

# Théorie de Ramsey

Thomas BUDZINSKI

28 novembre 2022

## Introduction

La théorie de Ramsey est une branche de la combinatoire, dont les résultats sont souvent de la forme suivante : "si on colorie en  $r$  couleurs les éléments d'une certaine structure très grande, alors il existe une sous-structure assez grande dont tous les éléments sont de la même couleur". Autrement dit, le désordre complet n'existe pas. Voici les deux exemples les plus connus de résultats issus de cette théorie :

- Théorème de Ramsey : Soit  $k \geq 1$ . Si  $n$  est suffisamment grand, alors dans tout groupe de  $n$  personnes, on peut en trouver  $k$  qui sont deux à deux amies entre elles, ou bien  $k$  qui sont deux à deux non-amies entre elles.
- Théorème de Van der Waerden : Si on colorie les entiers naturels en  $r$  couleurs, alors il existe des progressions arithmétiques monochromes arbitrairement grandes.

De manière générale, les techniques utilisées sont très élémentaires, mais la théorie de Ramsey a des liens avec diverses branches des mathématiques : probabilités, théorie des nombres, logique, et même géométrie des espaces de Banach<sup>1</sup>. On verra aussi que de nombreuses questions qui peuvent sembler basiques sont toujours ouvertes. En particulier, l'écart entre les meilleures bornes inférieures et les meilleures bornes supérieures connues pour certains problèmes est parfois colossal !

**Quelques références.** Une référence assez complète sur le sujet est l'ouvrage de Graham, Rothschild et Spencer [7], qui couvre bien plus que le contenu de ces cours, et où les résultats sont en général présentés de la manière la plus générale possible. La partie sur la méthode probabiliste est largement issue de l'excellent livre d'Alon et Spencer [1], qui expose la méthode probabiliste ainsi que des applications à divers domaines, bien au-delà de la théorie de Ramsey. Enfin, si vous êtes curieux sur les liens entre la théorie de Ramsey, la logique et les fonctions à croissance (très, très) rapide, je recommande le livre récent de Katz et Reimann [9].

## 1 Théorème de Ramsey

**Principe des tiroirs.** Si le théorème de Ramsey est le "premier" théorème de la théorie de Ramsey, on commençons par mentionner le principe des tiroirs, qu'on peut considérer comme le "zéroième" théorème de la théorie.

---

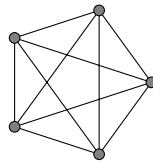
1. Ce dernier sujet a fait l'objet de travaux de Gowers, mais est trop avancé et ne sera pas abordé dans ce cours.

**Théorème 0** (Principe des tiroirs). Soient  $k, \ell \geq 2$ . Si on colorie en  $k$  couleurs les éléments d'un ensemble  $S$  de taille  $k(\ell - 1) + 1$ , alors il existe un sous-ensemble  $A \subset S$  de taille  $\ell$  dont tous les éléments sont de la même couleur.

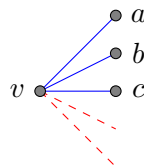
Il s'agit du résultat "de type Ramsey" le plus simple, puisque contrairement aux résultats qui suivront, l'ensemble  $S$  sous-jacent n'est muni d'aucune structure. Le principe des tiroirs sera très utilisé dans les démonstrations des prochains théorèmes.

**Définition 1.** Un *graphe* est un ensemble de sommets, reliés entre eux par des arêtes. Un *graphe complet* à  $n \geq 2$  sommets, noté  $K_n$ , est un graphe à  $n$  sommets où toute paire de sommets distincts  $x \neq y$  est reliée par un arête.

**Exemple 2.** Le graphe  $K_5$  :



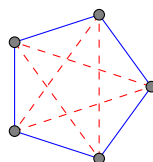
Avant d'aborder le théorème de Ramsey, commençons par un cas particulier : on colorie en bleu et rouge les arêtes de  $K_6$ . On va montrer qu'il existe soit un triangle tout bleu, soit un triangle tout rouge. Pour cela, on se fixe un sommet  $v$ .



Alors 5 arêtes sont issues de  $v$ , donc au moins 3 sont de la même couleur d'après le principe des tiroirs. Supposons par exemple qu'elles soient bleues. On appelle  $a, b$  et  $c$  les trois bouts (autres que  $v$ ) de ces trois arêtes :

- si deux sommets parmi  $a, b$  et  $c$  sont reliés par une arête bleue, alors ces deux sommets forment un triangle bleu avec  $v$  ;
- sinon, alors  $a, b$  et  $c$  forment un triangle rouge.

Par ailleurs, la figure ci-dessous montre qu'il est possible de colorier  $K_5$  sans triangle monochrome :



On dira donc que *le troisième nombre de Ramsey vaut 6*. Plus généralement, ceci motive la définition suivante.

**Définition 3.** Soient  $\ell, m \geq 2$ . On note  $R(\ell, m)$  le plus petit entier  $n$  tel que tout coloriage des arêtes de  $K_n$  en bleu et rouge admet un  $K_\ell$  bleu ou un  $K_m$  rouge (avec la convention  $R(\ell, m) = +\infty$  si un tel  $n$  n'existe pas).

Commençons par quelques remarques très simples :

- On a déjà vu que  $R(3, 3) = 6$ .
- Les nombres de Ramsey sont symétriques, i.e.  $R(\ell, m) = R(m, \ell)$  pour tous  $\ell, m$ .
- On a  $R(2, \ell) = R(\ell, 2) = \ell$  pour tout  $\ell$ . En effet, si toutes les arêtes de  $K_\ell$  sont rouges, alors on a un  $K_\ell$  rouge, et sinon on a une arête bleue et donc un  $K_2$  bleu.

Passons maintenant au théorème de Ramsey.

**Théorème 1** (Théorème de Ramsey). Pour tous  $\ell, m \geq 3$ , on a

$$R(\ell, m) \leq R(\ell - 1, m) + R(\ell, m - 1). \quad (1)$$

On a donc  $R(\ell, m) \leq \binom{\ell+m-2}{\ell-1}$  pour tous  $\ell, m \geq 2$ . En particulier, les nombres de Ramsey sont finis.

La finitude des nombres de Ramsey a été montrée par Ramsey en 1930 [10] avec un argument un peu compliqué. La version quantitative du théorème et la démonstration qui suit sont dues à Erdős et Szekeres [3]. Notons aussi que (1) évoque la formule du triangle de Pascal. L'apparition d'un coefficient binomial n'est donc pas surprenante.

*Démonstration.* On commence par l'inégalité (1). Si  $R(\ell - 1, m)$  ou  $R(\ell, m - 1)$  est infini, il n'y a rien à faire. Sinon, soit  $n = R(\ell - 1, m) + R(\ell, m - 1)$ . On considère un coloriage en bleu et rouge des arêtes de  $K_n$ . Comme plus haut, on fixe un sommet  $v$ . On note  $B$  (resp.  $C$ ) l'ensemble des sommets de  $K_n$  qui sont reliés à  $v$  par une arête bleue (resp. rouge). Alors on a

$$|B| + |C| = n - 1 = R(\ell - 1, m) + R(\ell, m - 1) - 1,$$

donc  $|B| \geq R(\ell - 1, m)$  ou  $|C| \geq R(\ell, m - 1)$ . Sans perte de généralité, supposons  $|B| \geq R(\ell - 1, m)$ . Par définition de  $R(\ell - 1, m)$ , l'ensemble  $B$  contient soit un  $K_{\ell-1}$  bleu, soit un  $K_m$  rouge. Dans le premier cas, on obtient un  $K_\ell$  bleu en ajoutant  $v$ . Dans le second, on a directement un  $K_m$  rouge, d'où  $R(\ell, m) \leq n$ .

On en déduit  $R(\ell, m) \leq \binom{\ell+m-2}{\ell-1}$  par récurrence sur  $\ell + m \geq 4$ . Le résultat est immédiat pour  $\ell + m = 4$ . Si de plus le résultat est montré pour tous  $\ell, m$  avec  $\ell + m = k - 1$ , soient  $\ell, m \geq 2$  avec  $\ell + m = 4$ . Si  $\ell$  ou  $m$  vaut 2, l'inégalité est immédiate. Sinon, par hypothèse de récurrence, on a

$$R(\ell, m) \leq R(\ell - 1, m) + R(\ell, m - 1) \leq \binom{m + \ell - 3}{\ell - 2} + \binom{m + \ell - 3}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 2}{\ell - 1}.$$

□

**Remarques 4.** 1. Cette borne donne  $R(3, 4) \leq 10$ , puis  $R(4, 4) \leq 20$  et  $R(3, 5) \leq 15$ . On a en fait  $R(3, 4) = 9$  et  $R(4, 4) = 18$ , ainsi que  $R(3, 5) = 14$  (voir TD).

2. En revanche, la valeur  $R(5, 5)$  est inconnue ! Les meilleures bornes connues sont

$$43 \leq R(5, 5) \leq 48.$$

La borne inférieure est issue de [4] ; et la borne supérieure de [2]. Elle ne date que de 2017. Pour  $R(10, 10)$ , l'écart devient important : les meilleures bornes connues sont  $798 \leq R(10, 10) \leq 23556$ . Pour plus d'informations sur les "petits" nombres de Ramsey, vous pouvez consulter la page Wikipédia du théorème de Ramsey.

3. Voici ce que disait Paul Erdős sur nos chances de calculer  $R(5, 5)$  et  $R(6, 6)$  :

*Suppose aliens invade the earth and threaten to obliterate it in a year's time unless human beings can find the Ramsey number for red five and blue five. We could marshal the world's best minds and fastest computers, and within a year we could probably calculate the value. If the aliens demanded the Ramsey number for red six and blue six, however, we would have no choice but to launch a preemptive attack.*

4. On peut aussi s'interroger sur l'asymptotique des nombres de Ramsey quand les paramètres tendent vers l'infini. Pour les nombres diagonaux  $R(\ell, \ell)$ , notre borne est de la forme

$$R(\ell, \ell) \leq \binom{2\ell - 2}{\ell - 1} \sim (1 + o(1)) \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{4^\ell}{\sqrt{\ell}}.$$

Les meilleures bornes asymptotiques connues sont les suivantes :

$$(1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} \ell \sqrt{2}^\ell \leq R(\ell, \ell) \leq \exp(-c(\log \ell)^2) 4^\ell,$$

où  $c$  est une constante strictement positive. La borne inférieure est due à Spencer [12] et date de 1970 (on donnera la preuve plus loin dans le cours), tandis que ma borne supérieure est un progrès très récent de Sah [11]. Notons que l'écart entre la borne supérieure et la borne inférieure reste considérable. Obtenir une borne supérieure en  $(4 - \varepsilon)^\ell$  ou une borne inférieure en  $(\sqrt{2} + \varepsilon)^\ell$  est considéré comme un problème ouvert majeur en combinatoire.

5. Enfin, on peut généraliser le théorème de Ramsey à des coloriage à plus de deux couleurs. On obtient des nombres de Ramsey de la forme  $R(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k)$ , qui sont eux aussi finis.

**Le théorème de Ramsey infini** On peut donner une version "infinie" du théorème de Ramsey.

**Théorème 2.** Soit  $S$  un ensemble dénombrable. On relie chaque paire d'éléments distincts de  $S$  par une arête soit bleue, soit rouge. Alors il existe un sous-ensemble  $A$  de  $S$  infini tel que toutes les arêtes reliant deux sommets de  $A$  soient de la même couleur.

Notons que le théorème de Ramsey fini nous garantit qu'on peut trouver des  $K_n$  monochromes arbitrairement grand, mais que la conclusion du théorème de Ramsey infini est bien plus forte !

*Démonstration.* On va construire, par récurrence sur  $n$ , une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $S$ , ainsi qu'une suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  de sous-ensembles de  $S$ , qui vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout  $n$ , l'ensemble  $S_n$  est infini ;
- pour tout  $n$ , on a  $S_{n+1} \subset S_n$  ;
- pour tout  $n$ , on a  $x_{n+1} \in S_n$  mais  $x_n \notin S_n$  ;
- pour tout  $n$ , les arêtes reliant  $x_n$  aux sommets de  $S_n$  sont toutes de la même couleur, notée  $c_n$ .

L'idée derrière cette construction est que le sommets  $x_1$  va jouer le même rôle que le  $v$  de la preuve précédente, mais comme on raisonne sur un ensemble infini, on doit itérer la construction une infinité de fois plutôt que de faire une récurrence.

Passons à la construction. On choisit  $x_1$  quelconque, et on choisit une couleur  $c_1$  telle qu'il y a une infinité d'arêtes de couleur  $c_1$  issues de  $x_1$ . On note  $S_1$  l'ensemble des sommets de  $S$  reliés

à  $x_1$  par une arête de couleur  $c_1$ . Puis on itère cette construction : si  $x_n$  et  $S_n$  ont été construits, on choisit  $x_{n+1} \in S_n$  arbitrairement. Comme  $S_n$  est infini par hypothèse de récurrence, il existe une couleur  $c_{n+1}$  qui apparaît une infinité de fois dans les arêtes entre  $x_{n+1}$  et  $S_n \setminus \{x_{n+1}\}$ . Enfin, on note  $S_{n+1}$  l'ensemble des sommets de  $S_n$  qui sont reliés à  $x_{n+1}$  par une arête de la couleur  $c_{n+1}$ . Par construction, on vérifie facilement que  $x_{n+1}$  et  $S_{n+1}$  vérifient toutes les propriétés voulues.

Pour terminer la preuve, on note qu'il existe une couleur qui apparaît une infinité de fois dans la liste  $(c_n)_{n \geq 1}$ . Sans perte de généralité, supposons que c'est le bleu, et posons

$$A = \{x_n \mid c_n = \text{bleu}\}.$$

Si deux sommets sont dans  $A$ , ils sont de la forme  $x_m, x_n$  avec  $m < n$ . Alors  $x_n \in S_{n-1} \subset S_m$ , donc comme  $c_m = \text{bleu}$ , ces deux sommets sont reliés par une arête bleue, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Bien que les preuves soient similaires, le théorème de Ramsey infini est "plus fort" que la version finie. En effet, on ne peut pas déduire la version infinie de la version finie, mais l'inverse est possible. On obtient un théorème fini moins quantitatif que celui obtenu ci-dessus, mais on présente quand même l'argument car il s'agit d'un type d'argument très classique en combinatoire.

*Démonstration de la finitude des nombres de Ramsey en utilisant le théorème infini :* Soit  $\ell \geq 3$ . On veut montrer qu'il existe  $n \geq 1$  tel que tout coloriage des arêtes de  $K_n$  en bleu et rouge admet un  $K_\ell$  monochrome. On raisonne par l'absurde et on identifie, pour tout  $n$ , les sommets de  $K_n$  avec les entiers  $1, 2, \dots, n$ . Alors pour tout  $n$ , il existe un coloriage  $C_n$  des arêtes  $(i, j)$  avec  $1 \leq i < j \leq n$  pour lequel, pour tout  $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$  de cardinal  $\ell$ , les arêtes dans  $A$  ne sont pas toutes de la même couleur. À partir des  $C_n$ , on va construire un coloriage infini  $C$  qui contredira le théorème de Ramsey infini.

Soit donc  $C(1, 2)$  une couleur qui apparaît une infinité de fois dans la liste  $(C_n(1, 2))_{n \geq 1}$ , et soit  $S_{1,2}$  l'ensemble des  $n$  tels que  $C_n(1, 2) = C(1, 2)$ . Puis soit  $C(1, 3)$  une couleur qui apparaît une infinité de fois dans la liste  $(C_n(1, 3))_{n \in S_{1,2}}$ , et soit  $S_{1,3}$  l'ensemble des  $n \in S_{1,2}$  tels que  $C_n(1, 3) = C(1, 3)$ . Puis soit  $C(2, 3)$  une couleur qui apparaît une infinité de fois dans la liste  $(C_n(2, 3))_{n \in S_{1,3}}$ , et soit  $S_{2,3}$  l'ensemble des  $n \in S_{1,3}$  tels que  $C_n(2, 3) = C(2, 3)$ . Et on continue ainsi de suite : on définit de même  $C(1, 4)$  et  $S_{1,4} \subset S_{2,3}$ , puis  $C(2, 4)$  et  $S_{2,4}$ , et ainsi de suite. On définit ainsi  $C(i, j)$  et  $S_{i,j}$  pour toute paire  $i < j$  d'entiers naturels, puisque ces paires sont dénombrables.

On note qu'alors, pour tout  $k$ , l'ensemble  $S_{k,k+1}$  est infini, et pour tous  $n \in S_{k,k+1}$  et  $1 \leq i < j \leq k$ , on a  $C_n(i, j) = C(i, j)$ . Soit maintenant  $A \subset \mathbb{N}^*$  de taille  $\ell$ , et soit  $k = \max(A)$ . Soit aussi  $n \in S_{k,k+1}$ . Alors pour tous  $i < j$  dans  $A$ , on a  $C(i, j) = C_n(i, j)$ . En particulier, comme  $A$  n'est pas monochrome pour le coloriage  $C_n$ , il ne l'est pas non plus pour  $C$ . Le coloriage  $C$  n'admet donc pas de  $K_\ell$  monochrome, ce qui contredit le théorème de Ramsey infini.  $\square$

**Remarque 5.** L'argument qu'on vient de voir consiste à réaliser une extraction diagonale, ce qui n'est pas sans rappeler certains arguments de topologie (en particulier, la preuve du théorème de Tychonov, dans le cas particulier d'un produit dénombrable d'espaces métriques). Ce n'est pas une coïncidence : cet argument est appelé *argument de compacité* en combinatoire. En effet, notre preuve a consisté à extraire une valeur d'adhérence de la suite de coloriages  $(C_n)$  (pour une

certaine topologie<sup>2</sup> sur l'espace des coloriage). Le dernier paragraphe de la preuve, lui, consiste à montrer que l'ensemble des coloriage sans  $K_\ell$  monochrome est un fermé.

## 2 Théorème de Van der Waerden

Le théorème de Van der Waerden est un théorème du même type que celui de Ramsey, mais où la structure sous-jacente n'est plus une structure de graphe, mais est donnée par l'addition dans les entiers naturels.

**Définition 6.** Soit  $k \geq 2$ . Une *progression arithmétique de longueur  $k$*  est un ensemble d'entiers naturels de la forme  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d\}$  avec  $a, d \geq 1$ .

**Théorème 3** (Van der Waerden, 1927). Soient  $k, r \geq 2$ . Il existe  $N$  tel que tout coloriage en  $r$  couleurs des entiers de 1 à  $N$  admet au moins une progression arithmétique monochrome de longueur  $k$ . On notera  $W(k, r)$  le plus petit entier  $N$  vérifiant cette propriété.

**Remarques 7.** — Ce théorème est équivalent à la version (plus faible en apparence) suivante : "Tout coloriage des entiers naturels en  $r$  couleurs admet une progression arithmétique monochrome de longueur  $k$ ". Un sens est immédiat, et l'autre se montre avec le même argument de compacité que celui utilisé ci-dessus pour le théorème de Ramsey.  
— Le cas  $k = 2$  découle du principe des tiroirs, et on a  $W(2, r) = r + 1$  pour tout  $r \geq 2$ .

Ce théorème a été montré par Van der Waerden dans [13]. La preuve qu'on va présenter est due à Graham et Rotschild en 1974 [8]. Signalons aussi qu'une preuve reposant sur des arguments topologiques plutôt que combinatoires a été trouvée par Furstenberg et Weiss [5].

**Le cas  $(k, r) = (3, 2)$ .** Avant de s'attaquer au cas général, on va traiter le premier cas non trivial : le cas  $(k, r) = (3, 2)$ . Plus précisément, on va montrer que  $W(3, 2) \leq 325$ . Cette borne est très mauvaise (on a en fait  $W(3, 2) = 9$ ), mais la preuve contient une bonne partie des idées du cas général.

On sépare donc les entiers de 1 à 325 en 65 blocs  $B_1, \dots, B_{65}$  de longueur 5, i.e.  $B_i = \{5(i - 1) + 1, 5(i - 1) + 2, \dots, 5i\}$ . Il y a  $2^5 = 32$  manières de colorier un bloc en bleu et rouge, donc parmi les blocs  $B_1, \dots, B_{33}$ , il existe deux blocs  $B_i$  et  $B_{i+d}$  coloriés de manière identique.

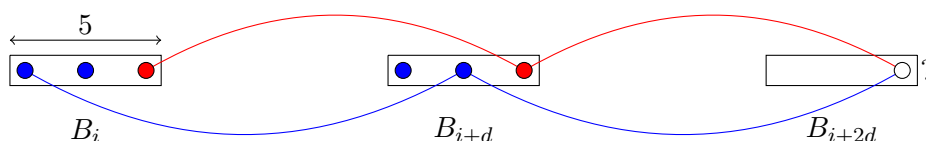


FIGURE 1 – Illustration de la preuve du théorème de Van der Waerden pour  $k = 3$  et  $r = 2$ .

Parmi les trois premiers éléments du bloc  $B_i$ , deux sont de la même couleur, disons bleue. Supposons que ce sont le premier et le troisième (les autres cas se traitent de manière similaire). Alors, si il n'y a pas de progression arithmétique monochrome de longueur 3 :

2. Plus précisément, cette topologie provient par exemple de la métrique  $d(C, C') = 2^{-k(C, C')}$ , où  $k(C, C')$  est le plus petit entier  $k$  pour lequel il existe  $i < k$  tel que  $C(i, k) \neq C'(i, k)$ .

- $5(i-1)+1$  et  $5(i-1)+3$  sont bleus, donc  $5(i-1)+5$  est rouge ;
- les blocs  $B_i$  et  $B_{i+d}$  sont identiques, donc  $5(i+d-1)+1$  et  $5(i+d-1)+3$  sont bleus, et  $5(i+d-1)+5$  est rouge.

Mais alors  $\{5(i-1)+5, 5(i+d-1)+5, 5(i+2d-1)+5\}$  et  $\{5(i-1)+1, 5(i+d-1)+3, 5(i+2d-1)+5\}$  sont deux progressions arithmétiques de raisons respectives  $5d$  et  $5d+2$ , donc  $5(i+2d-1)+5$  ne peut être ni rouge ni bleu, ce qui est impossible.

Notons que dans cet argument, on a utilisé deux fois le principe des tiroirs, c'est-à-dire le théorème de Van der Waerden pour  $r = 2$  : la première fois sur un coloriage à 32 couleurs, et la deuxième fois sur un coloriage à 2 couleurs. On sent donc que pour montrer le théorème pour  $(k+1, r)$ , on peut avoir besoin du théorème pour  $(k, r')$  avec  $k'$  bien plus grand que  $r$ .

**Le cas  $(k, r) = (3, 3)$ .** Il semble donc que dans le théorème de Van der Waerden, il est plus facile d'augmenter le nombre de couleurs  $r$  que la couleur  $k$ . Le cas le plus naturel à traiter est donc maintenant  $(k, r) = (3, 3)$ . On va donc maintenant montrer la borne :

$$W(3, 3) \leq t(2 \times 3^t + 1),$$

où  $t = 7(2 \times 3^7 + 1) = 30625$ . À nouveau, cette borne est abominable, puisqu'on a en fait  $W(3, 3) = 27$ .

Comme précédemment, on sépare les entiers de 1 à  $t(2 \times 3^t + 1)$  en  $2 \times 3^t + 1$  blocs  $B_i$  de longueur  $t$ . Il y a  $3^t$  manières de colorier un bloc en bleu, rouge et vert, donc il y a deux blocs identiques  $B_{i_1}, B_{i_1+d_1}$  parmi les  $3^t + 1$  premiers, de sorte que  $i_1 + 2d_1 \leq 2 \times 3^t + 1$ .

On divise maintenant chaque bloc  $B_i$  en  $2 \times 3^7 + 1$  sous-blocs  $B_{i,j}$  de longueur 7. Il y a  $3^7$  manières de colorier un sous-bloc en bleu, rouge et vert, donc il existe  $1 \leq i_2 < i_2+d_2 \leq 3^7+1$  tels que les sous-blocs  $B_{i_1,i_2}$  et  $B_{i_1,i_2+d_2}$  sont coloriés de manière identique, et on a  $i_2+2d_2 \leq 2 \times 3^7+1$ .

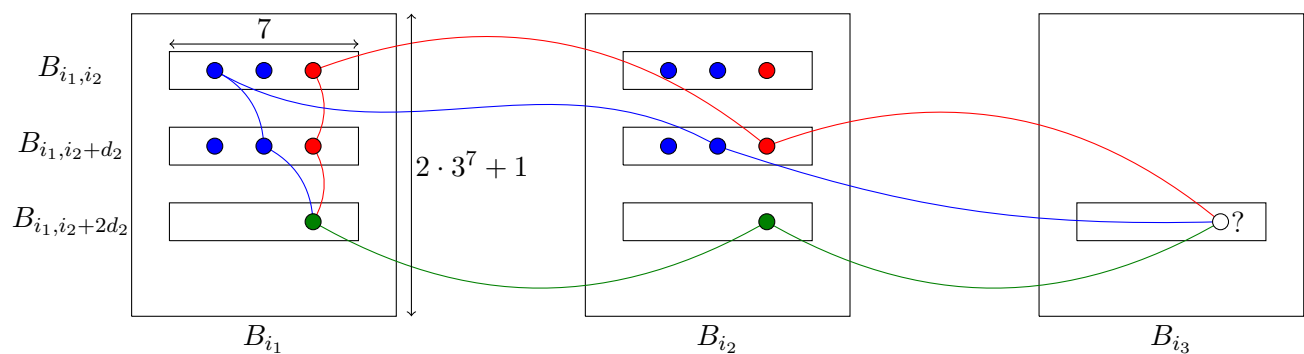


FIGURE 2 – Illustration de la preuve du théorème de Van der Waerden pour  $k = r = 3$ .

Parmi les 4 premiers éléments du sous-bloc  $B_{i_1, i_2}$ , il y en a 2 de la même couleur. Supposons qu'ils sont bleus, et sont en positions  $i_3$  et  $i_3 + d_3$  dans le sous-bloc. Si on a pas de progressions arithmétique monochrome de longueur 3, alors :

- l'élément en position  $i_3 + 2d_3$  dans  $B_{i_1, i_2}$  (soit  $(i_1 - 1)t + (i_2 - 1) \times 7 + (i_3 + 2d_3)$ ) n'est pas bleu, donc on suppose qu'il est rouge ;
- les éléments en position  $i_3 + 2d_3$  des sous-blocs  $B_{i_1, i_2+d_2}$ ,  $B_{i_1+d_1, i_2}$  et  $B_{i_1+d_1, i_2+d_2}$  sont aussi rouges ;

— on a les deux progressions suivantes de longueur 3 :

$$\{(i_1-1)t+(i_2-1)\times 7+i_3, (i_1-1)t+(i_2+d_2-1)\times 7+i_3+d_3, (i_1-1)t+(i_2+2d_2-1)\times 7+i_3+2d_3\},$$

$$\{(i_1-1)t+(i_2-1)\times 7+i_3+2d_3, (i_1-1)t+(i_2+d_2-1)\times 7+i_3+2d_3, (i_1-1)t+(i_2+2d_2-1)\times 7+i_3+2d_3\},$$

de raisons respectives  $7d_2 + d_3$  et  $7d_2$ . Par conséquent, le nombre  $(i_1 - 1)t + (i_2 + 2d_2 - 1) \times 7 + i_3 + 2d_3$  ne peut être ni bleu ni rouge, donc il est vert. Le nombre  $(i_1 + d_1 - 1)t + (i_2 + 2d_2 - 1) \times 7 + i_3 + 2d_3$  est donc aussi vert.

Mais alors, le nombre  $(i_1 + 2d_1 - 1)t + (i_2 + 2d_2 - 1) \times 7 + (i_3 + 2d_3)$  n'a plus aucune couleur disponible, à cause des trois progressions arithmétiques suivantes :

$$\{(i_1-1)t+(i_2-1)7+i_3, (i_1+d_1-1)t+(i_2+d_2-1)7+i_3+d_3, (i_1+2d_1-1)t+(i_2+2d_2-1)7+i_3+2d_3\},$$

$$\{(i_1-1)t+(i_2-1)7+i_3+2d_3, (i_1+d_1-1)t+(i_2+d_2-1)7+i_3+2d_3, (i_1+2d_1-1)t+(i_2+2d_2-1)7+i_3+2d_3\},$$

$$\{(i_1-1)t+(i_2+2d_2-1)7+i_3+2d_3, (i_1+d_1-1)t+(i_2+2d_2-1)7+i_3+2d_3, (i_1+2d_1-1)t+(i_2+2d_2-1)7+i_3+2d_3\}.$$

**Progressions de dimension supérieure.** Une observation importante sur cet argument est que pour trouver notre progression arithmétique monochrome, on passe par un objet de "dimension 3", c'est-à-dire qu'on repère nos entiers par les trois coordonnées  $(i_1, i_2, i_3)$  (dans le cas  $r = 2$ , on avait seulement besoin de deux coordonnées). La première étape est donc de définir la structure de "dimension supérieure" que l'on va rechercher.

**Définition 8.** — Soient  $d_1, \dots, d_m \geq 1$ . Une *progression arithmétique de dimension  $m$ , de longueur  $\ell$  et de raison  $(d_1, \dots, d_m)$*  est un ensemble de la forme

$$\{a + d_1x_1 + \dots + d_mx_m \mid 0 \leq x_1, \dots, x_m \leq \ell - 1\},$$

où  $a \geq 1$ .

— De plus, pour  $0 \leq i \leq m$ , on définit le  *$i$ -ème bord* de cette progression comme l'ensemble des  $a + d_1x_1 + \dots + d_mx_m$  où  $x_1 = \dots = x_i = \ell$ , et  $0 \leq x_{i+1}, \dots, x_m \leq \ell - 1$ .

Dans ce cadre, notre preuve dans le cas  $(k, r) = (3, 2)$  peut s'interpréter de la manière suivante : on commence par trouver une progression bleue de longueur 2 et dimension 2. On montre ensuite que tous les points de son premier bord sont rouges, puis on obtient une contradiction en regardant le second bord. De même, pour  $(k, r) = (3, 3)$ , on trouve une progression de dimension 3 et longueur 2 telle que la progression est monochrome (bleue), de même que son premier bord (rouge) et son second (vert). Le troisième bord fournit alors une contradiction.

Dans le cas général, on va montrer l'énoncé suivant, qu'on notera  $S(\ell, m)$  :

"Pour tout  $r \geq 2$ , il existe  $N(\ell, m, r)$  tel que, pour tout coloriage en  $r$  couleurs de  $\{1, 2, \dots, N(\ell, m, r)\}$ , il existe une progression arithmétique  $P$  de longueur  $\ell$  et de dimension  $m$  telle que pour tout  $0 \leq i \leq m$ , le  $i$ -ème bord de  $P$  est monochrome."

**Exemple 9.** Pour  $\ell = 3$  et  $m = 2$ , cela revient à trouver  $a, d_1, d_2 \geq 1$  tels que  $a + 3d_1 + 3d_2 \leq N$  et tels que :

- $a, a + d_1, a + 2d_1, a + d_2, a + d_1 + d_2, a + 2d_1 + d_2, a + 2d_2, a + d_1 + 2d_2, a + 2d_1 + 2d_2$  sont de la même couleur ;
- $a + 3d_1, a + 3d_1 + d_2, a + 3d_1 + 2d_2$  sont de la même couleur ;



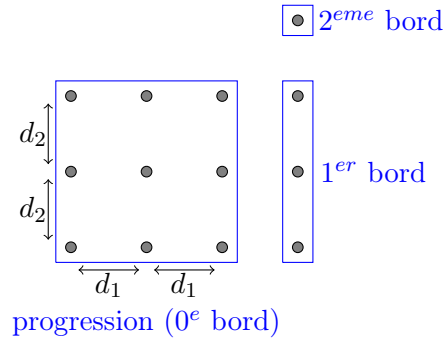


FIGURE 3 – Illustration d’une progression arithmétique de dimension 2 et de longueur 3. Le point de coordonnées  $(x_1, x_2)$  représente l’entier  $a + d_1x_1 + d_2x_2$ .

—  $\{a + 3d_1 + 3d_2\}$  est monochrome (ce dernier point est évident).

Le théorème de Van der Waerden étant le cas  $m = 1$ , il est suffisant de montrer que l’énoncé  $S(\ell, m)$  est vrai pour tous  $\ell \geq 2$  et  $m \geq 1$ . On va montrer cet énoncé par récurrence : comme les petits cas traités plus haut suggèrent de trouver une progression de longueur 2 et de grande dimension avant de trouver une progression de dimension 3, on va chercher à augmenter d’abord la dimension, puis la longueur.

*Preuve de  $S(\ell, m)$ .* On va montrer l’énoncé  $S(m, \ell)$  par récurrence double. Plus précisément :

- $S(2, 1)$  est immédiat par le principe des tiroirs, avec  $N(2, 1, r) = r + 1$  ;
- on va montrer que l’énoncé  $(S(\ell, 1) \text{ et } S(\ell, m))$  implique  $S(\ell, m + 1)$  (étape 1) ;
- on va montrer que l’énoncé  $(\forall m \geq 1, S(\ell, m))$  implique  $S(\ell + 1, 1)$  (étape 2).

Commençons par l’étape 1. On suppose que  $S(\ell, 1)$  et  $S(\ell, m)$  sont vrais, et on montre  $S(\ell, m + 1)$ . Pour cela, on fixe  $r \geq 2$ . On pose  $M = N(\ell, m, r)$  et  $M' = N(\ell, 1, r^M)$ , et on va montrer que  $N(\ell, m + 1, r) \leq MM'$ .

Pour cela, soit  $C$  un coloriage en  $r$  couleurs des entiers de 1 à  $MM'$ . On coupe  $\{1, 2, \dots, MM'\}$  en  $M'$  blocs de taille  $M$ , et on définit un coloriage  $C'$  de  $\{1, 2, \dots, M'\}$  en  $r^M$  couleurs comme suit :

$$C'(i_1) = C'(i_2) \quad \text{si et seulement si} \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}, C((i_1 - 1)M + j) = C((i_2 - 1)M + j).$$

Autrement dit, on voit chaque manière possible de colorier en  $r$  couleurs un bloc de longueur  $M$  comme le choix d’une "super-couleur" parmi  $r^M$  possibles. Par choix de  $M'$ , il existe alors  $a', d' \geq 1$  tels que

$$C'(a') = C'(a' + d') = \dots = C'(a' + (\ell - 1)d').$$

Cela signifie que pour tout  $1 \leq j \leq M$ , on a

$$C((a' - 1)M + j) = C((a' + d' - 1)M + j) = \dots = C((a' + (\ell - 1)d' - 1)M + j). \quad (2)$$

De plus, par définition de  $M$ , le bloc  $\{(a' - 1)M + 1, \dots, a'M\}$  contient une progression arithmétique de longueur  $\ell$  et de dimension  $m$  dont tous les bords sont monochromes. Soient  $a \in \{(a' - 1)M + 1, \dots, a'M\}$  son premier terme et  $(d_1, \dots, d_m)$  sa raison. On vérifie maintenant la conclusion de  $S(\ell, m + 1)$  avec la progression de premier terme  $a$ , et de raison  $(d_1, \dots, d_m, d'M)$ . Pour cela, soit  $0 \leq i \leq m + 1$ , et considérons le  $i$ -ème bord de cette progression :

- si  $i = m + 1$ , alors le  $i$ -ème bord est un singleton, donc il est monochrome ;
- si  $i \leq m$ , alors les nombres de la forme

$$a + x_1 d_1 + \dots + x_m d_m + x_{m+1} d' M$$

avec  $x_1 = \dots = x_i = \ell$  et  $0 \leq x_{i+1}, \dots, x_m \leq \ell - 1$  et  $x_{m+1} = 0$  sont tous de la même couleur (il s'agit du  $i$ -ème bord de la progression de dimension  $m$  qu'on a trouvée dans le bloc). De plus, ces nombres restent de la même couleur si on fait varier  $x_{m+1}$  entre 0 et  $\ell - 1$  d'après (2).

Passons maintenant à l'étape 2. On suppose que  $S(\ell, m)$  est vraie pour tout  $m$ , et on fixe  $r \geq 2$ . On va montrer que  $N(\ell + 1, 1, r) \leq N(\ell, r, r)$ , ce qui prouvera  $S(\ell + 1, 1)$ . Cela revient à exiger une progression de longueur  $\ell$  et de dimension le nombre de couleurs afin de passer à  $\ell + 1$ , comme on l'a déjà fait sur deux exemples.

Soit donc  $C$  un coloriage en  $r$  couleurs des entiers de 1 à  $N(\ell, r, r)$ . On sait qu'il existe une progression  $P$  de dimension  $r$  et de longueur  $\ell$  dont tous les bords sont monochromes. Soient  $a$  son premier terme et  $(d_1, \dots, d_r)$  sa raison. Alors d'après le principe des tiroirs, il existe  $0 \leq u < v \leq r + 1$  tels que le  $u$ -ème et le  $v$ -ème bords de  $P$  sont de la même couleur. Mais alors, le nombre

$$a + \ell d_1 + \dots + \ell d_u + x(d_{u+1} + \dots + d_v)$$

est sur le  $u$ -ème bord de  $P$  pour  $0 \leq x \leq \ell - 1$ , et sur le  $v$ -ème bord de  $P$  pour  $x = \ell$ . Or, ces  $\ell + 1$  nombres forment une progression arithmétique, donc on a bien trouvé une progression monochrome de longueur  $\ell + 1$  et de dimension 1. Son premier (et seul) bord est un singleton, donc il est monochrome aussi.  $\square$

**Étude quantitative de la borne obtenue.** On rappelle que la notation  $W(k, r)$  désigne les nombres de Van der Waerden, et que  $N(\ell, m, r)$  désigne la borne fournie par l'énoncé  $S(\ell, m)$  (i.e. jusqu'où aller pour trouver une progression de longueur  $\ell$  et dimension  $m$  en partant d'un coloriage à  $r$  couleurs). Alors on a  $W(k, r) \leq N(k, 1, r)$ . De plus, en reprenant les étapes de notre preuve, on a :

- $N(2, 1, r) = r + 1$ ,
- $N(\ell, m + 1, r) = N(\ell, m, r) \times N(\ell, 1, r^{N(\ell, m, r)})$ ,
- $N(\ell + 1, 1, r) = N(\ell, r, r)$ .

Regardons ce que cela donne pour de petites valeurs de  $\ell$  et  $m$ . On a :

- $N(2, 2, r) = (r + 1)N(2, 1, r^{r+1}) > r^r$ ,
- $N(2, 3, r) \geq N(2, 1, r^{N(2, 2, r)}) > r^{r^r}$ ,
- $N(2, 4, r) \geq N(2, 1, r^{N(2, 3, r)}) > r^{r^{r^r}}$

et ainsi de suite, soit

$$N(2, m, r) > \underbrace{r^{r^{\dots^r}}}_{m \text{ fois}}.$$

On a donc

$$N(3, 1, r) = N(2, r, r) > \underbrace{r^{\dots^r}}_{r \text{ fois}},$$

ce qui donne en particulier l'ordre de grandeur de notre borne pour  $W(3, r)$ . On a ensuite

$$N(3, 2, r) = N(3, 1, r)N(3, 1, r^{N(3, 1, r)}) \geq N\left(3, 1, \underbrace{r^{\dots^r}}_{r \text{ fois}}\right) > \underbrace{r^{\dots^r}}_{r \text{ fois}},$$

puis

$$N(3, 3, r) > \underbrace{\underbrace{r^{\dots^r}}_{r \text{ fois}}}_{r \text{ fois}},$$

et plus généralement

$$N(3, m, r) > \underbrace{\underbrace{\underbrace{r^{\dots^r}}_{r \text{ fois}}}_{r \text{ fois}}}_{r \text{ fois}},$$

avec  $m$  étage. En particulier,  $N(4, 1, r)$  est donné par la même expression mais avec  $r$  étages, ce qui donne la borne sur  $W(4, r)$ . Le nombre  $N(4, 2, r)$  s'écrit ensuite de la même manière mais nécessite deux colonnes, et  $N(5, 1, r)$  nécessite  $r$  colonnes. Ensuite, il devient trop compliqué d'essayer d'écrire les bornes explicitement.

Pour se donner un point de comparaison, on va définir une hiérarchie de croissance, c'est-à-dire une famille de fonctions croissant de plus en plus vite. On définit donc par récurrence la suite de fonctions  $(f_n)$  sur les entiers naturels de la manière suivante :

- $f_1(x) = 2x$ ,
- $f_{n+1}(x) = \underbrace{f_n \circ f_n \circ \dots \circ f_n}_{x \text{ fois}}(1)$ ,
- $f_\infty(x) = f_x(x)$ .

Alors on a  $f_2(x) = 2^x$ , puis

$$f_3(x) = \underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{x \text{ fois}},$$

et

$$f_4(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{2^{\dots^2}}_{2 \text{ fois}}}_{2 \text{ fois}}}_{2 \text{ fois}},$$

avec  $x$  étages. On peut alors vérifier que la borne sur  $W(k, 2)$  fournie par la preuve ci-dessus est comprise entre  $f_\infty(k-2)$  et  $f_\infty(k)$ . C'est le même ordre de grandeur que la fonction d'Ackermann. À titre de comparaison, on verra plus tard dans le cours une borne en  $f_4(k)$ , et la meilleure borne supérieure connue sur les nombres de Van der Waerden est la suivante, due à Gowers [6] :

$$W(k, r) \leq 2^{2^{r \cdot 2^{k+9}}}.$$

D'un autre côté, les meilleures bornes inférieures sont de type exponentiel (on verra une borne d'ordre  $r^k$ ).

### 3 Théorème de Hales–Jewett

La preuve du théorème de Van der Waerden qu'on a vue suggère qu'il peut être intéressant de montrer des théorèmes de type Ramsey pour des structures de dimension plus grande. C'est le but du théorème de Hales–Jewett, qui montre en quelque sorte qu'un morpion en dimension suffisamment grande ne peut pas se terminer par un match nul.

Pour tous  $n \geq 1$  et  $t \geq 2$ , on définit donc l'hypercube  $C_t^n$  comme l'ensemble des  $n$ -uplets  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  avec  $x_i \in \{1, \dots, t\}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

**Définition 10.** Une *ligne* de  $C_t^n$  est une suite de  $t$  points  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^t$  de  $C_t^n$  tels que :

- pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a soit  $x_i^1 = x_i^2 = \dots = x_i^t$ , soit  $x_i^j = j$  pour tout  $1 \leq j \leq t$  ;
- il existe au moins un  $i$  pour lequel on est dans le second cas.

**Remarque 11.** Cette notion ne coïncide pas tout à fait avec la notion de droite en algèbre linéaire, car on autorise pas une coordonnée à décroître tandis qu'une autre croît. Par ailleurs, la seconde condition garantit que nos lignes ne sont pas réduites à un point.

**Exemple 12.** Dans  $C_3^2$  (morpion classique), la diagonale  $\{11, 22, 33\}$  est une ligne, mais pas  $\{13, 22, 31\}$ . Dans  $C_4^4$ , l'ensemble  $\{2111, 2122, 2133, 2144\}$  est une ligne.

**Théorème 4** (Hales–Jewett, 1963). Soient  $r \geq 2$  et  $t \geq 1$ . Il existe  $N$  tel que tout coloriage de  $C_t^N$  en  $r$  couleurs admet une ligne monochrome. On note  $HJ(t, r)$  le plus petit  $N$  vérifiant cette propriété.

**Remarque 13.** Si on avait choisi de limiter la définition d'une ligne aux lignes parallèles aux axes (i.e. où  $x_i^1 = \dots = x_i^n$  pour toutes les coordonnées  $i$  sauf une), le théorème ne pourrait pas être vrai même pour  $r = t = 2$ , comme le montre le coloriage où  $\mathbf{x}$  est colorié en bleu si  $\sum_{i=1}^n x_i$  est pair et en rouge si cette somme est impaire.

Une des motivations du théorème de Hales–Jewett est qu'il implique celui de Van der Waerden, avec des bornes "proches".

**Proposition 14.** Le théorème de Hales–Jewett implique celui de Van der Waerden, avec

$$W(k, r) \leq k^{HJ(k, r)}.$$

*Démonstration.* Soit  $N = HJ(k, r)$ . À tout  $0 \leq a \leq k^N - 1$ , on associe ses chiffres  $(a)_0, (a)_1, \dots, (a)_{N-1}$  en base  $k$ , c'est-à-dire que

$$a = \sum_{i=0}^{N-1} (a)_i k^i,$$

avec  $0 \leq (a)_i \leq k - 1$  pour tout  $t$ . On note alors  $\tilde{a} = ((a)_0 + 1, \dots, (a)_{N-1} + 1) \in C_k^N$ . Alors tout coloriage de  $\{0, \dots, k^N - 1\}$  induit un coloriage de  $C_k^N$  via l'application  $a \rightarrow \tilde{a}$ . D'après le théorème de Hales–Jewett, ce coloriage contient une ligne monochrome. Il existe donc  $a^1, \dots, a^k$  de la même couleur tels que pour tout  $0 \leq i \leq N - 1$ , on ait

$$(a^1)_i = \dots = (a^k)_i$$

ou

$$(a^1)_i = 0, \quad (a^2)_i = 1, \quad \dots, \quad (a^k)_i = k - 1.$$

On note  $I$  l'ensemble des indices pour lesquels on est dans le second cas, de sorte que  $I \neq \emptyset$ . Alors pour tout  $j$ , on a

$$a^{j+1} - a^j = \left( \sum_{i=0}^{N-1} (a^{j+1})_i k^i \right) - \left( \sum_{i=0}^{N-1} (a^j)_i k^i \right) = \sum_{i \in I} k^i,$$

qui est non nul et ne dépend pas de  $j$ . Les nombres  $a^1, \dots, a^k$  forment donc une progression arithmétique monochrome de longueur  $k$  et de raison  $\sum_{i \in I} k^i$ .  $\square$

On va donner deux preuves du théorème de Hales–Jewett (la première ne sera qu'une esquisse et la seconde sera complète).

*Première démonstration du théorème de Hales–Jewett.* On adapte la preuve du théorème de Van der Waerden : dans le cube  $C_{t+1}^n$ , on définit une notion de "sous-espace de dimension  $k$  et de longueur  $t$ ", et de bords de ce sous-espace. L'adaptation est très naturelle, puisque la définition des progressions arithmétiques de dimension supérieure et de leurs bords faisait déjà appel à des coordonnées. On montre ensuite par récurrence double (sur  $k$ , puis sur  $t$ ) que si  $n$  est assez grand, alors tout coloriage de  $C_{t+1}^n$  admet des "sous-espaces" de dimension  $k$  dont tous les bords sont monochromes. La borne obtenue sur les nombres  $HJ(t, r)$  par cette preuve est alors de type Ackermann, tout comme celle qu'on a déjà obtenu sur les nombres de Van der Waerden.  $\square$

**Seconde démonstration du théorème de Hales–Jewett.** L'idée grossière est la suivante : on raisonne à nouveau par récurrence sur  $t$ . On va d'abord chercher à construire un sous-espace de dimension assez grande à l'intérieur duquel les couleurs ne changent pas si une coordonnée égale à  $t - 1$  est remplacée par  $t$ . On utilise ensuite l'hypothèse de récurrence pour trouver une ligne de longueur  $t - 1$  dans ce sous-espace, puis l'hypothèse garantira qu'on peut prolonger cette ligne de 1. Un avantage majeur de cette preuve est que la récurrence se fera à  $r$  fixé, ce qui explique en partie qu'on obtienne une borne meilleure que dans la preuve précédente (en  $f_4$  plutôt que  $f_\infty$ ).

On a donc besoin d'une notion de sous-espace de dimension plus grande que 1.

**Définition 15.** Soient  $n_1, \dots, n_k \geq 1$ , et soit  $n = n_1 + \dots + n_k$ . On identifie  $C_t^n$  avec  $C_t^{n_1} \times C_t^{n_2} \times \dots \times C_t^{n_k}$  en regroupant les coordonnées par blocs de longueurs  $n_1, \dots, n_k$ . Un *sous-espace de dimension  $k$*  de  $C_t^n$  est un ensemble de sommets de la forme  $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_k$ , où  $L_i$  est une ligne de  $C_t^{n_i}$  pour tout  $i$ .

**Exemple 16.** Pour  $n = 10$ ,  $t = 9$ ,  $k = 2$ ,  $n_1 = 4$  et  $n_2 = 6$ , l'ensemble

$$\{1a5abb9b42 \mid 1 \leq a, b \leq 9\}$$

est un sous-espace de dimension 2. En revanche, l'ensemble

$$\{1a5bab9a42 \mid 1 \leq a, b \leq 9\}$$

n'en est pas un, car on ne peut pas couper le mot  $1a5bab9a42$  en deux avec les  $a$  d'un côté et les  $b$  de l'autre. Notons que la notion de sous-espace ne dépend pas seulement de  $n$ ,  $t$  et  $k$ , mais aussi de la décomposition de  $n$  en les  $n_i$ .

Une remarque importante est que si  $L_1 \times \cdots \times L_k$  est un sous-espace de dimension  $k$ , alors il existe une correspondance naturelle entre  $L_1 \times \cdots \times L_k$  et le cube  $C_t^k$ . Sur notre exemple, cette correspondance s'écrit :

$$1a5abb9b42 \in L_1 \times L_2 \quad \leftrightarrow \quad (a, b) \in C_9^2.$$

On va rechercher des sous-espace particuliers, qui permettront de prolonger facilement des lignes de longueur  $t - 1$  en lignes de longueur  $t$ . On définit d'abord la notion qui nous intéresse sur un cube "complet"  $C_t^k$ .

**Définition 17.** Un coloriage de  $C_t^k$  est dit *invariant* si il a la propriété suivante : soient  $1 \leq j \leq k$  et  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  deux points de  $C_t^k$  tels que  $x_j = t - 1$ ,  $y_j = t$  et  $x_i = y_i$  pour tout  $i \neq j$ . Alors  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ont la même couleur.

**Exemple 18.** Pour  $k = 5$  et  $t = 9$ , un coloriage invariant doit donner la même couleur à 12838, 12839, 12938 et 12939. il n'y a pas d'autres contraintes sur ces points.

On étend maintenant cette notion à un sous-espace d'un gros cube, en utilisant la correspondance naturelle décrite plus tôt.

**Définition 19.** Soit  $L_1 \times \cdots \times L_k$  un sous-espace de dimension  $k$  de  $C_t^n$ , et  $\varphi : L_1 \times \cdots \times L_k \rightarrow C_t^k$  l'isomorphisme naturel décrit plus haut. Un coloriage  $C$  de  $L_1 \times \cdots \times L_k$  est dit *invariant* si le coloriage  $C \circ \varphi$  de  $C_t^k$  est invariant.

**Exemple 20.** En reprenant l'exemple du sous-espace  $\{1a5abb9b42\} \subset C_9^{10}$ , un coloriage invariant de ce sous-espace doit attribuer la même couleur à 1858119142 et à 1959119142, mais aussi à 1858889842, 1858999942, 1959889842 et 1959999942.

Passons maintenant à la construction de sous-espaces invariants de dimension 1. Le résultat qui suit servira d'initialisation dans la récurrence qui nous permettra plus tard de construire des sous-espaces de grande dimension sur lesquels un coloriage est invariant.

**Lemme 21.** Si  $n \geq r$ , alors tout coloriage de  $C_t^n$  en  $r$  couleurs admet une ligne sur laquelle le coloriage est invariant.

*Démonstration.* On remarque qu'un coloriage est invariant sur une ligne si et seulement si il attribue la même couleur aux deux derniers points de cette ligne. Considérons donc les points de la forme

$$z_i = (t - 1, \dots, t - 1, t, \dots, t),$$

où les  $i$  premières coordonnées valent  $t - 1$  et les  $n - i$  suivantes valent  $t$ . Alors on a  $0 \leq i \leq n$ , donc il y a  $n + 1 \geq r + 1$  tels points. D'après le principe des tiroirs, il existe  $i_1 < i_2$  tels que  $z_{i_1}$  et  $z_{i_2}$  sont de la même couleur. Ces points sont les deux derniers points de la ligne

$$\{t - 1, \dots, t - 1, a, \dots, a, t, \dots, t \mid 1 \leq a \leq t\},$$

où les  $i_1$  premières coordonnées sont des  $t - 1$ , les  $i_2 - i_1$  suivantes sont des  $a$  et les  $n - i_2$  dernières sont des  $t$ . On a donc trouvé une ligne sur laquelle le coloriage est invariant.  $\square$

La proposition-clé, est la suivante : elle permet de trouver des sous-espaces invariants de grande dimension, et permettra de faire tourner notre récurrence sur  $t$ .

**Proposition 22** (Proposition-clé). Soient  $k \geq 1$  et  $r, t \geq 2$ . On définit les nombres  $n_1, \dots, n_k$  et  $A_1, \dots, A_k$  par

$$\begin{cases} n_1 = r^{t^{k-1}}, \\ A_i = t^{k-1} \times \prod_{j=1}^i t^n, \\ n_{i+1} = r^{A_i}. \end{cases}$$

Enfin, soit  $n = n_1 + \dots + n_k$ . Alors pour tout coloriage  $\chi$  de  $C_t^n$  en  $r$  couleurs, il existe un sous-espace de dimension  $k$  sur lequel  $\chi$  est invariant.

## Références

- [1] N. Alon, J. Spencer, and P. Erdos. *The Probabilistic Method*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 1992.
- [2] V. Angelteit and B. D. McKay. R(5,5) and 48. *Journal of Graph Theory*, 89(1) :5–13, 2018.
- [3] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica*, 2 :463–470, 1935.
- [4] G. Exoo. A lower bound for r(5, 5). *Journal of Graph Theory*, 13(1) :97–98, 1989.
- [5] H. Furstenberg and B. Weiss. Topological dynamics and combinatorial number theory. *Journal d'Analyse Mathématique*, 34 :61–85.
- [6] T. Gowers. A new proof of Szemerédi's theorem. *Geometric and Functional Analysis*, 11 :465–588, 2001.
- [7] R. Graham, B. Rothschild, and J. Spencer. *Ramsey Theory*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 1991.
- [8] R. L. Graham and B. Rothschild. A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions. *Proceedings of the AMS*, 42 :385–386.
- [9] M. Katz and J. Reimann. *An Introduction to Ramsey Theory*. Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2018.
- [10] F. P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-30(1) :264–286, 1930.
- [11] A. Sah. Diagonal Ramsey via effective quasirandomness, 2020.

- [12] J. Spencer. Ramsey's theorem—a new lower bound. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 18(1) :108–115, 1975.
- [13] van der Waerden B. L. Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw Arch.Wiskunde*, 15 :212–216, 1927.