

---

# INSTABILITÉS ET PHÉNOMÈNES NON-LINÉAIRES

---

## Niveau

## Commentaires du jury

—

## Bibliographie

—

## pré-requis

## Expériences

—

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le pendule pesant</b>	<b>2</b>
1.1	Présentation du pendule . . . . .	2
1.2	Étude au grands angles : enrichissement spectrale . . . . .	2
1.3	Caractéristion du comportement non linéaire . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Oscillateur de Van der Pol (commencer par l'oscilateur anharonique pour éviter un recablage de plus)</b>	<b>2</b>
2.1	Caractérisation de l'élément non linéaire . . . . .	3
2.2	Le fameux Van der Pol . . . . .	3
2.3	Notion de stabilité : bifurcation . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Pendule double puit</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Commentaire</b>	<b>6</b>

## Introduction

Jusqu'à présent, on s'est contenté d'étudier des phénomènes physiques linéaires, et si ce n'était pas le cas, on les a linéarisé autour de leurs points stables pour les étudié. Cela marche très bien jusqu'à un certain point. En effet les non linéarités donne une physique riche que nous allons illustrer aujourd'hui. Et il y a instabilité aussi ...

# 1 Le pendule pesant

## 1.1 Présentation du pendule

Le pendule pesant est caractérisé par l'équation différentiel :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{MgL}{J_0 + ML^2}$$

Nous pouvons constater le pendule possède une position stable en  $\theta = 0$  (modulo  $2\pi$ ) et une position instable en  $\theta = \pi$

Le pendule est équipé d'un potentiomètre et d'un circuit amplificateur qui délivre une tension  $U \propto \theta$

Calibrage du capteur :

On montre que le capteur est bien linéaire : on fixe une position et on mesure la tension en sortie du capteur. (faire un point devant le jury rapide)

## 1.2 Étude au grands angles : enrichissement spectrale

On trace le portrait de phase pour différentes valeurs de positions initiales. On fait la TF et on montre qu'il n'y a plus qu'une fréquence mais que l'on voit apparaître des harmoniques à  $\omega_0$

## 1.3 Caractérisation du comportement non linéaire

Formule de Bordas :

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

Formule de Bordas : (TP) attention aux  $\theta$  qui doivent être en radian

- `thetaL = Lissage(theta)-Moy(theta)`
- `Env=CreteMaxi(thetaL;0.1)` (permet de repérer l'enveloppe)
- `Tpas = Seuil(thetaL;0;1)` (permet de repérer les passages à 0)
- `n= Rampe(1;10000;10000)`
- `Tper = Deriv(Tpas,n)` (permet de calculer la période entre deux passage à 0)
- Représenter `Tper` en fonction de `Env`.

On fait un ajustement en  $T_{per} = T_0(1 + aEnv^2 + bEnv^4)$ . Pour l'ajustement sur notre ami a tous latris pro, bien penser a fair glisser la courbe  $T_{per} = f(Env)$  et pas  $T_{per} = f(t)$

A priori le terme en  $\theta^4$  a un facteur : 11/3072...

# 2 Oscillateur de Van der Pol (commencer par l'oscillateur anharmonique pour éviter un recablage de plus)

L'oscillateur de Van der Pol est décrit par l'équation :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \epsilon \omega_0 \left( \left( \frac{s}{s_0} \right)^2 - 1 \right) \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

C'est un oscillateur non linéaire avec un seul paramètre et très utilisé en pratique.

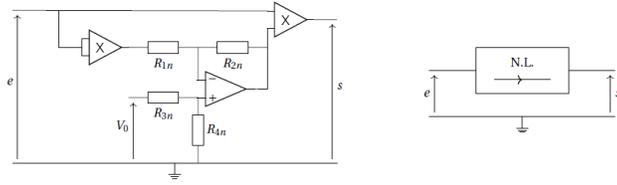


FIGURE 1 – Element non linéaire de Van der Pol

## 2.1 Caractérisation de l'élément non linéaire

C'est un montage qui agit comme une résistance négative autour de 0.

$$s = \left( -\frac{R_{4n}}{R_{3n} + R_{4n}} \frac{R_{1n} + R_{2n}}{R_{1n}} K V_0 \right) e + \left( \frac{K^2 R_{2n}}{R_{1n}} \right) e^3 = \alpha e + \beta e^3$$

Caractérisation

$R_{1n} = R_{3n} = 6.2k$ ,  $R_{2n} = 82k$ ,  $R_{4n} = 2k$  Attention : il faut mettre un inverseur en sortie (en fait le multiplieur sur le schéma a un gain -K) Il faut donc bien mettre l'inverseur avant de calculer  $\alpha$  et  $\beta$  On peut montrer qu'en fonction de la valeur de  $V_0$  on a pas le même caractéristique du composant.

On fixe  $V_0$  à 1V et ne plus le toucher après (il fixe  $\alpha$ ).

Faire l'acquisition sur latis Pro avec 3Vpp d'amplitude et  $f = 100\text{Hz}$ . on ajuste avec un polynome.

(Faire la FFT et montrer le pic à 3f.)

Expliquons avec les mains : Si on note  $u$  la sortie du premier multiplieur et  $s_0$ , le montage a AO est globalement un soustracteur avec des coeffs bizarre :

$$s_0 = A(u - bV_0) \text{ Donc } s = e \times s_0 = e \times (A(e^2 - bV_0))$$

Il faut que le balayage pour tracer la réponse du composant non linéaire soit assez lent pour qu'il n'y ait pas

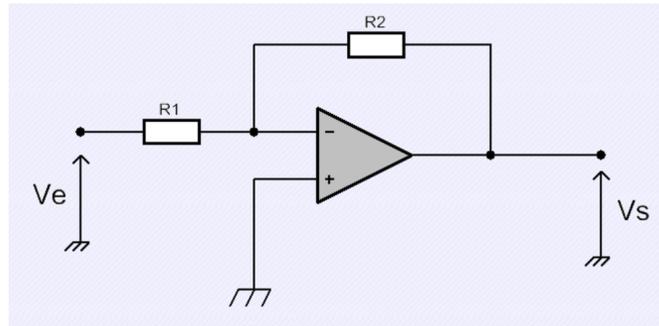


FIGURE 2 – Inverseur

d'hystérésis des multiplieurs et que l'amplitude soit raisonnable pour ne pas saturer les AO.

## 2.2 Le fameux Van der Pol

Attention au sens du composant non linéaire

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \epsilon \omega_0 \left( \left( \frac{s}{s_0} \right)^2 - 1 \right) \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

Ici  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$  et  $\epsilon = -\sqrt{\frac{R_1 R_2 C_2}{C_1} \frac{\alpha R_{C1} + R_{NL}}{R_{C1} R_{NL}}}$

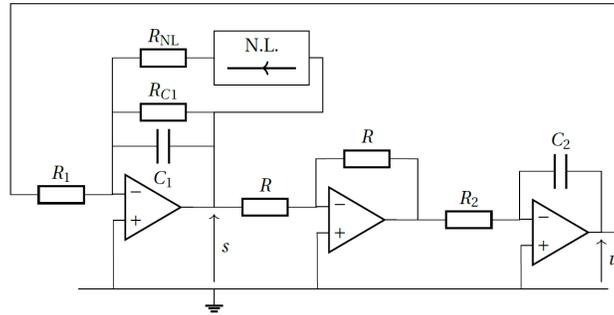


FIGURE 3 – Van der Pol

On montre qu'à partir d'une résistance critique on observe des oscillation : on trace le portrait de phase à l'oscillo ou sur Latis pro.

On peut faire des TF pour montrer comment en fonction de la valeur de  $\epsilon$  on s'écarte d'un comportement linéaire ?

Valeurs de composants :  $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 0.1 \mu\text{F}$ ,  $R_{C1} = 100 \text{ k}\Omega$  et  $R_{NL}$  résistance variable

### 2.3 Notion de stabilité : bifurcation

Pour différentes valeurs de  $R_{NL}$  proche de la bifurcation on relève l'amplitude des oscillations. On remonte ainsi au diagramme de bifurcation.

En traçant  $s_{cc}$ , l'amplitude crête à crête de oscillation en fonction de  $R_{NL}$  on peut remonter à  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$s_{cc} = 4\sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C1}}}$$

## 3 Pendule double puit

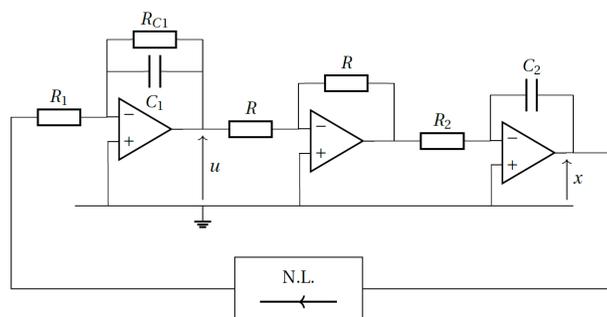


FIGURE 4 – Double puits

L'équation de ce système est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + \delta x + \lambda x^3 = 0$$

avec  $r = \frac{1}{R_{C1}}$ ,  $\delta = \frac{\alpha}{R_1 R_2 C_1 C_2}$  et  $\lambda = \frac{\beta}{R_1 R_2 C_1 C_2}$

Caractérisation :

$R = R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 3 \mu\text{F}$  et  $R_{C1}$  résistance variable de l'ordre d'un méga ohm.

	200 H	$\pm(1,0\%+5\text{dgts})$	10 mH	ouvert (open)
	2000 H	non spécifié	100 mH	---

22.  $\mu\text{H}$  = micro-Henry = 10 exp. -6; mH = milli-Henry = 10 exp. -3; H = Henry = As/V

En mesure de tolérance la valeur respective de la bobine "Lx" divisée par 10000 doit être ajoutée dans la parenthèse.

---

Résistance	20 $\Omega$	$\pm(1,2\%+8\text{dgts})$	1 m $\Omega$	court-circuit (short)
	200 $\Omega$	$\pm(0,8\%+5\text{dgts})$	10 m $\Omega$	court-circuit
	2 k $\Omega$	$\pm(0,5\%+3\text{dgts})$	100 m $\Omega$	---
	20 k $\Omega$	$\pm(0,5\%+3\text{dgts})$	1 $\Omega$	---
	200 k $\Omega$	$\pm(0,5\%+3\text{dgts})$	10 $\Omega$	---
	2 M $\Omega$	$\pm(0,5\%+5\text{dgts})$	100 $\Omega$	ouvert (open)
	10 M $\Omega$	$\pm(2,0\%+8\text{dgts})$	1k $\Omega$	offen

Tension sur circuit de mesure ouvert: env. 550 mV pour 120 Hz de fréquence de test ou env. 350 mV pour 1 kHz de fréquence de test

---

**C Puissance d'entrée maximale**

Mesure de résistance : env. 10 MOhm  
 Mesure de capacité : env. 10 mF  
 Mesure d'inductance : env. 10000 H

		200 nF	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	10 pF	ouvert
		2 $\mu\text{F}$	$\pm(0,7\%+3\text{dgts})$	100 pF	---
		20 $\mu\text{F}$	$\pm(0,7\%+3\text{dgts})$	1 nF	---
		200 $\mu\text{F}$	$\pm(0,7\%+3\text{dgts})$	10 nF	---
		2000 $\mu\text{F}$	$\pm(1,0\%+5\text{dgts})$	0,1 $\mu\text{F}$	court-circuit (short)
		10 mF	$\pm(5,0\%+5\text{dgts})$	1 $\mu\text{F}$	court-circuit

Mode de fonctionnement	Plage de mesure	Précision	Résolution	Calibrage
Capacité	2000 pF	$\pm(1,0\%+5\text{dgts})$	0,1 pF	ouvert
	pour 1 kHz	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	1 pF	ouvert
	de fréquence de test	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	10 pF	---
	200 nF	$\pm(0,7\%+3\text{dgts})$	100 pF	---
	2000 nF	$\pm(0,7\%+3\text{dgts})$	1 nF	---
	20 $\mu\text{F}$	$\pm(1,0\%+3\text{dgts})$	10 nF	court-circuit
	200 $\mu\text{F}$	$\pm(1,0\%+3\text{dgts})$	1 $\mu\text{F}$	court-circuit
	2000 $\mu\text{F}$	$\pm(5,0\%+5\text{dgts})$	1 $\mu\text{F}$	court-circuit

pF = pico-Farad = 10 exp. -12; nF = nano-Farad = 10 exp. -9;  $\mu\text{F}$  = micro-Farad = 10 exp. -6

---

Inductance	20 mH	$\pm(2,0\%+5\text{dgts})$	1 $\mu\text{H}$	court-circuit (short)
	pour 120 Hz de fréquence de test	$\pm(1,0\%+5\text{dgts})$	10 $\mu\text{H}$	court-circuit
	200 mH	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	100 $\mu\text{H}$	---
	2000 mH	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	1 mH	---
	20 H (< 0,5H)	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	10 mH	---
	200 H (> 0,5H)	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	100 mH	ouvert (open)
	2000 H	$\pm(1,0\%+5\text{dgts})$	1 H	---
	10000 H	non spécifié	1 H	---

Inductance	2000 $\mu\text{H}$	$\pm(2,0\%+5\text{dgts})$	0,1 $\mu\text{H}$	court-circuit (short)
	pour 1 kHz de fréquence de test	$\pm(1,2\%+5\text{dgts})$	1 $\mu\text{H}$	court-circuit
	20 mH	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	10 $\mu\text{H}$	---
	200 mH	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	100 $\mu\text{H}$	---
	2000 mH	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	1 mH	---
	20 H	$\pm(0,7\%+5\text{dgts})$	1 mH	---

FIGURE 5 – Notice Voltcraft

## 4 Commentaire

- Incertitudes sur la position de la tige ? c'est  $\pm\sigma$  ou  $3\sigma$ 
  - On repère une incertitude dans laquelle on est sûr d'être, donc  $3\sigma$
- C'est quoi les unités de tes droites
  - Unité internationales
- Pourquoi le point et pas sur la droite ?
  - Dérive de l'amplificateur
- Quelles montages dérives avec les AO
  - L'intégrateur
- Comment tu a choisit entre incertitude type et intervalle de 95%
  - Il faut le préciser au tableau si on prends les incertitudes à 95%
- Critère de Shanon ?
- Refaite une acquisition aux petits angles avec 100 points et 1 s. On observe un battement dans l'écrêtement des sinus, pourquoi ?
  - On a une fréquences d'échantillonnage qui est une fraction entière de la fréquence de l'oscillation
- A quoi est du la forêt de pics autour du pic centrales
  - C'est du à la convolution avec la porte de la fenêtre temporelle.
- Pourquoi on attendait un pic au double de la fréquence ?
  - Non linéarité : produits, mais en fait on attendait le triple parce que le DL du sinus mais intervenir du  $\theta^3$
- Comment vous avez la fréquences instatané ?
  - On dérive un le tableau des temps entre les maximum.
- Pourquoi avoir une acquisition longue ?
  - Pour voir plus loin l'évolution de la période avec l'amplitude
- Vous obtenez une valeur de  $b$  dans les choux (le terme en  $\theta^4$ ) est ce que vous pouvez l'imposer et voir ce que ca fait ?
  - Bof mais c'est pas trop mal quand même
- Qu'est ce qui est non linéaire ? : les multiplieur
- Si on met pas d'inverseur à la fin ?
  - Pour avoir une résistance négative
  - Pour avoir des oscillations qui diverge. Ça met une instabilité. Ca entretient le système en énergie
- On peut faire des oscilateur sans résistance négative
  - Oui avec les AO, on fait un
- Van der pol, justifie sa place dans le montage
  - Instabilité : C'est la résistance négative qui fait le taffe
  - Non linéaire : éléments et a haute amplitude
- Que se passerait-il si  $\alpha$  et  $\beta$  de même signes ?
  - Fonction monotone... Moins d'intérêt
- Comment vous savez que c'est bien la bonne chose que vous mesurer dans la période en fonction de l'amplitude.
  - Pourquoi les offset de l'AO peut faire des problèmes
  - C'est quoi le lien entre van der pol et le double puit ?
    - Les deux sont non linéaires.
  - mesure des résistance ? RLC mètre, comment ca marche ?
    - Circuit dont la fréquence d'oscillations qui dépend du dipole connecter.

Latis pro : il faut des incertitudes **Manip surprise :**

Mesurer un coefficient de frottement statique et dynamique (avec le dispositif avec moteur et capteur de force a disposition) **Commentaires :** Globalement c'était bien, avec regressi et latis pro.

Pour le choix du nombre de points, c'était un peu bizarre. Il ne faut pas négliger le plaisir des yeux.

Penser à utiliser tous les entrées de l'oscilloscope pour voir un peu partout dans le montage.

C'est dommage, mais c'est normal d'avoir des problèmes. C'est pas dramatique.

Pour la manip surprise, tu as fait ce qu'il fallait. Il faut bien penser a mettre le matos sur la paillasse.

Bien faire ressortir le lien avec le sujet et bien insister sur l'élément non linéaire.