
DYNAMIQUE DU POINT ET DU SOLIDE

Niveau

Commentaires du jury

—

Bibliographie

—

pré-requis

Expériences

—

Table des matières

1	Chute d'un corps	2
1.1	Autre manip possible :	2
2	Théorème du moment cinétique	2
2.1	Calibrage	2
2.2	Mise en équation	3
2.3	Étude énergétique	3
2.4	Autres manip?	3
3	Pendule tournant : bifurcation	3
3.1	Branchement de la photodiode	4
3.2	Reste du montage	4
3.3	Mesures	4
3.4	Mise en équation du problème	4
4	Le gyroscope	4
4.1	Présentation	4
4.2	Précession	6
4.2.1	Autre démo	6
4.3	Nutation et précession	6

Introduction

La dynamique du point et du solide s'intéresse à l'échelle macroscopique au mouvement des corps soumis à des forces. On va tout au long de ce montage dans un référentielle galiléen. C'est à dire un référentielle ou la première loi de Newton s'applique. **Rappel sur les lois de Newton :**

- 1^{re} loi de Newton (= principe d'inertie) : dans un référentiel galiléen, un corps sur lequel la résultante des forces qui s'applique est nulle est en mouvement rectiligne uniforme.
- 2^e loi de Newton (= PFD) : Dans un référentiel galiléen, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{\ddot{a}}$.
- 3^e loi de Newton (= principe des actions réciproques) : Tout corps A exerçant une force sur un autre corps B subit une force d'égale intensité et de direction opposée de la part de B.

1 Chute d'un corps

On veut mesurer l'accélération d'une règle dans le champ de pesanteur. On s'intéresse au centre de masse de la

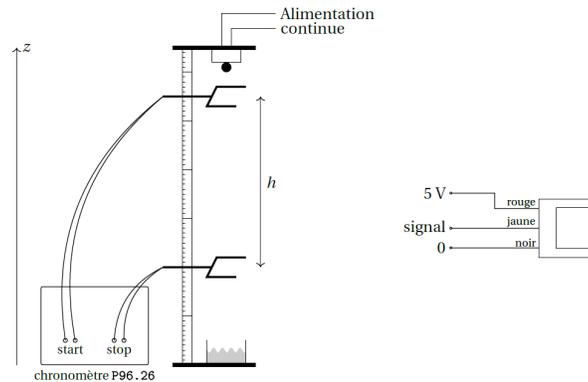


FIGURE 1 – Principe de la manipulation (source poly de TP). On adapte pour le faire dans le cas d'une règle percée régulièrement. On n'a besoin que d'un capteur optique et celui-ci doit être relié à Latis pro

règle en supposant qu'elle tombe verticalement sans frottement. On a $\ddot{z} = -g$ donc

$$z(t) = \frac{-gt^2}{2} - v_0t + z_0$$

Chute d'une règle :

On fait tomber la règle grâce à un électro aimant commandé par un interrupteur. On traite les données sous python. On remonte à g

On peut aussi vérifier la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{E_m}{m} = \frac{1}{2}v^2 - gz$$

Remarque

Placer le détecteur près du départ, c'est là que l'on voit le mieux la parabole. Cependant il faut faire un compromis parce que le décrochage de l'électroaimant n'est pas parfait. Aussi il faut être assez "éloigné" pour s'en affranchir (1cm ?)

Le détecteur est une diode laser en face d'un phototransistor.

1.1 Autre manip possible :

- Mesure d'un coefficient de frottement grâce à une masse sur un plan incliné liée à une masse en chute libre
- Mobile autoporteur : conservation de la quantité de mouvement

2 Théorème du moment cinétique

2.1 Calibrage

On étudie le pendule pesant.

Équilibrer le pendule et calibrage.

On montre que la tension sortie du potentiomètre est linéaire avec le l'angle sur la gamme considéré.

2.2 Mise en équation

On applique le théorème du moment cinétique au pendule (auquel on a rajouter une masse bien sûr) :

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} = -Lmg \sin(\theta)$$

On se place au petits angles et on pose : $\omega_0^2 = \frac{mgL}{J+mL^2}$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Détermination de J :

Pour différentes positions L d'accroche de la masse, on mesure la fréquence. Toujours se placer pour des petits angles.

La mesure de fréquence peut se faire grâce une transformé de fourier ou en comptant des périodes... On trace $\frac{mgL}{\omega_0^2}$ en fonction de L^2 et on en déduit J l'ordonnée à l'origine. (On attends avec le pendule de lyon autour de $J \simeq 2.8 \times 10^{-3} kg.m^2$)

2.3 Étude énergétique

$$E_m = \underbrace{\frac{mL^2 + J}{2}\dot{\theta}^2}_{E_c} + \underbrace{mgL(\cos(\theta) - 1)}_{E_p}$$

Étude énergétique : On trace E_c , E_p , E_m . On observe les échange énergétiques

On ajuste l'enveloppe avec une exponentielle décroissante (fonction **Env** dans latispro) pour retrouver le coefficient de dissipation visqueux.

Nottons qu'il y a aussi des frottement solide que l'on néglige ici.

2.4 Autres manips ?

- Montrer le portrait de phase
- Pendules aux grandes amplitudes avec la formule de Bordas.
- Pendule en rotation : oscilations paramétrique...

3 Pendule tournant : bifurcation

Pas de protocole dans le fascicule. Il faut :

- Un laser
- une lame quart d'onde
- un polariseur
- le pendule tournant avec le rond polarisant
- des noix, des pinces
- une photodiode
- un AO
- un oscillo
- des fils
- une résistance de 100 kΩ

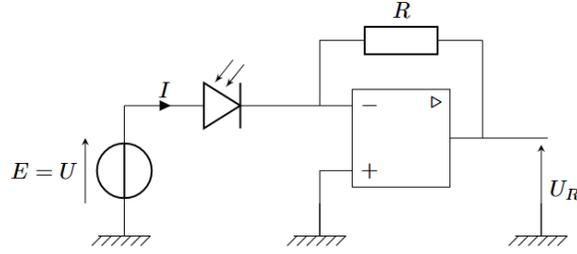


FIGURE 2 – Montage photodiode à AO

3.1 Branchement de la photodiode

Elle doit être reliée à l'oscillo et polarisée avec le montage à AO : on peut y prendre $E = 0$.

3.2 Reste du montage

Il faut faire passer le faisceau laser dans le trou au dessus de la tige du pendule. Intercaler la quart d'onde entre le Laser et le pendule. Le laser est polarisé : elle redistribue l'énergie dans toutes les directions de polarisation.

Placer un analyseur entre le pendule et la photodiode.

3.3 Mesures

Il faut faire le zéro à l'arrêt : on mesure l'angle d'extinction. Toutes les mesures se font par rapport à cet angle.

En faisant tourner le pendule, on mesure l'angle que fait le pendule avec la verticale à l'aide du polariseur. Il faut repérer le bon pic sur l'oscillo, et l'annuler en tournant le polariseur.

En visualisant un (ou plus) période du signal à l'oscillo, on remonte à la vitesse de rotation du pendule. On peut donc mesurer un angle et une vitesse.

3.4 Mise en équation du problème

On écrit le TMC en prenant en compte : le moment d'inertie I du cercle polarisant, le moment d'inertie de la tige $m_t \frac{L^2}{3}$, le moment d'inertie de la masse mL^2 .

Les forces prises en compte sont le poids et la force centrifuge.

$$\ddot{\theta} \left(mL^2 + I + m_t \frac{L^2}{2} \right) = -mgL \sin \theta - m_t g \frac{L}{2} \sin \theta + m\omega^2 L \sin \theta L \cos \theta + m_t \omega^2 \frac{L}{2} \sin \theta \frac{L}{2} \cos \theta$$

On aboutit à :

$$\cos \theta^* = \frac{g(m + m_t/2)}{\omega^2 L(m + m_t/4)}$$

Il faut tracer le cos en fonction de $\frac{1}{\omega^2}$.

4 Le gyroscope

4.1 Présentation

Vérifier que le gyroscope est équilibré sinon, l'équilibrer en déplaçant des petites masses fixées dessus. Il ne doit pas bouger une fois lancé.

On remarque qu'en isolant chacune des rotations du gyroscope on a en fait des petits pendules pesants équilibrés. En ajoutant des masses on peut alors les déséquilibrer et refaire la même mesure qu'à la partie précédente.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{C + m_1 a^2}{m_1 g a}} \quad \text{et} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{C + m_1 b^2}{m_1 g b}}$$

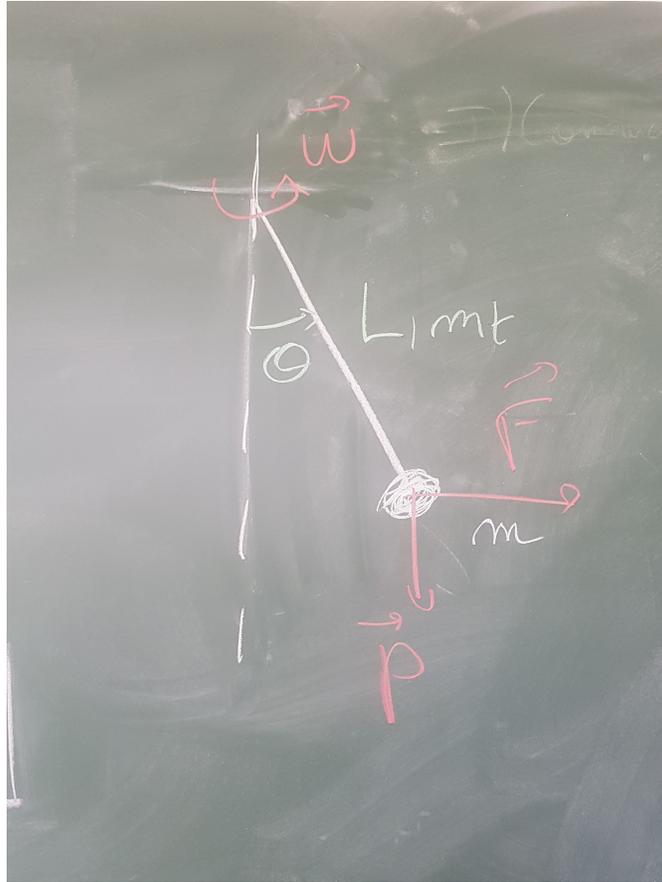


FIGURE 3 – Schéma du problème.

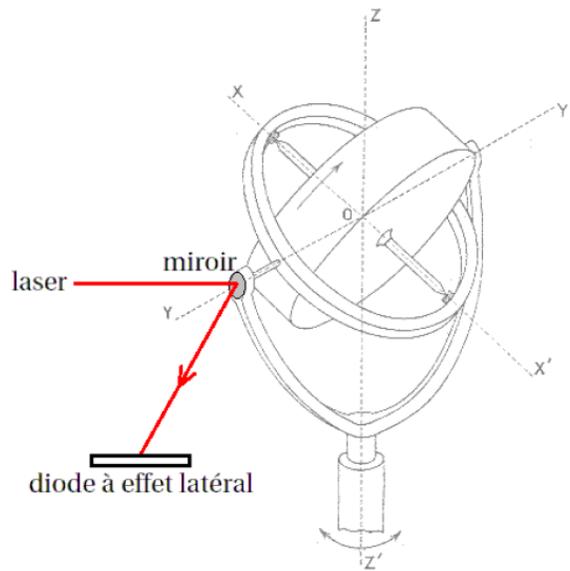


FIGURE 4 – Le gyroscope (poly de TP)

Détermination des moment d'inertie du gyroscope : (en préparation)

- **A l'arrêt** placer une masse m_1 à une distance a du centre de gravité du disque intérieur tournant. On mesure la période de petites oscillation (comme pour le pendule simple)
- **A l'arrêt**, placer une masse m_2 à une distance b du centre de la deuxième partie mobile. On mesure la période de petites oscillation de nutation (comme pour le pendule simple)

4.2 Précession

On déséquilibre le gyroscope avec une masse m . On a alors un mouvement de précession à vitesse constante.

Dans l'approximation gyroscopique on a avec $\dot{\theta}$ la nutation, $\dot{\psi}$ la précession et $\dot{\phi}_0$ la rotation propre et C le moment d'inertie autour de l'axe de rotation propre :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{C\dot{\phi}_0}{A}\right)^2 \theta \mp \frac{mga}{A} \sin(\theta) = -\frac{C\dot{\phi}_0}{A} K$$

$$\dot{\psi} \sin(\theta) = \frac{C\dot{\phi}_0}{A} \theta + K$$

Avec K une constante dépendant des condition initiales et \mp correspondant au coté où on accroche la masse.

On se place dans le cas où θ est environ constant (en effet on ne voit pas de variation de la nutation). De plus on suppose également que $\dot{\phi}_0$ est une constante. La première équation permet alors de définir θ . Pour résoudre on fait disparaître K

$$K = -\left(\frac{C\dot{\phi}_0}{A}\right)\theta \pm \frac{mga}{C\dot{\phi}_0} \sin(\theta)$$

Donc en remplaçant dans la deuxième équation et en divisant par $\sin(\theta)$:

$$\dot{\psi} = \pm \frac{mga}{C\dot{\phi}_0}$$

4.2.1 Autre démo

$$\vec{\sigma}_0 = L\vec{e}_z'$$

avec $L = C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta))$ et $\vec{e}_z' = \vec{e}_z \cos(\theta) - \vec{v} \sin(\theta)$ avec \vec{v} le vecteur e_y décalé de ψ par la première rotation dans les angles d'euler (il forme un triaèdre $\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_z$). On développe : $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = mga \sin(\theta) \vec{u}$ Dans l'approximation gyroscopique on a $\frac{dL \cos(\theta)}{dt} = 0$ et $\frac{dL \sin(\theta)}{dt} = 0$. On a alors :

$$\dot{\psi} = \frac{mga}{L} \simeq \frac{mga}{C\dot{\phi}}$$

Mesure de C moment d'inertie autour de l'axe de rotation propre

On chronomètre une rotation entière et on mesure la vitesse de rotation propre. Faire cela pour plusieurs vitesses de rotation propre. On déduit donc C

On peut discuter du ralentissement de la vitesse de rotation propre à l'échelle d'un tour...

4.3 Nutation et précession

Quand le gyroscope n'est pas déséquilibré on peut remonter au rapport C/A

$$\theta = K + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t + \delta) \quad (1)$$

$$\psi = K' - \frac{\lambda}{\omega \sin(\theta_0)} \cos(\omega t + \delta) \quad (2)$$

avec K, K', λ des constantes issus des conditions initiales.

$$\omega = \frac{C\dot{\phi}_0}{A}$$

Mesure du rapport $\frac{C}{A}$, pour remonter à A :

- On perturbe le système équilibré. (Il peut être intéressant de taper dans un sens et dans l'autre pour perturber le système mais rester autour de l'endroit où est le laser)
- On observe les oscillations sur une diode à effet latérale grâce à un laser et un miroir sur le gyroscope
- On relève la vitesse de rotation propre
- Le faire pour plusieurs vitesses de rotations.

On trace $\omega = \frac{C\dot{\phi}_0}{A}$ On déduit A

On peut comparer si le temps le permet aux valeurs en mode pendule.

Conclusion

On a mis en évidence le principe fondamentale de la dynamique appliqué au solide ainsi que le théorème du moment cinétique pour un solide indéformable. Nous avons ensuite fait une application plus complexe illustrant les comportements riches de solides ayant plusieurs axes de rotation couplés.

Polariser avec $100k\omega$