Théorie de Ramsey
ENS Lyon, 2021-2022

TD 1 : Théorème de Ramsey

Mercredi 27 Octobre

Exercice 1 (Un léger raffinement de la borne sur les nombres de Ramsey)
On rappelle que $R(\ell, m)$ est le plus petit entier n tel que tout coloriage des arêtes de K_n en bleu et rouge admet un K_ℓ bleu ou un K_m rouge. On rappelle qu'on a montré en cours l'inégalité

$$R(\ell, m) \leq R(\ell - 1, m) + R(\ell, m - 1)$$

pour tous $\ell, m \geq 3$. Le but de l'exercice est de raffiner cette borne en montrant que si $R(\ell - 1, m)$ et $R(\ell, m - 1)$ sont tous deux pairs, alors

$$R(\ell, m) \leq R(\ell - 1, m) + R(\ell, m - 1) - 1.$$

1. Soit $n = R(\ell - 1, m) + R(\ell, m - 1) - 1$, et considérons un coloriage de K_n qui ne contient aucun K_ℓ bleu et aucun K_m rouge. En adaptant la preuve du théorème de Ramsey vue en cours, étudier le nombre d'arêtes bleues et rouges issues de chaque sommet.

2. En déduire le nombre total d'arêtes bleues et conclure.

3. En déduire des bornes supérieures sur $R(3, 4)$, $R(3, 5)$ et $R(4, 4)$.

Exercice 2 (Des constructions pour les bornes inférieures)
Le but de cet exercice est de montrer que les bornes sur $R(3, 4)$, $R(3, 5)$ et $R(4, 4)$ trouvées dans l'exercice précédent sont en fait optimales.

1. Construire un coloriage des arêtes de K_8 sans K_3 bleu ni K_4 rouge.
   Indication : On pourra colorier en bleu les côtés d'un octogone régulier, plus quelques diagonales bien choisies.

2. Construire un coloriage des arêtes de K_{13} sans K_3 bleu ni K_5 rouge. *Indication : On pourra identifier les sommets de K_{13} aux éléments de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, et choisir la couleur de l'arête reliant i à j en fonction de la valeur de $j - i$.*

3. On identifie les sommets de K_{17} aux éléments de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, et on colorie l'arête de i à j en bleu s'il existe $q \in \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ tel que $j - i = q^2$, et en rouge sinon. Vérifier que ce coloriage n'admet pas de K_4 monochrome.

Remarque : Le graphe des arêtes bleues construit dans la dernière question est le *graphe de Paley* de taille 17, et est l'unique coloriage (à isomorphisme près) de K_{17} sans K_4 monochrome. Un tel graphe peut être construit en remplaçant 17 par n'importe quel nombre premier p tel que $p \equiv 1 \pmod 4$. Malheureusement, le fait qu'ils donnent des constructions optimales pour les nombres de Ramsey n'est plus vrai en général.

Exercice 3 (Nombres de Ramsey à plus de deux couleurs)
Le but de cet exercice est de généraliser le théorème de Ramsey au cas où on colorie les arêtes en k couleurs au lieu de deux. Étant donnés $k \geq 2$ et $\ell_1, \dots, \ell_k \geq 2$, on note $R(\ell_1, \dots, \ell_k)$ le plus petit entier n avec la propriété suivante. Pour tout coloriage des arêtes de K_n en k couleurs $1, \dots, k$, il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que le coloriage contient un K_{ℓ_i} monochrome de couleur i.

1. Montrer que si $k \geq 3$, alors
$$R\left(\ell_1, \dots, \ell_k\right) \leq R\left(\ell_1, \dots, \ell_{k-2}, R\left(\ell_{k-1}, \ell_k\right)\right)$$
et en déduire $R(\ell_1, \dots, \ell_k) < +\infty$ pour tous $k \geq 2$ et $\ell_1, \dots, \ell_k \geq 2$.

2. Montrer que si $k \geq 3$ et $\ell_1, \dots, \ell_k \geq 3$, alors
$$R\left(\ell_1, \dots, \ell_k\right) \leq 2 - k + \sum_{i=1}^{k} R\left(\ell_1, \dots, \ell_{i-1}, \ell_i - 1, \ell_{i+1}, \dots, \ell_k\right).$$

3. À votre avis, laquelle des deux questions précédentes donne les meilleures bornes supérieures ?

Exercice 4 (Une application du principe des tiroirs)
On colorie en bleu, rouge et vert les points du plan de coordonnées (x, y) avec $x \in \{1, 2, \dots, 82\}$ et $y \in \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer qu'il existe un rectangle de côtés parallèles aux axes dont les quatre sommets sont de la même couleur.