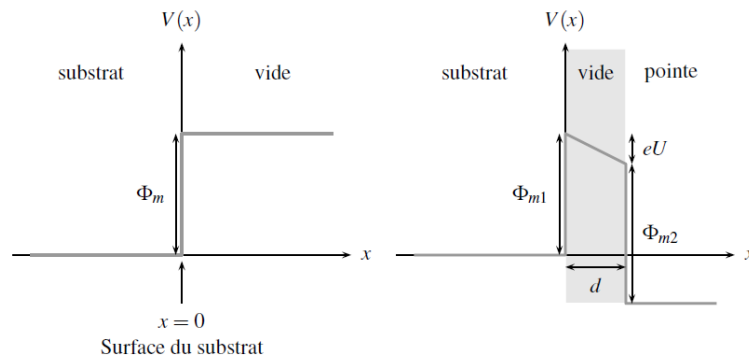


FIGURE 7 – *Barrière de potentiel (J'intègre)* à gauche c'est quand il n'y a pas la sonde, donc les électrons ne peuvent pas s'en aller d'eux même, à droite c'est avec la sonde.

dans le métal à l'extérieur demande de l'énergie. C'est le travail d'extraction  $W \simeq 4eV$ . Le gaz d'électron est alors confiné dans le métal.  $\delta \simeq 6.1 \times 10^{-10}$  m

Si on approche une pointe alors on a un profil de marche comme en première partie. Les électrons peuvent alors transiter d'un coté à l'autre. En pratique on applique une différence de potentielle si bien que la marche de potentiel à plus la forme du schéma. On a une décroissance linéaire de  $eU$ .

Pour trouver la relation il faut généraliser le cas précédent à une barrière plus complexe. Pour cela on apprimes le profil à une barrière constitué de rectangle carré. On fait l'hypothèse qu'il n'y à pas de réflexion multiple. On a alors

$$T(x_i) = T_0 \exp(-2K(x_i)\delta x) \quad \text{avec} \quad K(x_i) = \frac{\sqrt{2m(V(x_i) - E)}}{\hbar}$$

La transmission totale est alors

$$T = \prod_{i=1}^N T(x_i) = T_0 \exp\left(-2\delta x \sum_i K(x_i)\right)$$

On passe à la limite continue :

$$T \propto \exp\left(-2 \int_{x_0}^{x_f} K(x) dx\right)$$

Bon mathématiquement c'est un peu bof (prendre  $\delta < dx <$  longueur de variation de V ...parce qu'on avait fait l'hypothèse d'un puits large... Lebellac page 473/482 le déduit en partant des fonctions d'ondes directement.

Pour le faire plus proprement il faut faire l'approximation BKW (Brillouin-Kramers-Wentzel)

Elle consiste à suppose que a variation du potentiel sur un longueur d'onde est négligeable devant l'énergie cinétique totale, mais ici c'est n'est pas une longueur d'onde mais une longueur de pénétration. Pour le trouver, on reprend Shrodïger dans le cas indépendant du temps et on considère que  $K$  dépend de x. On cherche alors une solution de la forme  $\phi = e^{i\varphi(x)}$ . On injecte dans l'équation et on néglige le terme  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ . On trouve alors

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{K(x)}} \exp\left(\pm i \int^x K(u) du\right)$$

Puis on fait le même raisonnement qu'en partie 1.

On peut en première approximation reprendre notre calcul précédent qui nous donne dans le cas d'une barrière épaisse ( $d \gg 1/K$ ) :

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2a/\delta} \propto e^{-2a/\delta}$$

On a alors

$$I \simeq I_0(U) e^{-2a/\delta}$$

$I_0$  dépend de U, de la densité d'électrons dans le métal (plus basse dans un semi-conducteur). A cause de la différence de potentiel U, les électrons ne peuvent circuler que du substrat vers la pointe : un électron du substrat a une énergie plus basse que le niveau de Fermi du métal et l'effet tunnel conserve l'énergie donc par le principe de Pauli, un électron ne peut passer de la pointe au substrat.

Le courant tunnel décroît exponentiellement avec la distance qui sépare la pointe de l'échantillon. Une variation d'un facteur 2 de la distance entre la pointe et la surface va donc provoquer une variation d'un facteur  $e^2$  c'est-à-dire d'un facteur 7 environ.

Le courant varie de façon sensible lorsque d varie d'une dizaine de picomètres. Cette sensibilité est un atout du microscope à effet tunnel. Encore faut-il contrôler précisément d pour en profiter. Le STM est donc d'une grande sensibilité en courant, ce qui permet d'obtenir la résolution atomique. Il faut cependant rester prudent. Si la résolution est excellente, l'interprétation des images est toutefois plus compliquée que celle des autres microscopies dans lesquelles l'image est une image « topographique » de l'échantillon. Remarque de la leçon de pascal : *Étant basée sur la mécanique quantique, il faut être conscient qu'on accède à la probabilité de présencedes électrons et non à leur place « réelle ». Il faut donc faire attention aux abus de langage employés quotidiennement :on ne « voit » pas les atomes !*

La poite très fine, approche à moins de 1nm du substrat, contrôler les déplacements à moins de 0.01 nm près avec des quartz piézoélectriques (Pierre Curie, tension électrique implique déformationmécanique, effet réversible). il faut éliminer les vibrations parasites (le plus challenging : ils ont essayé de la lévitation supraconductrice, amortissement par courant de Foucault). On peut jouer sur cinq degrés de liberté(I,U,x,y,z). Généralement, on applique U1mVet I1nA. Limite : vibrations, fluctuations du courant ou de la chaîne d'amplification, non uniformité des potentiels.

### Différentes techniques

- Topographie : on maintient  $U$  constant et on asservit pour maintenir  $I$  constant (donc  $d$  constant) en bougeant verticalement. On suit en fait les niveaux isodensité électroniques (ou équipotentielles électriques). Un avantage du MET est qu'il est non destructif (pas de laser). À l'air ou dans l'eau, on peut déterminer des structures biologiques (ADN, virus) sans les tuer. Les topographies sont aussi précieuses dans l'étude des matériaux à structure lamellaire. Elles permettent d'étudier des cinétiques : en faisant plusieurs topographies successives de la même zone et en les comparant, on peut déterminer les sites où des atomes ont été absorbés, désorbés, et ceux où ils ont migré (diffusion de surface) Si cette diffusion est rapide, ces mouvements apparaissent comme un bruit sur la somme des signaux des mesures successives.
- Spectroscopie.  $A(x,y)$  fixé, on enregistre  $I$  en fonction de la distance  $d$  entre la pointe et la surface pour mesurer le travail d'extraction local  $\phi_m$ , ce qui permet d'identifier la nature chimique du substrat. En effet, si la valeur de  $I$  est une fonction linéaire de  $V$ ,  $I$  varie avec  $d$  comme  $\exp(-B\sqrt{\phi_m}d)$  d'où on tire  $\sqrt{\phi_m}$ . Ceci se produit pour  $d$  assez grand (plus de 10 Å et pour  $V$  assez petit. En faisant varier  $X$  et  $Y$ , on peut réaliser une topographie de  $\phi_m$ , regarder ses variations. video

## 2.2 Sélectivité et limite

### 2.2.1 Résolution verticale

Cela correspond à l'incertitude sur  $d$ . On se demande si le courant va beaucoup être modifié par une variation de 10 pm. On différentie la relation donnant l'intensité :

$$\frac{dI}{I} = -\frac{2d(d)}{\delta}$$

On a donc :

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{2\Delta d}{\delta} = 0.03$$

Donc on a une variation de 3% d'intensité si la pointe bouge de 10pm. Si on sait déterminer une variation d'intensité de 3% alors on peut déterminer une hauteur de 10pm. Une autre manière de le voir : Si par exemple on se donne comme critère que pour déterminer une variation de position il faut que  $I'/I = 0.97$  Alors on a :

$$0.97 = e^{-2\frac{l-l'}{\delta}}$$

Aussi on peut déterminer une variation de hauteur de  $l' - l = -\frac{\delta}{2} \ln(0.97) = 1.0 \times 10^{-11} \text{ m}$

### 2.2.2 Résolution latérale

Il faut que la tige soit la plus fine possible, en effet, sinon on est pas précis. Ensuite on voit que les atomes voisins vont interagir. Aussi on aura une précision de l'ordre de l'angstrom.

La distance typique de la tige à la surface est  $d \in [4, 7]$  Angstrom. On sort le code : Il correspond à comparer quand la pointe est au dessus d'un atome à quand elle est entre les atomes. De la sorte que si la variation d'intensité est suffisante on peut les séparer. On trouve une valeur de  $L$  avec les curseurs.

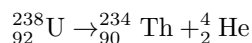
En pratique, on arrive à fabriquer des pointes de tungstène avec un seul atome au bout ! Mais la durée de vie d'une telle pointe est de quelques heures d'utilisation...

## 3 Bonus : Radioactivité $\alpha$

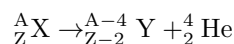
### 3.1 Rappels

La radioactivité  $\alpha$  est l'émission par un noyau instable d'une particule  $\alpha$ . Une particule  $\alpha$ , c'est de l'hélium  ${}^4_2\text{He}$ .

Elle concerne les noyaux lourds, qui ont un nombre important de protons. Cela leur permet de passer dans un état plus stable. Exemple :



De manière générale :





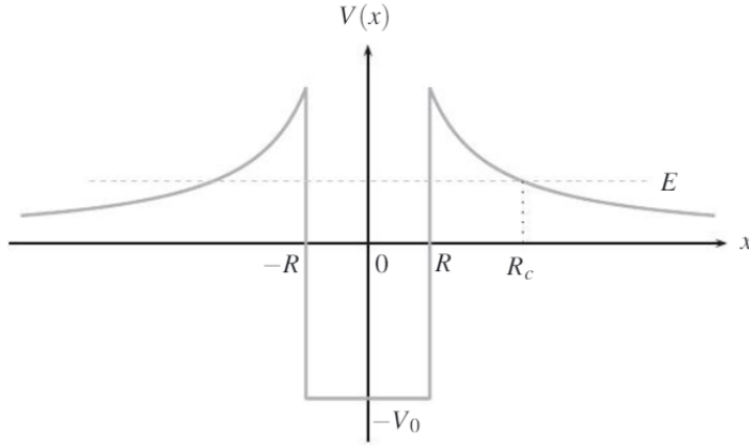


FIGURE 8 – Représentation du potentiel.

Expérimentalement, cette réaction suit une cinétique d'ordre 1 :  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ . Il suffit donc pour la caractériser d'un paramètre :  $\lambda$ , appelé constante radioactive de l'élément. C'est l'inverse d'un temps, et désigne la proportion de noyaux qui se désintègrent par unité de temps. On peut aussi définir le temps de demi-vie, c'est-à-dire la durée au bout de laquelle la moitié des atomes se sont désintégrés :  $t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$ . Il est remarquable de voir que les temps de demi-vie des atomes s'étalent sur 30 ordres de grandeurs.

**Loi de Geiger-Nuttall (1911)** : elle relie la constante radioactive d'un noyau à l'énergie des particules  $\alpha$  émises. Elle dit que les isotopes avec une courte durée de vie émettent des particules  $\alpha$  plus énergétiques.

$$\ln t_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}$$

**Hypothèse de Gamov** : la particule  $\alpha$  préexiste dans le noyau père, mais elle est piégée.

### 3.2 Modèle de Gamov

Il faut modéliser le potentiel dans laquelle la particule est piégée. On note le rayon du noyau  $R = r_0 A^{1/3}$ , conformément à l'idée que le noyau est une goutte liquide. On a  $r_0 = 1.2 \times 10^{-15}$  m. On va prendre un modèle unidimensionnel, dont le paramètre  $x$  représente la distance au noyau atomique.

- Pour  $|x| \leq R$  : la particule est soumise à l'interaction forte : c'est l'interaction qui assure la cohésion du noyau. On considère que le potentiel est uniforme dans le noyau, égal à  $-V_0$ .
- Pour  $|x| \geq R$  : l'interaction forte est négligeable. La particule  $\alpha$  est alors repoussée par les  $Z-2$  protons restant :

$$V(x) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x}$$

Pour pouvoir franchir la barrière, la particule doit avoir une énergie  $E_\alpha > 0$ . Cela correspond au fait d'avoir un noyau instable.

**Ordres de grandeurs** : pour l'uranium,  $R_0 \approx 8.5$  fm,  $R_c \approx 62$  fm,  $V_0 \approx 10$  MeV,  $E_\alpha \approx 4$  à 9 MeV et la barrière a une hauteur d'environ 30 MeV.

**Probabilité de passer** : on va calculer la probabilité qu'à la particule de traverser la barrière. Pour cela, on assimile le potentiel à une infinité de barrières de largeur  $dx$ , et de hauteur  $V(x)$ .

On avait pour une barrière de hauteur  $V_0$  :

$$T(x) = \underbrace{\frac{16E_\alpha(V_0 - E_\alpha)}{V_0^2}}_{T_0} e^{-2a/\delta}$$

donc pour une barrière élémentaire :

$$dT = T_0 e^{-2dx/\delta(x)}$$

avec  $\delta(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V(x) - E_\alpha)}}$ .

Ici, on ne considère que la variation du paramètre exponentiel : c'est lui qui dicte le comportement du coefficient de transfert, plus que  $T_0$ .

La probabilité de franchir 2 barrières est le produit des probabilités de franchir chaque barrière, chaque franchissement étant indépendant. En généralisant à une infinité de barrière élémentaires continues,

$$\begin{aligned} T(E_\alpha) &\propto \exp\left(-\int_R^{R_c} \frac{dx}{\delta(x)}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_c} dx \sqrt{2m\left(\frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - E\right)}\right) \end{aligned}$$

*En vrai il vaut mieux écrire un produit discret, puis une somme dans l'exponentielle, puis passer au continu...*

Le calcul est dans le BUP, bonjour les changements de variables nuls. On peut aussi écrire l'égalité en disant que si  $R = R_c$ , l'intégrale est nulle et l'exponentielle vaut 1. La constante de proportionnalité est dès lors égale à 1.

On obtient une probabilité de la forme :

$$\ln(T) = \frac{a}{\sqrt{E}} + b$$

**Bonus :** expressions de  $a$  et  $b$  :

$$a = -\frac{\pi R V_m}{\hbar} \sqrt{2m} \quad \text{et} \quad b = 2R \frac{\sqrt{V_m m}}{\hbar}$$

Avec

$$V_m = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

**Approche pas simple :** Basdevant énergie nucléaire, p.88. En décomposant la barrière de potentiel en des barrières élémentaires, on a un peu oublié l'hypothèse de labarrière épaisse... Il faut alors se placer dans l'approximation de Brillouin-Kramers-Wentzel, qui s'applique lorsque le potentiel varie lentement. C'est la version de Gamov. Par chance, ça donne le même résultat !

### 3.3 Loi de désintégration exponentielle

La probabilité de passer que l'on a calculé est valable pour un choc. On suppose que la particule fait des allers-retours dans le noyau à la vitesse  $v$ . *Attention, à 9 MeV, la particule a une vitesse de l'ordre de  $4 \times 10^7$  m/s, elle est relativiste...* A chaque fois qu'elle rencontre la barrière de potentiel, elle a une probabilité  $T$  de la traverser. La probabilité élémentaire de la traverser pendant  $dt$  est donc :

$$dP = \frac{v}{2R_0} T dt$$

Ainsi, pour  $N$  noyaux, le nombre  $dN$  de noyaux se déintégrant pendant  $dt$  est :

$$dN = N dP = \frac{v}{2R_0} T N dt$$

On retrouve la cinétique d'ordre 1, et on peut remonter au temps de demi-vie :

$$t_{1/2} = \frac{2R_0 \ln 2}{vT}$$

On retrouve alors la loi empirique de Geiger-Nutall !

Le modèle est très simpliste, mais il donne des ordres de grandeurs corrects, et permet de retrouver les tendances observées.

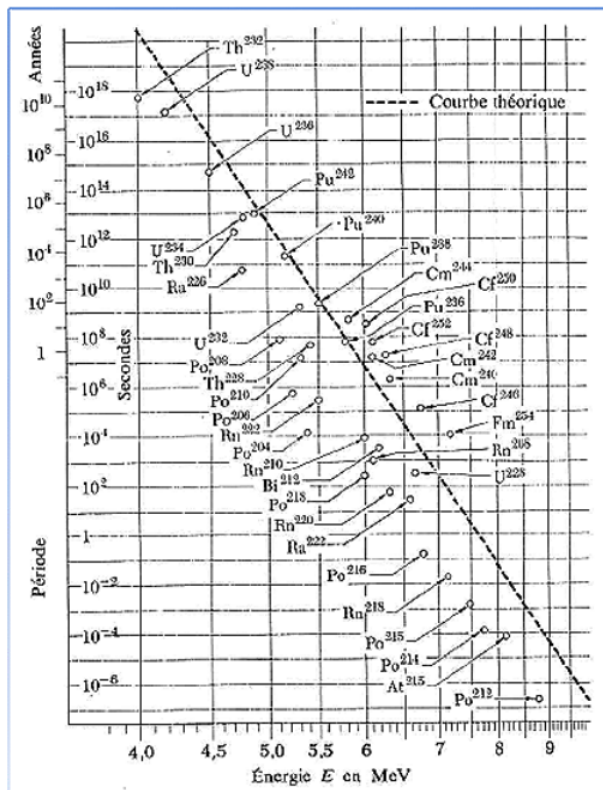


FIGURE 9 – Courbe comparant la théorie de Gamow et les résultats expérimentaux. L'ordonnée est en échelle log, l'abscisse en échelle racine...

## Conclusion

L'effet tunnel est un effet purement quantique : le fait de traverser une barrière de potentiel pour une particule classique est impossible. Afin de déterminer si l'effet quantique peut avoir lieu et si une particule peut "tunneller", on compare la longueur d'onde de de Broglie à la taille de la particule : c'est le critère qui permet de trancher entre une description ondulatoire, pour laquelle l'effet tunnel est permis, et une description classique. Une analogie avec l'effet de peau en optique est possible, mais c'est une analogie formelle, il semble que la masse joue un rôle dans l'effet tunnel.

L'effet tunnel intervient aussi dans d'autres phénomènes : dans les réaction d'oxydo-réduction, c'est ce qui permet le passage des électrons du métal de l'électrode à un atome en solution. Il est aussi à la base de l'inversion de la molécule d'ammoniac, dont les inversion sont utilisées pour fabriquer des MASERS.