
MP31 : RÉSONANCE

Niveau

Commentaires du jury

- 2014 à 2017 : Le lien qui existe entre la largeur de la résonance d'un oscillateur et la durée du régime transitoire est souvent ignoré par les candidats. Des phénomènes non linéaires ou paramétriques pourraient également être abordés.
- 2010 et 2013 : Les phénomènes non linéaires, paramétriques pourraient aussi être abordés. Les critères de détermination expérimentale de la fréquence de résonance ne sont pas toujours pertinents. Le rapport entre la largeur de la résonance et la durée du transitoire est trop souvent ignoré.
- 2011 et 2012 : La résonance ne se limite pas à l'étude du circuit RLC. Les critères de détermination expérimentale de la fréquence de résonance ne sont pas toujours pertinents. Le rapport entre la largeur de la résonance et la durée du transitoire est trop souvent ignoré. La notion de facteur de qualité ou un équivalent est trop souvent absente.
- 2008 : Le phénomène de résonance n'apparaît pas qu'en électricité. En outre, le circuit RLC est souvent mal connu. Le jury apprécierait de voir des résonances dans d'autres domaines de la physique, ainsi que des facteurs de qualité importants.
- 2006 : La résonance n'est pas une amplification. L'influence de l'amortissement est souvent négligée.
- 2004 : L'étude de la phase est trop souvent absente de ces montages alors qu'elle fournit des relations complémentaires non redondantes à celle de l'amplitude.
- 2000 : Le phénomène de résonance apparaît dans des domaines très divers de la physique. L'étude du circuit RLC série ne devrait pas occuper plus du tiers du montage. Les phénomènes paramétriques, l'impact des non-linéarités peuvent compléter efficacement une présentation, mais les aborder requiert une réelle maîtrise préalable des expériences envisagées.

Bibliographie

—

pré-requis

Lien entre durée du régime transitoire et facteur de qualité : le décrément logarithmique.

On considère un signal pseudo-périodique $x(t)$ (genre les oscillations d'un RLC soumis à un créneau). On suppose que le système suit une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

L'enveloppe des oscillations s'écrit : $E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = E_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t}$. Notons T la pseudo-période du système.

Le décrément logarithmique est défini comme :

$$\delta = \ln \left[\frac{x(t)}{x(t+T)} \right] = \ln \left[\frac{E(t)}{E(t+T)} \right] = \frac{T}{\tau}$$

Dans le cadre du circuit RLC, on a le lien : $Q = \frac{\omega_0 \tau}{2}$, donc :

$$\delta = T \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{2\pi}{2Q} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

Pour des systèmes avec des facteurs de qualité assez grands,

$$\delta \approx \frac{\pi}{Q}$$

On retrouve bien que si le décrétement est important, alors l'amplitude des oscillations décroît vite et le facteur de qualité n'est pas très important. A l'inverse, si le décrétement est faible, Q est important.

Enfin, en ordre de grandeur : $\frac{T}{\tau}$ compare la période d'une oscillation à la durée du régime transitoire : c'est environ l'inverse du nombre d'oscillations qu'il y a entre le début et 63% du régime transitoire : Q vaut alors approximativement le nombre d'oscillations du système avant le régime permanent.

Expériences

- Circuit RLC : facteur de qualité, résonance en courant, diagrammes de Bode.
- Laser : facteur de qualité, largeur spectrale
- oscillateur paramétrique

Table des matières

1 Résonance en électronique : circuit RLC	2
1.1 Fréquence de résonance	2
1.2 Diagramme de Bode	3
1.3 Décrétement logarithmique	3
2 Résonance en optique : le Laser : haut facteur de qualité	3
3 Résonance en mécanique : oscillateur paramétrique	5

Introduction

Le phénomène de résonance est un phénomène d'accumulation et de transfert d'énergie. Un système peut osciller s'il est capable de stocker de l'énergie sous 2 formes, et que des échanges d'énergie sont possibles entre les 2 formes. La résonance est alors l'accumulation d'énergie injectée dans le système par une sollicitation extérieure, lorsque l'injection est en phase avec l'accumulation. Le système répond alors avec une grande amplitude pour sa grandeur de sortie.

Ces phénomènes peuvent être observés dans de multiples domaines de la physique.

1 Résonance en électronique : circuit RLC

On considère le circuit RLC série. On regarde la sortie sur R afin de mesurer une résonance en courant (même si c'est plus pratique de pas courir pour mesurer).

L'équation du système soumis à un échelon de tension e s'écrit :

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s} + \omega_0^2 s = \dot{e}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. La fréquence de résonance est $f_0 = 2\pi\omega_0$. De même, la fonction de transfert du filtre se met sous la forme :

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

1.1 Fréquence de résonance

On mesure la fréquence de résonance avec la méthode de Lissajou à l'oscilloscope (déphasage nul à la résonance). On utilise un suiveur pour adapter l'impédance et s'affranchir de la résistance du GBF

1.2 Diagramme de Bode

Tracé du diagramme de Bode en gain (on peut faire fréquence mais ça apporte pas grand chose). A l'aide de la bande passante, on remonte au facteur de qualité : $Q = \frac{\Delta f}{f_0}$.

Le $\delta f = f_2 - f_1$ correspond à la limite de la bande passante (ça n'est pas forcément centré autour de la fréquence de résonance et c'est les points tels que $V(f_1) = V(f_2) = V(f_0)/\sqrt{2}$

On peut aussi réaliser l'ajustement du gain en fonction de la fréquence pour obtenir une valeur de Q .

1.3 Décrément logarithmique

On peut également se servir du décrément logarithmique pour réaliser une mesure de Q . Voir l'intro pour les calculs.

On envoie un créneau dans le circuit. Il doit être de fréquence assez basse pour que le système ait le temps de relaxer.

On mesure δ le plus de fois possibles (repérer les sommets des oscillations), prendre la moyenne et diviser par $\sqrt{N}$ pour obtenir l'incertitude type. On remonte à la valeurs de Q connaissant la valeur de la fréquence de résonance.

On peut donc obtenir des informations sur la résonance, sans se placer à la résonance.

2 Résonance en optique : le Laser : haut facteur de qualité

Le laser est un système résonant : les longueurs d'ondes émises par le laser sont les longueurs d'ondes à la fois amplifiées par le milieu amplificateur et sélectionnées par la cavité du laser qui est une cavité résonnante. On utilise un Laser He-Ne à 632.8nm.

- Excitateur : Pompage électrique.
- Résonateur : Cavité avec milieu amplificateur
- A priori, il existe un nombre infini de fréquence de résonance de la cavité. Cependant les fréquences observé sont celle qui sont observées sont celle incluses dans le spectre d'émission du du gaz.
- On utilise une cavité d'analyse Fabry Perot de Free spectral range (FSR) connue : Deux miroirs commandés par un piezoélectrique.

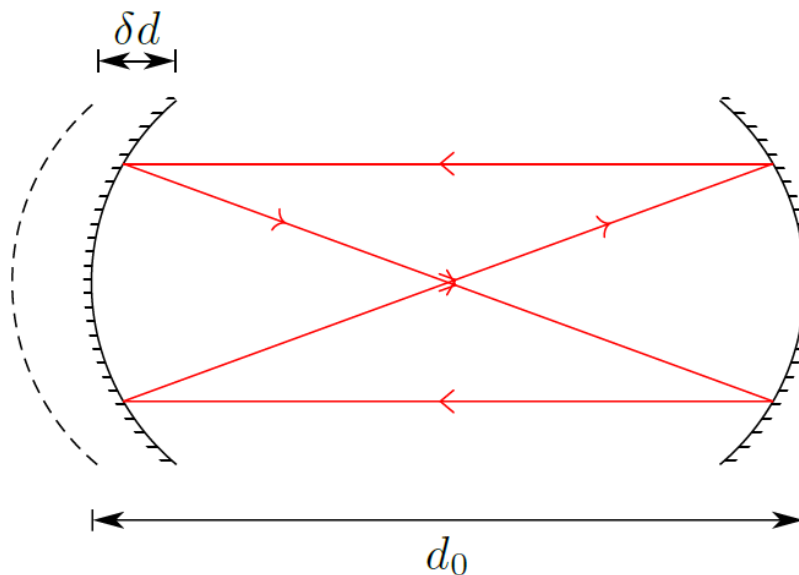


FIGURE 1 – Cavité fabry pérot (source TP)

Un rayon lumineux quelconque se superpose à lui même après réflexion sur les deux miroirs, il a alors parcouru $4d$. La condition de résonance de la cavité est alors :

$$4d = k\lambda$$

Ici un cristal piezo fait varier la distance d . Si la condition de résonance est vérifiée par $d = d_0 + \delta d_1$ à la longueur d'onde λ_1 : $4(d_0 + \delta d_1) = k\lambda_1$, donc il faut un décalage de δd en plus pour passer à l'ordre suivant : $4(d_0 + \delta d_1 + \delta d) = (k+1)\lambda_1$ on a donc :

$$\delta d = \frac{\lambda_1}{4}$$

On a donc une première relation liant deux pics correspondant à une même longueur d'onde mais à des ordres différents.

Si on considère maintenant une deuxième longueur d'onde qui vérifie la résonance de la cavité pour un certain δd_2 :

$$\delta d_1 - \delta d_2 = \frac{k}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)$$

On ne connaît pas k mais il est de l'ordre de $k = 4D/\lambda_1$ On peut alors écrire :

$$\frac{\delta d_1 - \delta d_2}{\delta d} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\frac{c}{4D}}$$

$c/4D = FSR$ est la free spectral range (à regarder sur la notice), c'est une grandeur caractéristique de la cavité.

Mesure de la différence de fréquence de deux modes d'un laser (FSR_{Laser}) :

Matériel : un laser He-Ne Melles-Griot vert dont la documentation est présente et donne la longueur d'onde moyenne et l'écart en fréquence des modes, une cavité d'analyse de Pérot-Fabry Melles, Griot P.17/20 (pas la 17/11 elle marche très mal!), un oscilloscope, il y a un boîtier P17.20.

La cavité à un intervalle spectral libre (FSR) de 1.5 GHz.

- Le signal envoyé à la cavité est en voie 1 de l'oscillo, le signal de sortie en voie 2. On observe un signal en dents de scie et un autre qui forme 2 pics. Si le LASER vient d'être allumé, les pics fluctuent.
- On aligne le laser et la cavité (repérer la réflexion du laser sur la face du laser et faire "entrer" la tâche dans l'objectif du laser).
- On doit alors observer un signal de sortie en voie 2 étant la répétition de deux pics d'intensité différentes, "glissant" sous des courbes en cloche.
- La différence de temps Δt entre les deux pics est reliée à la différence de longueur de la cavité FP pour les modes du laser
- La différence de temps ΔT entre deux grands pics est reliée à deux longueurs de résonance pour le même mode.

On a :

$$\Delta\nu = FSR \times \Delta t / \Delta T$$

L'incertitude sur la lecture des temps correspond à la largeur des pics vu sur l'oscilloscope. La mesure est très précise et $\Delta\nu \simeq 435$ MHz. Cela correspond à $\Delta\lambda = 5.8 \times 10^{-13}$ m Ceci correspond à une mesure de l'intervalle spectrale libre de la cavité laser.

Mesure la finesse du Laser :

$$F = \frac{FSR_{\text{Laser}}}{\delta f}$$

Avec FSR_{Laser} mesuré plus haut et δf la largeur d'une raie. Celle-ci se mesure en à nouveau avec un produit en croix : $\delta f = \frac{\delta\nu}{\Delta T}$

Détermination du facteur de qualité : On connaît la longueur d'onde du laser utilisé. On en déduit le facteur qualité de la résonance.

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu} = \frac{Fc}{\lambda_0 FSR_{\text{laser}}}$$

On attend $Q \in [10^6, 10^8]$

3 Résonance en mécanique : oscillateur paramétrique

Dans la première partie, on a considéré R, L, C constants dans le temps. Avec un système mécanique, on peut faire varier les paramètres du système dans le temps. **Exemple** : un enfant sur une balançoire change son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation en déplaçant ses jambes au rythme de la balançoire.

On considère le système suivant :

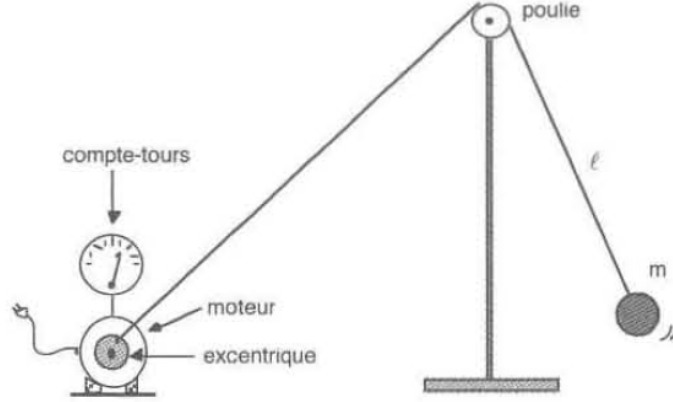


FIGURE 2 – Schéma de l'expérience.

On fait varier sinusoïdalement la longueur de la ficelle du pendule. L'équation du pendule s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega(t)^2 \sin(\theta) = 0$$

avec :

$$\begin{aligned}\omega(t)^2 &= \omega_0^2(1 + h \cos((\omega_0 + \epsilon)t)) \\ h &\ll 1 \\ \epsilon &\ll 1\end{aligned}$$

Une telle équation est appelée équation de Mathieu.

En effet, c'est bien un pendule simple (corde inélastique de masse nulle, masse ponctuelle, sans frottements) mais avec : $l(t) = l_0(1 - h \cos(\gamma t))$. Donc lorsque $h \ll 1$:

$$\omega^2(t) = \frac{g}{l(t)} \approx \omega_0^2(1 + h \cos(\gamma t))$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{l_0}{g}}$.

Les oscillations sont amplifiées lorsque :

$$-\frac{1}{2}h\omega_0 < \epsilon < \frac{1}{2}h\omega_0$$

On s'intéresse à savoir quand la position $\theta = 0$ n'est plus une position d'équilibre stable. On considère donc des petites oscillations. L'équation qui régit l'angle devient alors :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h \cos(\gamma t))\theta = 0$$

"La théorie de Floquet des équations linéaires à coefficients périodiques montre que les solutions de l'équation de la forme approchée de l'équation sont du type" (agregation A 2019) :

$$\theta(t) = e^{\mu\omega_0 t} F(t)$$

Avec F une fonction périodique de pulsation $\gamma/2$. On fait alors un calcul perturbatif en partant de la solution de l'équation avec $h = 0$:

$$\theta(t) = \theta_1 e^{\mu\omega_0 t} \cos\left(\frac{\gamma}{2}t + \phi\right)$$

En injectant cette solution dans l'équation, on a :

$$\mu^4 + 2\mu^2(1 + U^2) + (U^2 - 1)^2 - \frac{h^2}{4} = 0 \quad \text{avec} \quad U = \frac{\gamma}{2\omega_0}$$

L'instabilité apparaît alors pour $h^2 > 4(U^2 - 1)^2 = h_c^2$:

$$h_{c1} = \frac{\omega_1^2}{2\omega_0^2} - 2 \quad \text{et} \quad h_{c2} = 2 - \frac{\omega_2^2}{2\omega_0^2}$$

Avec ω_1 et ω_2 les pulsations associées fréquences haute et basses de rotation de la roue

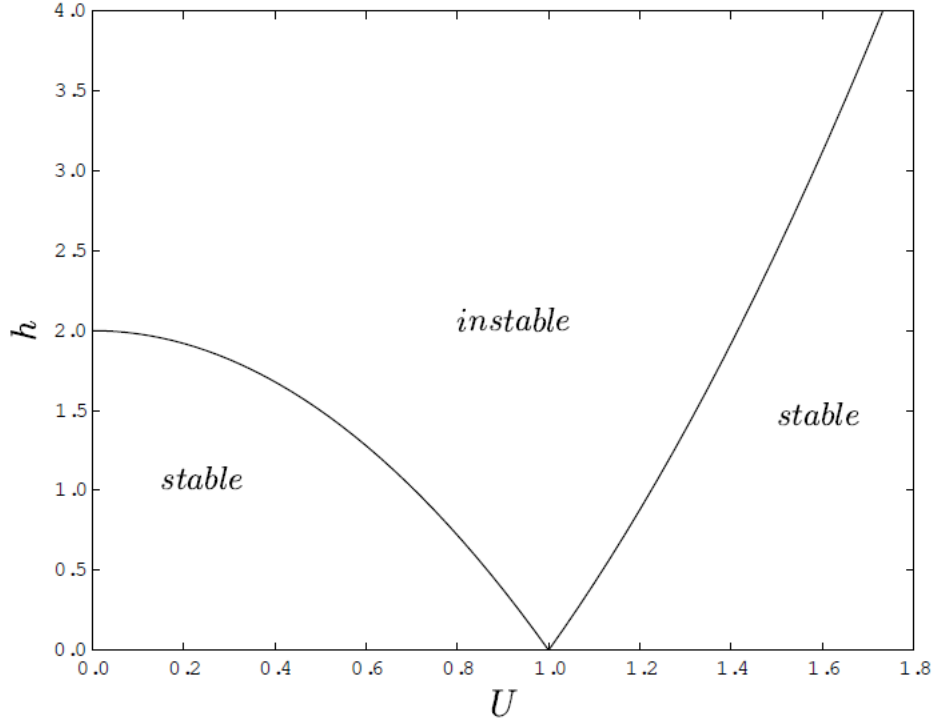


FIGURE 3 – Agregation 2019

Le temps caractéristique de mise en place de l'instabilité est, pour $h^2 = h_c^2 + \epsilon$:

$$\tau = \sqrt{\frac{8(1 + U^2)}{\omega_0^2 \epsilon}}$$

Mesure des paramètres :

Mesurer les longueurs maximale et minimale atteintes par le pendule lors des oscillations. On en déduit :

$$l_0 = \frac{L_{max} + l_{min}}{2} \quad ; \quad h = \frac{(l_{max} - l_{min})\gamma^2}{2g} \quad ; \quad U = \frac{\gamma}{2\omega_0}$$

Lancer le GBF pour faire tourner le moteur. Il faut prendre un critère de repérage de la résonance. On repère ainsi les fréquences de début et de fin de résonance, f_1 et f_2 . f_0 doit être à peu près égale à la moyenne de f_1 et f_2 .

On doit pouvoir vérifier la linéarité de f_1 et f_2 en fonction de h en changeant la roue du moteur.

Un exemple d'oscillateur paramétrique est évidemment l'encensoir de Saint-Jacques-de-Compostelle, le botafumeiro.

Conclusion

Les phénomènes de résonance, à l'origine d'une divergence des oscillations, sont parfois à éviter : cela peut causer la détérioration de matériaux (dans les voitures notamment, où les amortisseurs sont conçus pour éviter cela, dans la manière de construire les bâtiments pour qu'ils résistent aux tremblements de Terre), cf pont de Tacoma. Cependant, la résonance est à la base de tous les instruments à vent, et même des cordes vocales... On s'en sert pour fabriquer des laser, mais aussi faire de la RMN, ou optimise le fonctionnement du moteur 4 temps.