Théorie de Ramsey
ENS Lyon, 2021-2022

TD 1 : Théorème de Ramsey
Corrigé

Mercredi 27 Octobre

Exercice 1 (Un léger raffinement de la borne sur les nombres de Ramsey)
On rappelle que $R(\ell, m)$ est le plus petit entier n tel que tout coloriage des arêtes de K_n en bleu et rouge admet un K_ℓ bleu ou un K_m rouge. On rappelle qu'on a montré en cours l'inégalité

$$R(\ell, m) \leq R(\ell-1, m) + R(\ell, m-1)$$

pour tous $\ell, m \geq 3$. Le but de l'exercice est de raffiner cette borne en montrant que si $R(\ell-1, m)$ et $R(\ell, m-1)$ sont tous deux pairs, alors

$$R(\ell, m) \leq R(\ell-1, m) + R(\ell, m-1) - 1.$$

1. Soit $n = R(\ell-1, m) + R(\ell, m-1) - 1$, et considérons un coloriage de K_n qui ne contient aucun K_ℓ bleu et aucun K_m rouge. En adaptant la preuve du théorème de Ramsey vue en cours, étudier le nombre d'arêtes bleues et rouges issues de chaque sommet.
2. En déduire le nombre total d'arêtes bleues et conclure.
3. En déduire des bornes supérieures sur $R(3,4)$, $R(3,5)$ et $R(4,4)$.

Solution de l'exercice 1

1. On reprend la preuve du théorème de Ramsey vue en cours : soit v un sommet, et supposons qu'on ait $R(\ell-1, m)$ arêtes bleues issues de v. Soit A l'ensemble des extrémités de ces arêtes. Par définition de $R(\ell-1, m)$, l'ensemble A contient soit un $K_{\ell-1}$ bleu, soit un K_m rouge. Dans le premier cas, on obtient un K_ℓ bleu en ajoutant v. Par conséquent, il y a au plus $R(\ell-1, m) - 1$ arêtes bleues issues de v. De même, il y a au plus $R(\ell, m-1) - 1$ arêtes rouges issues de v. Il y a donc exactement $R(\ell-1, m) - 1$ arêtes bleues et $R(\ell, m-1) - 1$ arêtes rouges issues de chaque sommet de K_n.

2. Il y a $n = R(\ell-1, m) + R(\ell, m-1) - 1$ sommets, chacun étant l'extrémité de $R(\ell-1, m) - 1$ arêtes bleues. Comme chaque arête a deux extrémités, le nombre d'arêtes bleues vaut donc

$$\frac{1}{2}\left(R(\ell-1, m) + R(\ell, m-1) - 1\right)\left(R(\ell-1, m) - 1\right).$$

Si $R(\ell-1, m)$ et $R(\ell, m-1)$ sont tous deux pairs, alors le nombre d'arêtes bleues n'est pas entier, ce qui est impossible. Le coloriage de K_n contient donc forcément un K_ℓ bleu ou un K_m rouge, d'où $R(\ell, m) \leq R(\ell-1, m) + R(\ell, m-1) - 1$.

3. En utilisant $R(2, \ell) = \ell$ et $R(3,3) = 6$, on obtient

$$R(3,4) \leq R(3,3) + R(2,4) - 1 = 6 + 4 - 1 = 9,$$

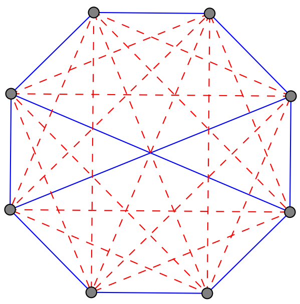

Figure 1: Un coloriage de K_8 sans K_3 bleu ni K_4 rouge (les arêtes bleues sont pleines, les rouges en pointillés).

puis

$$R(3,5) \leq R(3,4) + R(2,5) \leq 9 + 5 = 14$$

et

$$R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) \leq 9 + 9 = 18.$$

En allant un peu plus loin, on trouve $R(4,5) \leq 14 + 18 - 1 = 31$ et $R(5,5) \leq 62$.

Exercice 2 (Des constructions pour les bornes inférieures)
Le but de cet exercice est de montrer que les bornes sur $R(3,4)$, $R(3,5)$ et $R(4,4)$ trouvées dans l'exercice précédent sont en fait optimales.

1. Construire un coloriage des arêtes de K_8 sans K_3 bleu ni K_4 rouge.
   Indication : On pourra colorier en bleu les côtés d'un octogone régulier, plus quelques diagonales bien choisies.

2. Construire un coloriage des arêtes de K_{13} sans K_3 bleu ni K_5 rouge. *Indication : On pourra identifier les sommets de K_{13} aux éléments de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, et choisir la couleur de l'arête reliant i à j en fonction de la valeur de $j - i$.*

3. On identifie les sommets de K_{17} aux éléments de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, et on colorie l'arête de i à j en bleu s'il existe $q \in \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ tel que $j - i = q^2$, et en rouge sinon. Vérifier que ce coloriage n'admet pas de K_4 monochrome.

Solution de l'exercice 2

1. Supposons que les sommets de K_8 sont ceux d'un octogone régulier $X_1X_2\dots X_8$ et que les côtés $[X_iX_{i+1}]$ et $[X_8X_1]$ sont coloriés en bleus. Si le coloriage admet un K_4 rouge, alors il ne peut pas contenir deux sommets consécutifs, donc les seuls K_4 rouges possibles sont formés par X_1, X_3, X_5, X_7 et par X_2, X_4, X_6, X_8. Pour empêcher la première possibilité, on doit colorier en bleu une arête entre deux sommets impairs. On ne peut pas choisir $[X_1X_3]$ car alors X_1, X_2, X_3 formeraient un K_3 bleu. On colorie donc $[X_1X_5]$ en bleu, et de même on colorie $[X_2X_6]$ en bleu, puis on colorie toutes les arêtes restantes en rouge. Le coloriage obtenu ne contient ni K_4 rouge ni K_3 bleu.

2. On colorie l'arête entre i et j en bleu si $j - i \in \{1, 5, 8, 12\}$ et en rouge sinon.

   Si i, j, k forment un K_3 bleu, alors en posant $\alpha = j - i$ et $\beta = k - j$, on a $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \{1, 5, 8, 12\}$. En calculant toutes les sommes possibles de deux éléments de $\{1, 5, 8, 12\}$, on constate que c'est impossible. Supposons maintenant qu'il existe un K_5 rouge. On commence par montrer qu'il contient deux sommets i et j tels que $j - i = 2$. En effet, si ce n'est pas le cas, en écrivant $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_5 \leq 12$ les sommets du K_5, on a $i_2 \geq i_1 + 3$ puis $i_3 \geq i_2 + 3 \geq i_1 + 6$ et enfin $i_5 \geq i_1 + 12$. On a donc $i_5 = 12$ et $i_1 = 0$, mais 0 et 12 sont reliés par une arête bleue. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que le K_5 rouge contient 0 et 2. Les seuls éléments reliés à la fois à 0 et à 2 par des arêtes bleues sont 4, 6, 9 et 11. Le K_5 contient donc 3 éléments de $\{4, 6, 9, 11\}$, donc il contient soit 4 et 9, soit 6 et 11. Cependant, les arêtes $(4, 9)$ et $(6, 11)$ sont bleues, donc il n'y a pas de K_5 rouge.

3. En faisant la liste des carrés modulo 17, on constate que i et j sont reliés par une arête bleue si $j - i \in \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$, et rouge si $j - i \in \{3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$. S'il existe un K_4 bleu, quitte à retirer une constante à tous ses éléments, on peut supposer qu'il contient 0. Si $i, j \neq 0$ sont dedans, alors $i, j, j-i \in \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$. La liste des paires (i, j) d'éléments de cet ensemble tels que $j - i$ est aussi dedans est la suivante :

$$(2, 1), (4, 2), (8, 4), (9, 8), (9, 1), (13, 9), (13, 4), (15, 13), (15, 2), (16, 15), (16, 8), (16, 1).$$

   On constate qu'il n'existe aucun triplet (i, j, k) tel que les paires (i, j), (i, k) et (j, k) figurent toutes dans cette liste. Il n'y a donc aucun K_4 bleu. Par un raisonnement similaire, on montre qu'il n'y a pas de K_4 rouge.

Remarque : Le graphe des arêtes bleues construit dans la dernière question est le *graphe de Paley* de taille 17, et est l'unique coloriage (à isomorphisme près) de K_{17} sans K_4 monochrome. Un tel graphe peut être construit en remplaçant 17 par n'importe quel nombre premier p tel que $p \equiv 1 \pmod 4$. Malheureusement, le fait qu'ils donnent des constructions optimales pour les nombres de Ramsey n'est plus vrai en général.

Exercice 3 (Nombres de Ramsey à plus de deux couleurs)
Le but de cet exercice est de généraliser le théorème de Ramsey au cas où on colorie les arêtes en k couleurs au lieu de deux. Étant donnés $k \geq 2$ et $\ell_1, \ldots, \ell_k \geq 2$, on note $R(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ le plus petit entier n avec la propriété suivante. Pour tout coloriage des arêtes de K_n en k couleurs $1, \ldots, k$, il existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que le coloriage contient un K_{ℓ_i} monochrome de couleur i.

1. Montrer que si $k \geq 3$, alors

$$R(\ell_1, \ldots, \ell_k) \leq R(\ell_1, \ldots, \ell_{k-2}, R(\ell_{k-1}, \ell_k))$$

   et en déduire $R(\ell_1, \ldots, \ell_k) < +\infty$ pour tous $k \geq 2$ et $\ell_1, \ldots, \ell_k \geq 2$.

2. Montrer que si $k \geq 3$ et $\ell_1, \ldots, \ell_k \geq 3$, alors

$$R(\ell_1, \ldots, \ell_k) \leq 2 - k + \sum_{i=1}^{k} R(\ell_1, \ldots, \ell_{i-1}, \ell_i - 1, \ell_{i+1}, \ldots, \ell_k).$$

3. À votre avis, laquelle des deux questions précédentes donne les meilleures bornes supérieures ?

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. Soit $n = R(\ell_1, \ldots, \ell_{k-2}, R(\ell_{k-1}, \ell_k))$ et considérons un coloriage des arêtes de K_n en k couleurs $1, \ldots, k$. En regroupant les couleurs $k-1$ et k en une seule couleur, on obtient un coloriage des arêtes de K_n en $k-1$ couleurs. Par définition des nombres de Ramsey, il existe donc soit un K_{ℓ_i} de couleur i pour un certain $i \in \{1, \ldots, k-2\}$, soit un $K_{R(\ell_{k-1}, \ell_k)}$ où toutes les arêtes sont de couleur $k-1$ ou k. Dans le second cas, par définition de $R(\ell_{k-1}, \ell_k)$, ce $K_{R(\ell_{k-1}, \ell_k)}$ contient soit un $K_{\ell_{k-1}}$ de couleur $k-1$, soit un K_{ℓ_k} de couleur k, d'où la conclusion.

   On en déduit par récurrence sur k que $R(\ell_1, \ldots, \ell_k) < +\infty$ est fini pour tous $\ell_1, \ldots, \ell_k \geq 2$ (l'initialisation à $k = 2$ correspondant au théorème de Ramsey original).

2. On adapte la preuve du théorème de Ramsey vue en cours : soit n le membre de droite de l'inégalité à montrer, et soit v un sommet de K_n. D'après le principe des tiroirs, il existe une couleur i pour laquelle il y a au moins $R(\ell_1, \ldots, \ell_{i-1}, \ell_i - 1, \ell_{i+1}, \ldots, \ell_k)$ arêtes de couleur i issues de v. Parmi

les secondes extrémités de ces arêtes, il y a soit un K_{ℓ_j} monochrome de couleur j pour un certain $j \neq i$, soit un $K_{\ell_i - 1}$ monochrome de couleur i. Dans le second cas, on obtient un K_{ℓ_i} monochrome de couleur i en ajoutant le sommet v. On a donc bien dans tous les cas un K_{ℓ_j} monochrome de couleur j pour un certain j.

3. La seconde question donne de bien meilleures (ou plutôt moins mauvaises) bornes. Par exemple, en utilisant la borne vue en cours $R(\ell, m) \leq \binom{\ell+m}{\ell} \leq 2^{\ell+m}$, la première question donne

$$R(\ell, \ell, \ell) \leq R(\ell, 4^\ell) \leq \binom{4^\ell + \ell}{\ell} \approx \frac{(4^\ell)^\ell}{\ell!} = \exp\left(c\ell^2 + o(\ell^2)\right)$$

où c est une constante. D'un autre côté, la seconde question permet de montrer par récurrence sur $\ell + m + n$ que

$$R(\ell, m, n) \leq C \times 3^{\ell+m+n}$$

où C est une constante. En particulier $R(\ell, \ell, \ell) = O\left(27^\ell\right)$, ce qui est bien mieux.

Exercice 4 (Une application du principe des tiroirs)
On colorie en bleu, rouge et vert les points du plan de coordonnées (x, y) avec $x \in \{1, 2, \ldots, 82\}$ et $y \in \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer qu'il existe un rectangle de côtés parallèles aux axes dont les quatre sommets sont de la même couleur.

Solution de l'exercice 4 On découpe l'ensemble des points coloriés en 82 colonnes. Le nombre de manières de colorier une colonne est $3^4 = 81$. D'après le principe des tiroirs, il existe $1 \leq i < j \leq 82$ tels que les colonnes i et j sont coloriées exactement de la même manière. À nouveau d'après le principe des tiroirs , il existe une couleur qui apparaît deux fois dans ces colonnes, en positions a et b. Les points (i, a), (i, b), (j, b) et (j, a) forment alors un rectangle et sont tous de la même couleur.