

La propriété de Markov spatiale chez les cartes planaires :

Où ? Quoi ? Pourquoi ? Qui ?

Thomas Budzinski

Sous la direction de Nicolas Curien

19 Février 2015

La propriété de Markov spatiale chez les cartes planaires :

- Où ?
- Quoi ?
- Pourquoi ?
- Qui ?

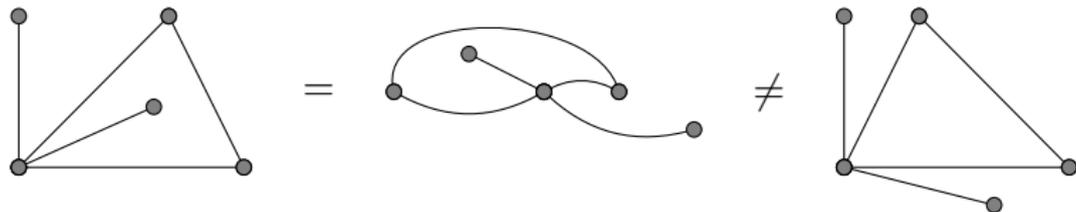
La propriété de Markov spatiale chez les cartes planaires :

- **Où ?** Chez les cartes planaires.
- **Quoi ?** Analogie de la propriété de Markov "temporelle".
- **Pourquoi ?** Exemple : percolation.
- **Qui ?** "Peu" de triangulations vérifient cette propriété.

Graphes et cartes

Définitions

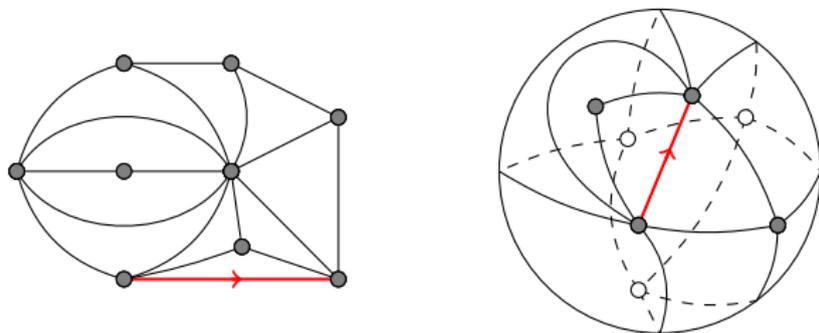
- Un *graphe* consiste en un ensemble de points appelés *sommets*, reliés entre eux par des *arêtes*.
- Une *carte* est un graphe connexe dessiné sur une surface (ex : sphère, plan, tore...) de manière à ce que les arêtes ne se croisent pas. Les arêtes délimitent ainsi des *faces*.
- On considère que deux cartes sont identiques si on peut passer de l'une à l'autre en déformant la surface.



Triangulations

Définition

Une *triangulation* est une carte dans laquelle toutes les faces touchent exactement 3 arêtes, et aucune arête ne relie un sommet à lui-même. En revanche, elle peut contenir des arêtes multiples. Elles seront *enracinées*, c'est-à-dire munies d'une arête distinguée.



Exemple : triangulations d'un hexagone et de la sphère.

Convergence locale

Définition

Soit t une triangulation. On note $B_r(t)$ la triangulation finie formée par les faces dont au moins un sommet est à distance strictement inférieure à r de la racine.

Définition

Si t et t' sont deux triangulations, et r est le plus grand entier tel que $B_r(t) = B_r(t')$, on pose :

$$d(t, t') = \frac{1}{1+r}$$

d est une distance sur l'ensemble des triangulations, appelée *distance locale*.

L'UIPT

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit T_n une variable aléatoire uniforme sur l'ensemble des triangulations de la sphère à n sommets.

Théorème (Angel-Schramm, 2003)

$$T_n \xrightarrow{(loi)} T$$

pour la distance locale, où T est une triangulation aléatoire du plan appelée *UIPT* (pour Uniform Infinite Planar Triangulation).

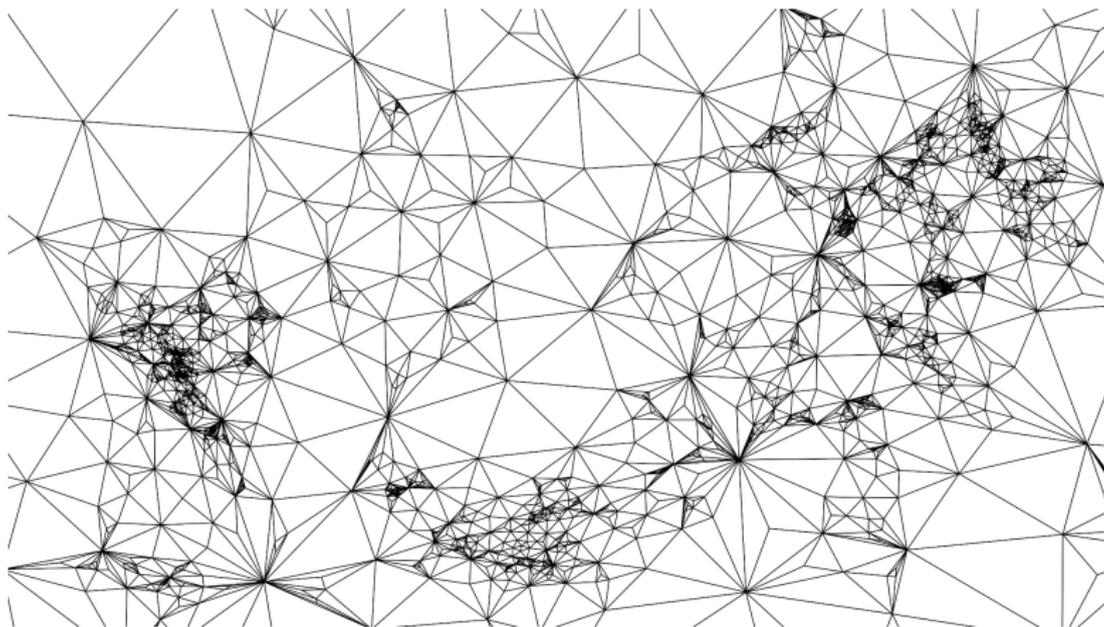


Image de N. Curien.

Une variante : l'UIHPT

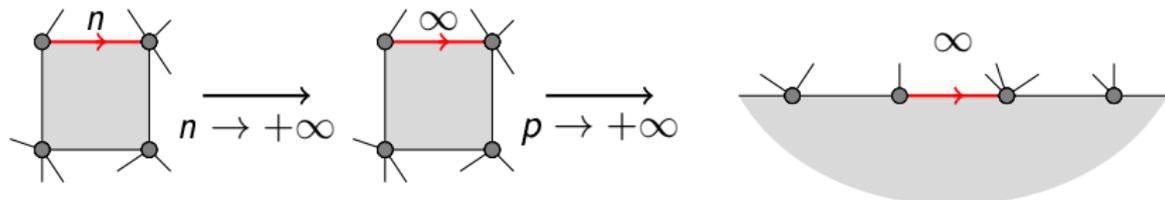
Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, soit $T_{n,p}$ une variable aléatoire uniforme sur l'ensemble des triangulations d'un p -gone avec n sommets intérieurs.

Théorème

On a les convergences en loi :

$$T_{n,p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T_{\infty,p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} H$$

où H est une triangulation aléatoire du demi-plan appelée *UIHPT*.



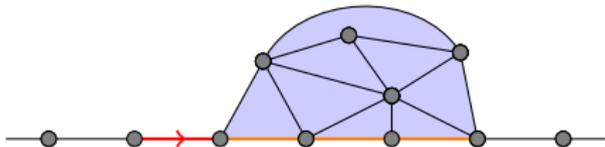
Propriété de Markov spatiale : intuition

"Conditionnellement au présent, l'avenir est indépendant du passé".

- Passé : une triangulation finie contenue dans H .
- Présent : bord de cette triangulation finie.
- Futur : partie qui reste à explorer.

Définition

On appelle *triangulation bipède* une triangulation finie d'un polygone, à laquelle sont collées deux demi-droites.



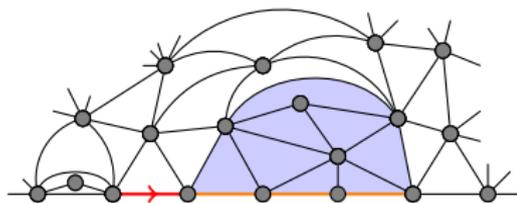
Propriété de Markov spatiale : énoncé

Théorème (\approx Angel-Schramm, 2003)

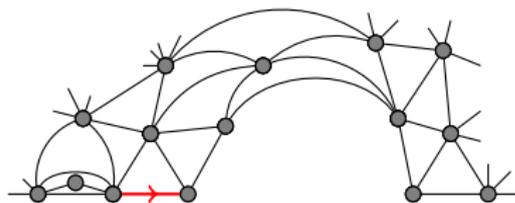
Soit H une UIHPT.

Pour toute triangulation bipède t , conditionnellement à $t \subset H$, la triangulation $H \setminus t$ a la même loi que H .

De plus, $\mathbb{P}(t \subset H)$ se calcule explicitement.



Une réalisation de $t \subset H$

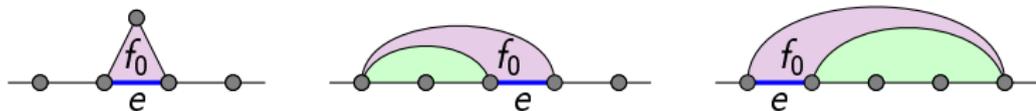


$H \setminus t$

Le peeling

Soit H une UIHPT de bord ∂H et e une arête de ∂H . Soit f_0 la face qui touche e et x son troisième sommet. Trois possibilités :

- ① x n'est pas sur ∂H .
- ② x est sur ∂H à gauche de la racine et f_0 isole i arêtes de ∂H .
- ③ x est sur ∂H à droite de la racine et f_0 isole i arêtes de ∂H .



On connaît explicitement :

- La probabilité de chacun de ces cas : q_1 , $\frac{1}{2}q_{-i}$ et $\frac{1}{2}q_{-i}$.
- La loi de la triangulation qui "remplit" la zone en vert.

Le peeling

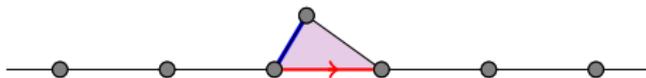
Cela permet de réaliser des simulations de l'UIHPT, presque face par face :



Grande liberté : à chaque étape, on peut éplucher l'arête du bord qu'on veut, tant qu'on la choisit indépendamment de la partie de H non encore explorée.

Le peeling

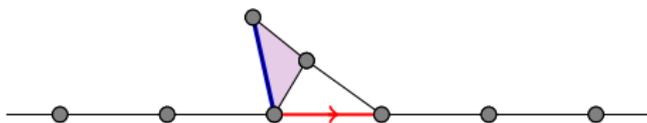
Cela permet de réaliser des simulations de l'UIHPT, presque face par face :



Grande liberté : à chaque étape, on peut éplucher l'arête du bord qu'on veut, tant qu'on la choisit indépendamment de la partie de H non encore explorée.

Le peeling

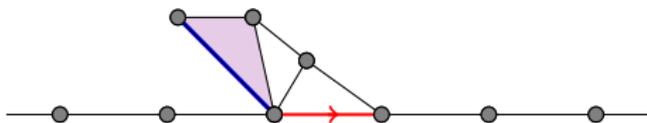
Cela permet de réaliser des simulations de l'UIHPT, presque face par face :



Grande liberté : à chaque étape, on peut éplucher l'arête du bord qu'on veut, tant qu'on la choisit indépendamment de la partie de H non encore explorée.

Le peeling

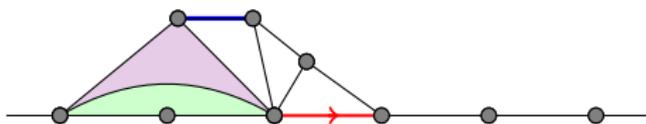
Cela permet de réaliser des simulations de l'UIHPT, presque face par face :



Grande liberté : à chaque étape, on peut éplucher l'arête du bord qu'on veut, tant qu'on la choisit indépendamment de la partie de H non encore explorée.

Le peeling

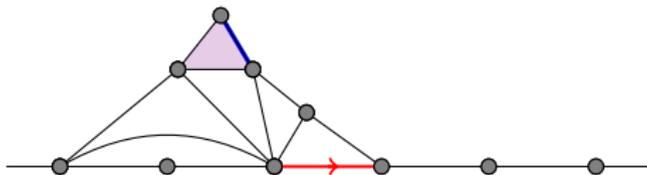
Cela permet de réaliser des simulations de l'UIHPT, presque face par face :



Grande liberté : à chaque étape, on peut éplucher l'arête du bord qu'on veut, tant qu'on la choisit indépendamment de la partie de H non encore explorée.

Le peeling

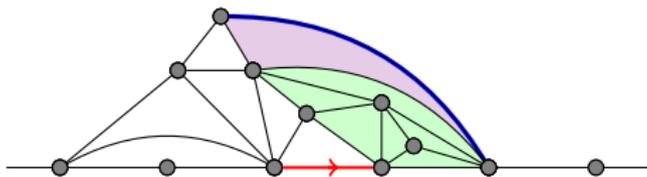
Cela permet de réaliser des simulations de l'UIHPT, presque face par face :



Grande liberté : à chaque étape, on peut éplucher l'arête du bord qu'on veut, tant qu'on la choisit indépendamment de la partie de H non encore explorée.

Le peeling

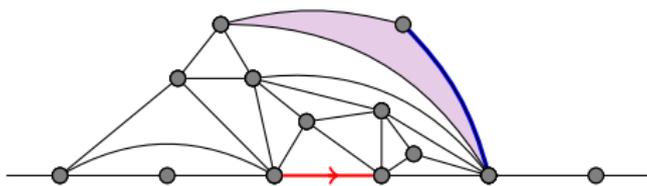
Cela permet de réaliser des simulations de l'UIHPT, presque face par face :



Grande liberté : à chaque étape, on peut éplucher l'arête du bord qu'on veut, tant qu'on la choisit indépendamment de la partie de H non encore explorée.

Le peeling

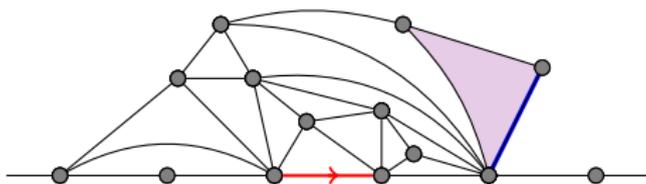
Cela permet de réaliser des simulations de l'UIHPT, presque face par face :



Grande liberté : à chaque étape, on peut éplucher l'arête du bord qu'on veut, tant qu'on la choisit indépendamment de la partie de H non encore explorée.

Le peeling

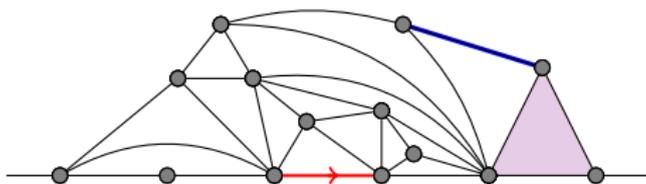
Cela permet de réaliser des simulations de l'UIHPT, presque face par face :



Grande liberté : à chaque étape, on peut éplucher l'arête du bord qu'on veut, tant qu'on la choisit indépendamment de la partie de H non encore explorée.

Le peeling

Cela permet de réaliser des simulations de l'UIHPT, presque face par face :



Grande liberté : à chaque étape, on peut éplucher l'arête du bord qu'on veut, tant qu'on la choisit indépendamment de la partie de H non encore explorée.

Percolation

- Soient G un graphe et $p \in [0, 1]$.
- On colorie chaque sommet de G en noir avec probabilité p , en blanc avec probabilité $1 - p$.
- C ensemble des sommets auxquels on peut accéder en partant de la racine et en ne passant que par des sommets noirs. Il y a *percolation* si C est infini.
- On pose $p_c(G) = \inf\{p \in [0, 1] \mid \mathbb{P}_p(|C| = +\infty) > 0\}$.

Théorème (Kesten, 1980, difficile)

$$p_c(\text{réseau triangulaire}) = \frac{1}{2}$$

Percolation sur l'UIHPT

Théorème (Angel, 2003, moins difficile)

Presque sûrement :

$$p_c(H) = \frac{1}{2}$$

Percolation sur l'UIHPT

Théorème (Angel, 2003, moins difficile)

Presque sûrement :

$$p_c(H) = \frac{1}{2}$$

- Idée de la démonstration, si tous les sommets du bord sont blancs sauf un : $p_c(H)$ est invariant si on change une région finie. Une loi du 0 – 1 montre que $p_c(H)$ est constante p.s.
- Peeling en suivant des *interfaces de percolation*, c'est-à-dire des frontières entre une région blanche et une région noire.
- A chaque étape, si c'est possible, on choisit d'éplucher une arête ayant un sommet blanc et un sommet noir.

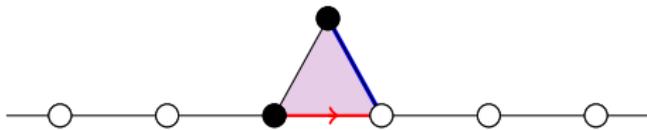
Peeling le long d'une interface



- On note B_n le nombre de sommets noirs sur le bord après n étapes de peeling : C est infinie ssi (B_n) n'atteint jamais 0.

Peeling le long d'une interface

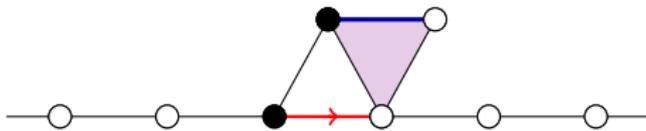
+1



- On note B_n le nombre de sommets noirs sur le bord après n étapes de peeling : C est infinie ssi (B_n) n'atteint jamais 0.

Peeling le long d'une interface

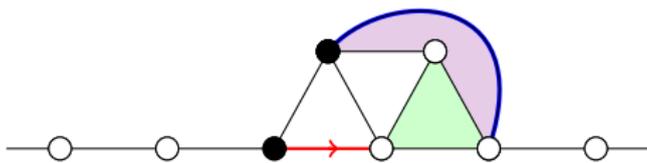
+0



- On note B_n le nombre de sommets noirs sur le bord après n étapes de peeling : C est infinie ssi (B_n) n'atteint jamais 0.

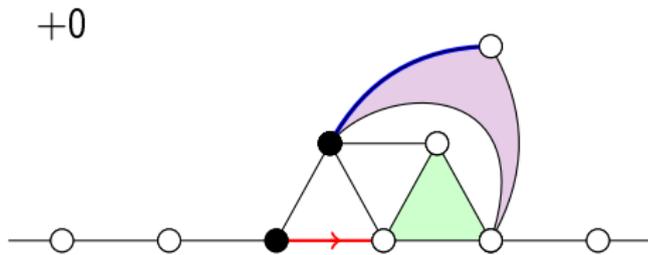
Peeling le long d'une interface

+0



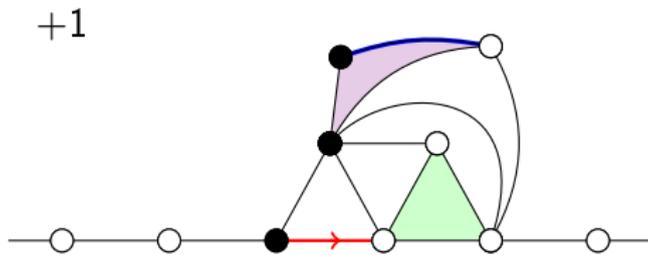
- On note B_n le nombre de sommets noirs sur le bord après n étapes de peeling : C est infinie ssi (B_n) n'atteint jamais 0.

Peeling le long d'une interface



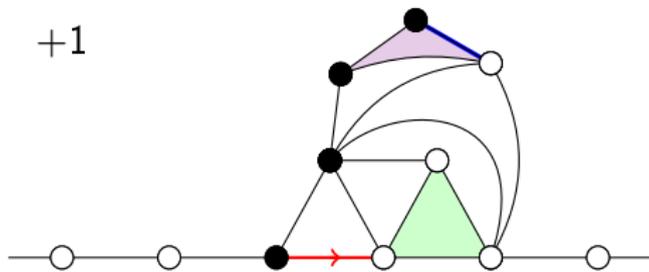
- On note B_n le nombre de sommets noirs sur le bord après n étapes de peeling : C est infinie ssi (B_n) n'atteint jamais 0.

Peeling le long d'une interface



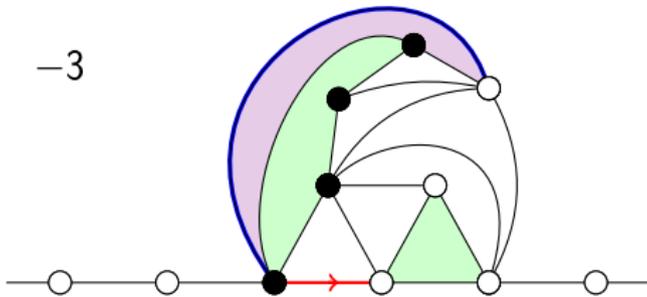
- On note B_n le nombre de sommets noirs sur le bord après n étapes de peeling : C est infinie ssi (B_n) n'atteint jamais 0.

Peeling le long d'une interface



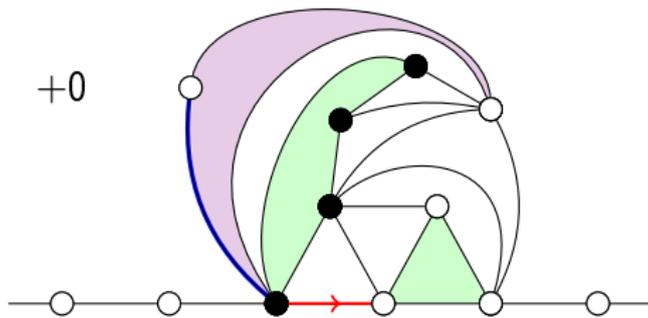
- On note B_n le nombre de sommets noirs sur le bord après n étapes de peeling : C est infinie ssi (B_n) n'atteint jamais 0.

Peeling le long d'une interface



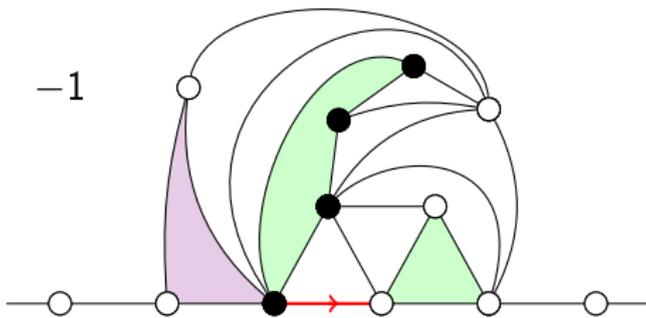
- On note B_n le nombre de sommets noirs sur le bord après n étapes de peeling : C est infinie ssi (B_n) n'atteint jamais 0.

Peeling le long d'une interface



- On note B_n le nombre de sommets noirs sur le bord après n étapes de peeling : C est infinie ssi (B_n) n'atteint jamais 0.

Peeling le long d'une interface



- On note B_n le nombre de sommets noirs sur le bord après n étapes de peeling : C est infinie ssi (B_n) n'atteint jamais 0.

Étude de (B_n)

A chaque étape, tant que $B_n \neq 0$:

- Avec probabilité pq_1 , un sommet noir apparaît et $B_{n+1} - B_n = 1$.
- Avec probabilité $(1-p)q_1$, un sommet blanc apparaît et $B_{n+1} - B_n = 0$.
- Avec probabilité $\frac{1}{2}q_{-i}$, i sommets noirs sont avalés et $B_{n+1} - B_n = -i$ (sauf si $B_{n+1} = 0$).
- Avec probabilité $\frac{1}{2}q_{-i}$, i sommets blancs sont avalés et $B_{n+1} - B_n = 0$.

Étude de (B_n)

- (B_n) est donc une marche aléatoire (issue de 1 et stoppée en tapant 0) dont les pas ont une espérance :

$$E(p) = pq_1 - \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} iq_{-i}$$

- Mais $q_1 - \sum_{i \geq 1} iq_{-i} = 0$, donc :
 $\mathbb{P}(\forall n \geq 0, B_n > 0) > 0$ ssi $E(p) > 0$ ssi $p > \frac{1}{2}$.
- On a donc $\mathbb{P}(p_c(H) < p) > 0$ ssi $p > \frac{1}{2}$, et on conclut avec la loi du 0 – 1.

Classification des triangulations markoviennes

Définition

Soit H une triangulation aléatoire du demi-plan :

- On dit que H est *invariante par translation* si décaler la racine d'un pas vers la droite ne change pas la loi de H .
- On dit que H vérifie la *propriété de Markov spatiale* si pour toute triangulation bipède t , conditionnellement à $t \subset H$, la triangulation $H \setminus t$ a la même loi que H .

Théorème (Angel-Ray, 2013)

Les triangulations aléatoires du demi-plan vérifiant les deux propriétés ci-dessus forment une famille à un paramètre $(H_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$. De plus, $\alpha = \mathbb{P}(\text{Le troisième sommet de } f_0 \text{ n'est pas sur } \partial H_\alpha)$.

Démonstration de l'unicité

$$\alpha = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \overset{\text{triangle}}{\color{red}{\rightarrow}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$

$$\beta = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \overset{\text{arc}}{\color{red}{\rightarrow}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$

Exemple :

$$\mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \overset{\text{graph}}{\color{red}{\rightarrow}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right) = ?$$

Démonstration de l'unicité

$$\alpha = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$

$$\beta = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$

Exemple :

$$\mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right) = 1$$

Démonstration de l'unicité

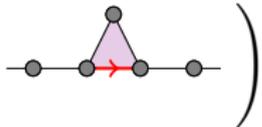
$$\alpha = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$

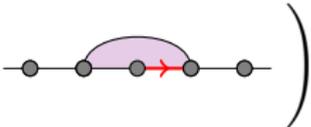
$$\beta = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$

Exemple :

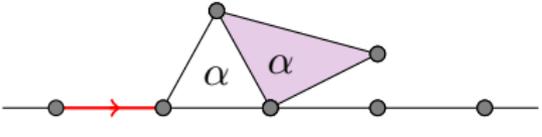
$$\mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \alpha \end{array} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right) = \alpha$$

Démonstration de l'unicité

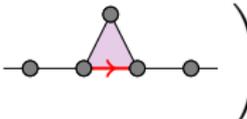
$$\alpha = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


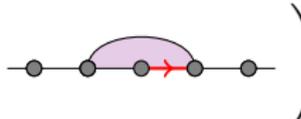
$$\beta = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


Exemple :

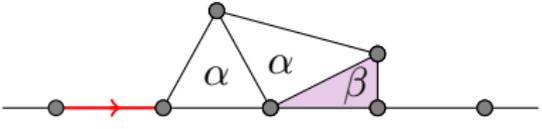
$$\mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \triangle \alpha \text{---} \triangle \alpha \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right) = \alpha^2$$


Démonstration de l'unicité

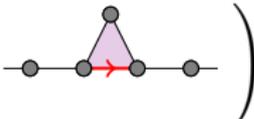
$$\alpha = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


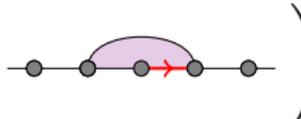
$$\beta = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


Exemple :

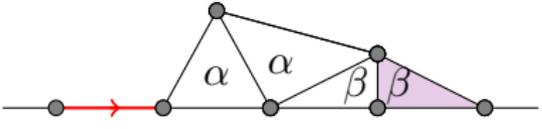
$$\mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \triangle_{\alpha} \text{---} \triangle_{\alpha} \text{---} \triangle_{\beta} \text{---} \bullet \text{---} \right) = \alpha^2 \beta$$


Démonstration de l'unicité

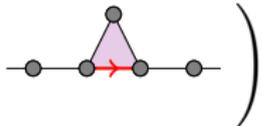
$$\alpha = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


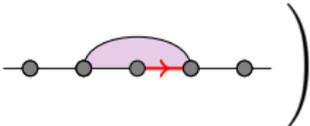
$$\beta = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \text{arc} \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


Exemple :

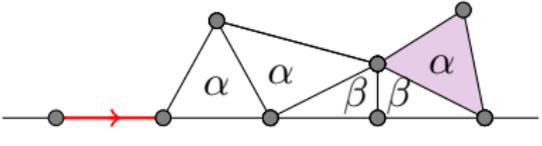
$$\mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \triangle_{\alpha} \text{---} \triangle_{\alpha} \text{---} \triangle_{\beta} \text{---} \triangle_{\beta} \text{---} \bullet \text{---} \right) = \alpha^2 \beta^2$$


Démonstration de l'unicité

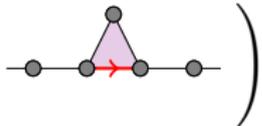
$$\alpha = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


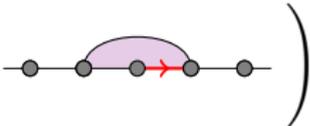
$$\beta = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \text{arc} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


Exemple :

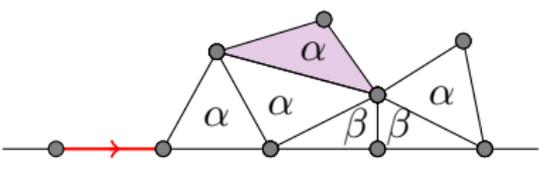
$$\mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \alpha \text{---} \alpha \text{---} \beta \text{---} \beta \text{---} \alpha \text{---} \bullet \right) = \alpha^3 \beta^2$$


Démonstration de l'unicité

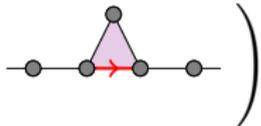
$$\alpha = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


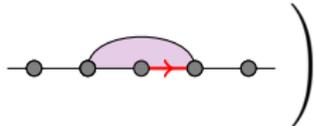
$$\beta = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


Exemple :

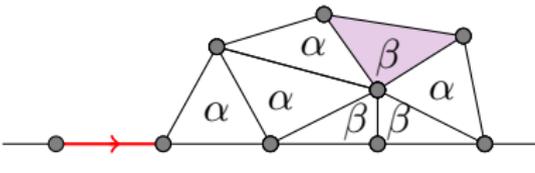
$$\mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \alpha \text{---} \beta \text{---} \alpha \text{---} \right) = \alpha^4 \beta^2$$


Démonstration de l'unicité

$$\alpha = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


$$\beta = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$


Exemple :

$$\mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \text{triangle} \text{---} \text{triangle} \text{---} \text{triangle} \text{---} \right) = \alpha^4 \beta^3$$


Démonstration de l'unicité

$$\alpha = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$

$$\beta = \mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right)$$

Exemple :

$$\mathbb{P} \left(\text{---} \bullet \xrightarrow{\text{red}} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \right) = \alpha^4 \beta^4$$

Démonstration de l'unicité

De même, pour tout t , on peut écrire $\mathbb{P}(t \subset H) = \alpha^{a(t)}\beta^{b(t)}$ avec :

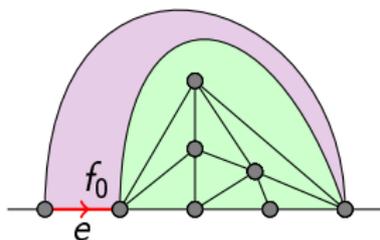
- $a(t) + b(t) =$ nombre de faces de t
- $a(t) =$ nombre de sommets de $t \setminus \partial H$

La loi de H est donc entièrement déterminée par α et β .

De plus, notons $q_{-i}^{(d)}$ la probabilité que le troisième sommet de f_0 soit sur ∂H , à i pas à droite de la racine, et $q_{-i}^{(g)}$ de même à gauche :

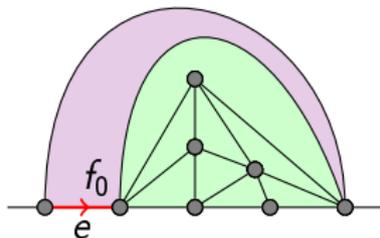
$$\alpha + \sum_{i \geq 1} (q_{-i}^{(g)} + q_{-i}^{(d)}) = 1$$

Démonstration de l'unicité



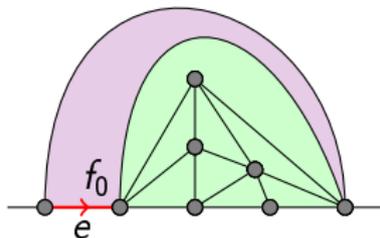
- Proba de contenir une triangulation verte fixée avec k sommets internes : $\alpha^k \beta^{\#faces-k} = \alpha^k \beta^{i+k-1}$.

Démonstration de l'unicité



- Proba de contenir une triangulation verte fixée avec k sommets internes : $\alpha^k \beta^{\#faces-k} = \alpha^k \beta^{i+k-1}$.
- Proba d'avoir en plus la face violette : $\alpha^k \beta^{i+k}$.

Démonstration de l'unicité



- Proba de contenir une triangulation verte fixée avec k sommets internes : $\alpha^k \beta^{\#faces-k} = \alpha^k \beta^{i+k-1}$.
- Proba d'avoir en plus la face violette : $\alpha^k \beta^{i+k}$.
- Reste à sommer sur toutes les triangulations vertes possibles :

$$q_{-i}^{(d)} = \sum_{k \geq 0} \varphi_{k,i+1} \alpha^k \beta^{i+k}.$$

Et après ?

- En faisant les calculs : $\beta = \begin{cases} \frac{(2-\alpha)^2}{16} & \text{si } \alpha \leq \frac{2}{3} \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} & \text{si } \alpha \geq \frac{2}{3} \end{cases}$
- Existence : pour $\alpha \in [0, 1[$, construction par épluchage d'une triangulation H_α qui marche.
 - $\alpha = \frac{2}{3}$ correspond à l'UIHPT.
 - $\alpha < \frac{2}{3}$: ressemble à un arbre (Ray, 2014).
 - $\alpha > \frac{2}{3}$: comportement "hyperbolique" (Ray, 2014).
- Cas du plan complet : seules l'UIPT et le régime "hyperbolique" existent encore (Curien, 2014).

Où ?
Quoi ?
Pourquoi ?
Qui ?

