

Cartes aléatoires hyperboliques

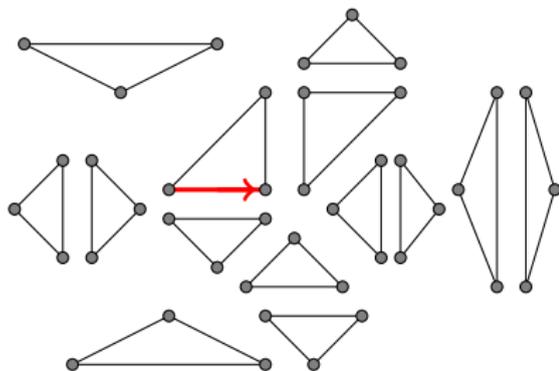
Thomas Budzinski

ENS Paris

Soutenance de thèse
9 Novembre 2018

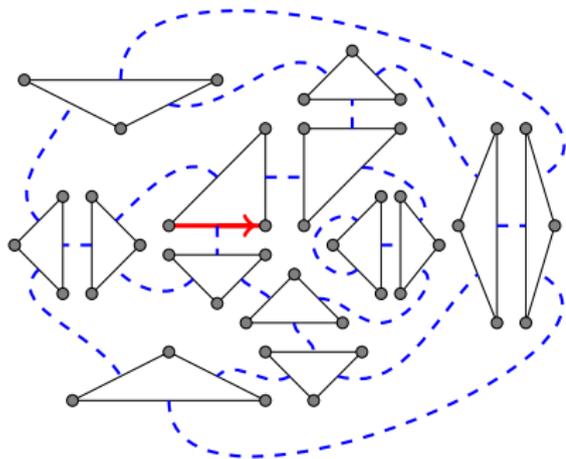
- I Triangulations aléatoires
- II Flips sur des triangulations
- III Triangulations aléatoires hyperboliques : les PSHIT
- IV Limite d'échelle des PSHIT
- V Géodésiques dans les PSHIT
- VI Cartes causales surcritiques

Triangulations de la sphère



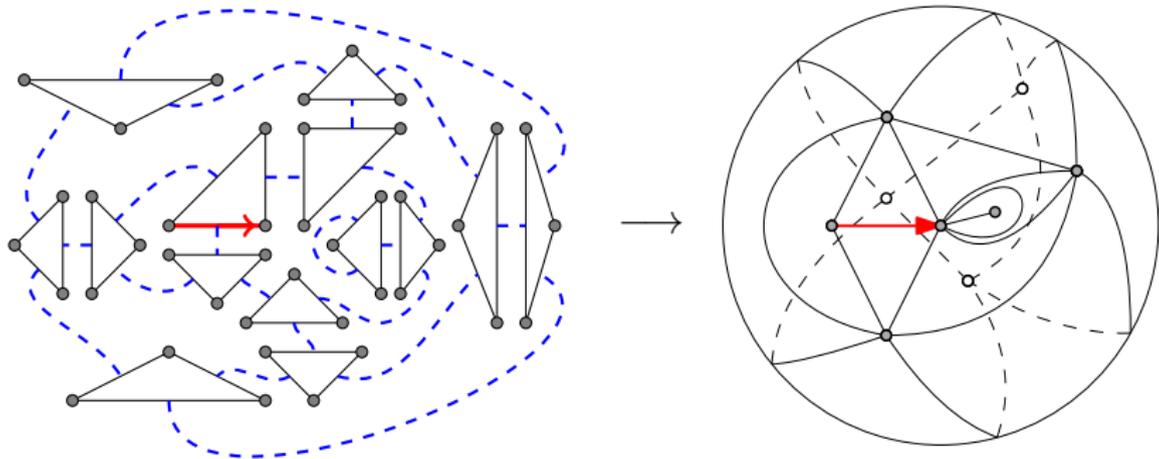
- Une *triangulation de la sphère* à $2n$ faces est un ensemble de $2n$ triangles dont les côtés ont été collés deux à deux, de manière à obtenir topologiquement une sphère.
- Type I : on peut coller deux côtés d'un même triangle.
- Les triangulations seront toujours *enracinées* (munies d'une arête orientée distinguée).

Triangulations de la sphère



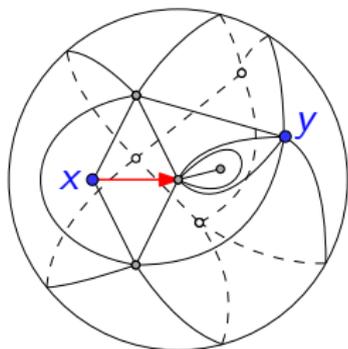
- Une *triangulation de la sphère* à $2n$ faces est un ensemble de $2n$ triangles dont les côtés ont été collés deux à deux, de manière à obtenir topologiquement une sphère.
- Type I : on peut coller deux côtés d'un même triangle.
- Les triangulations seront toujours *enracinées* (munies d'une arête orientée distinguée).

Triangulations de la sphère



- Une *triangulation de la sphère* à $2n$ faces est un ensemble de $2n$ triangles dont les côtés ont été collés deux à deux, de manière à obtenir topologiquement une sphère.
- Type I : on peut coller deux côtés d'un même triangle.
- Les triangulations seront toujours *enracinées* (munies d'une arête orientée distinguée).

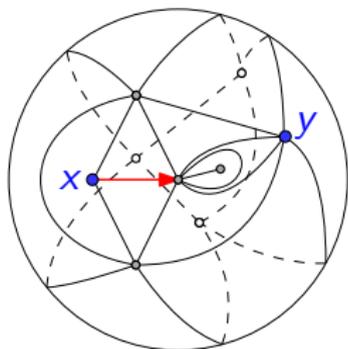
Triangulations aléatoires de la sphère



$$d(x, y) = 2$$

- Une triangulation de la sphère peut aussi être vue comme un *graphe*. On peut s'intéresser aux *distances* entre sommets.

Triangulations aléatoires de la sphère



$$d(x, y) = 2$$

- Une triangulation de la sphère peut aussi être vue comme un *graphe*. On peut s'intéresser aux *distances* entre sommets.
- Soit \mathcal{T}_n l'ensemble des triangulations de la sphère à $2n$ faces, et T_n une triangulation aléatoire, choisie uniformément dans \mathcal{T}_n .
- À quoi ressemble T_n pour n grand ? Par exemple, que peut-on dire des distances entre sommets ? "Limite" quand $n \rightarrow +\infty$?

- Modèle de surfaces aléatoires discrètes qui intéresse les physiciens (et les mathématiciens !)
- Approche classique en probabilités : pour définir un objet continu "uniforme", on passe par des objets discrets et on passe à la limite.

- Modèle de surfaces aléatoires discrètes qui intéresse les physiciens (et les mathématiciens !)
- Approche classique en probabilités : pour définir un objet continu "uniforme", on passe par des objets discrets et on passe à la limite.
- Certains modèles de physique statistique (ex : percolation) sont plus simples à étudier sur des triangulations aléatoires que sur des triangulations régulières !



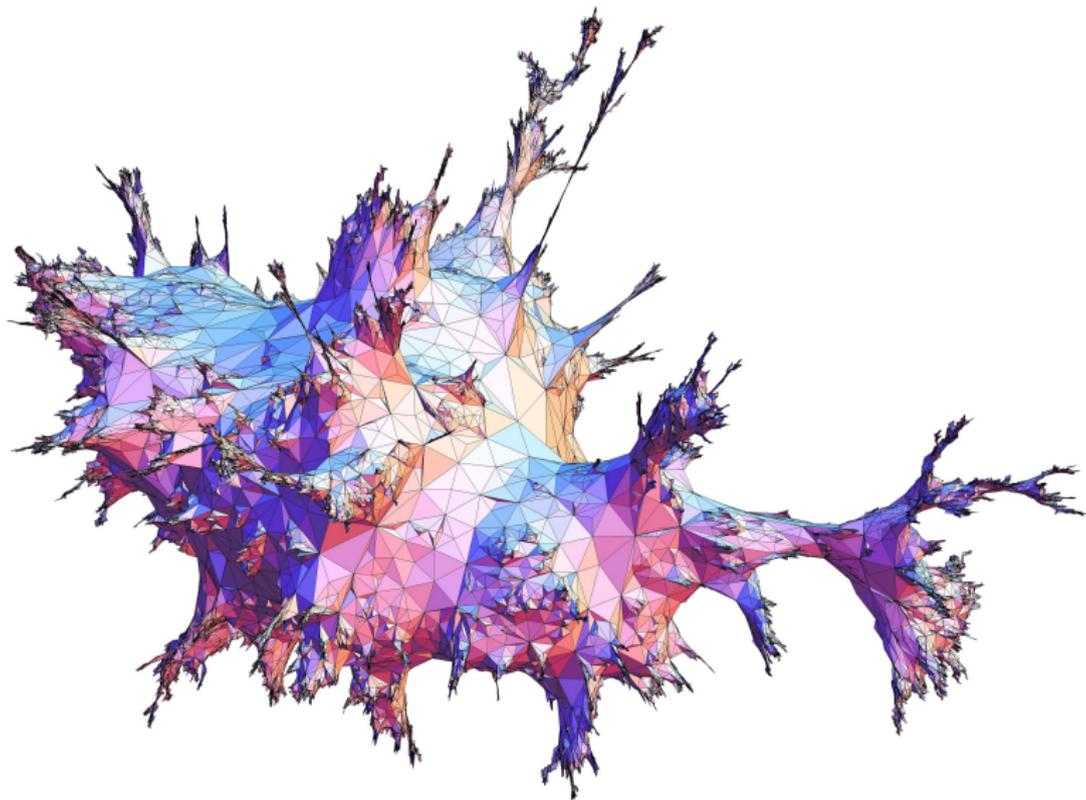
Motivations

- Modèle de surfaces aléatoires discrètes qui intéresse les physiciens (et les mathématiciens !)
- Approche classique en probabilités : pour définir un objet continu "uniforme", on passe par des objets discrets et on passe à la limite.
- Certains modèles de physique statistique (ex : percolation) sont plus simples à étudier sur des triangulations aléatoires que sur des triangulations régulières !



- C'est joli !

À quoi ressemble T_{32400} ?

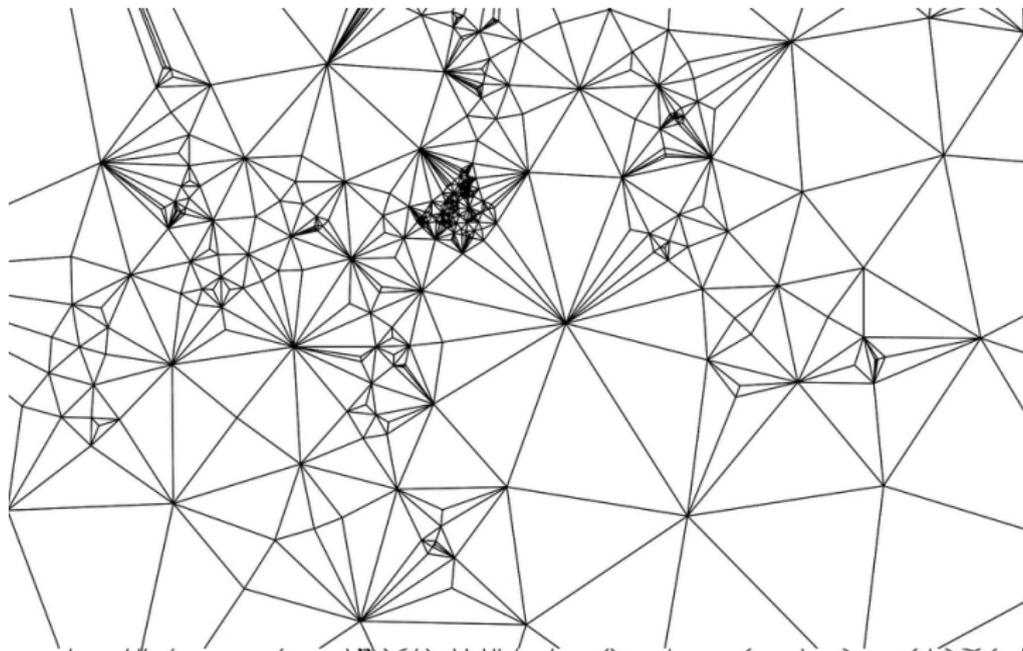


Limites d'échelles ("vue de loin")

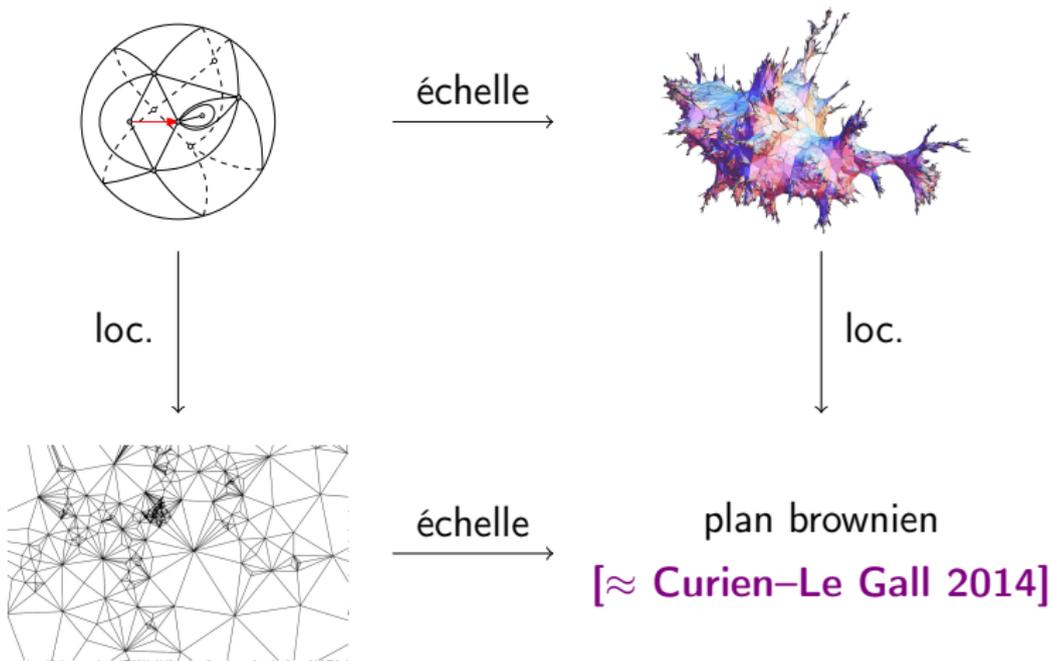
- Les distances entre sommets de T_n sont typiquement d'ordre $n^{1/4}$ [Chassaing–Schaeffer 2004].
- On divise donc toutes les distances par $n^{1/4}$, pour que les distances restent du même ordre de grandeur.
- T_n converge en loi, pour la *distance de Gromov–Hausdorff*, vers un espace métrique compact aléatoire \mathfrak{m} appelé *carte brownienne* [Le Gall 2011, \approx Miermont 2011].
- La carte brownienne est presque sûrement homéomorphe à la sphère [Le Gall–Paulin 2008, Miermont 2008], mais de dimension fractale 4 [Le Gall 2007].
- Outil principal : bijection avec des arbres.

Limites locales ("vue de près")

- Cette fois, on regarde les environs depuis la racine.
- Plus précisément, on utilise la *topologie locale* : deux triangulations sont proches si elles coïncident sur un grand voisinage de la racine.
- Convergence en loi de T_n vers une triangulation *infinie* du plan \mathbb{T} , appelée UIPT (Uniform Infinite Planar Triangulation) [Angel–Schramm 2003].
- Presque sûrement, l'UIPT a une croissance en r^4 [Angel 2004].
- Outils : résultats combinatoires [Tutte, années 60].



Résumé : limites d'échelle et limites locales

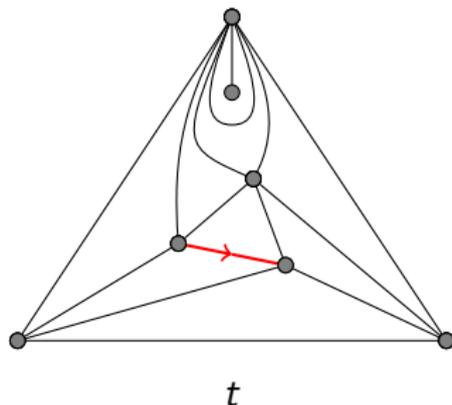


Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.

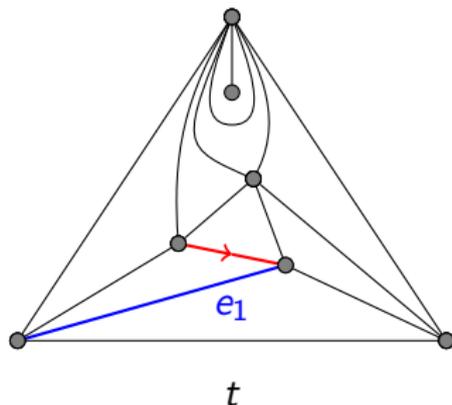
Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.



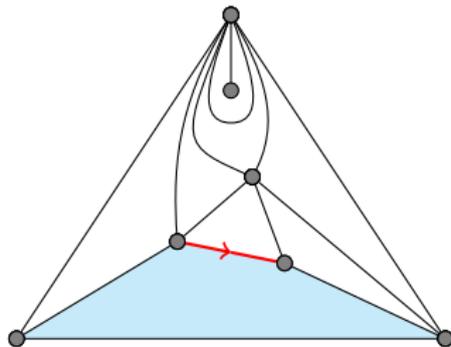
Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.



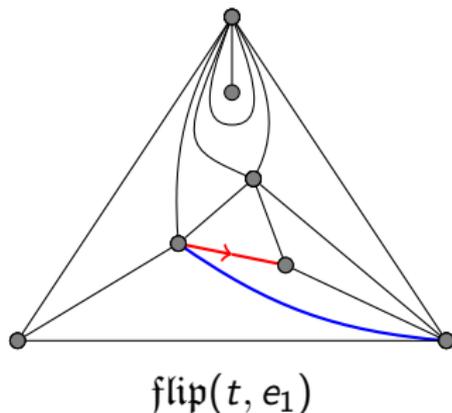
Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.



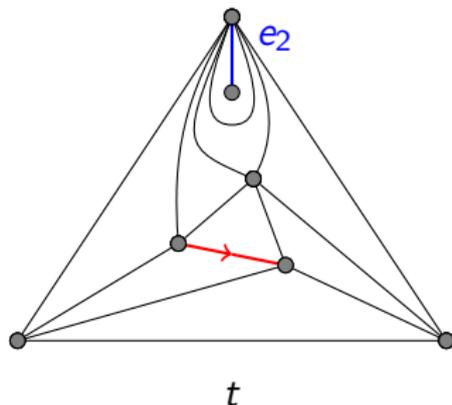
Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.



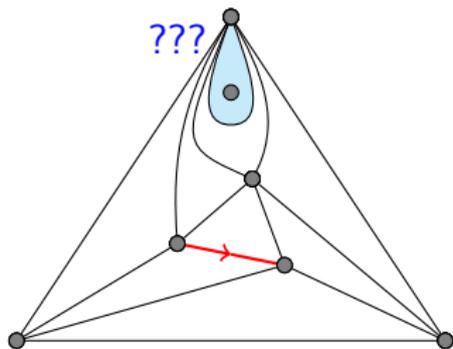
Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.



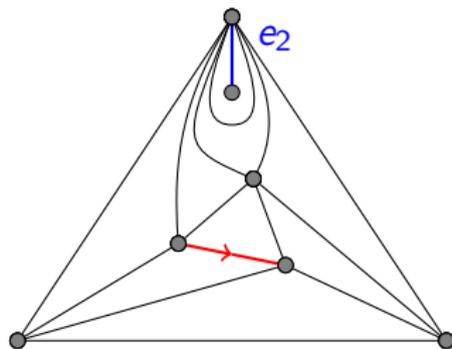
Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.



Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

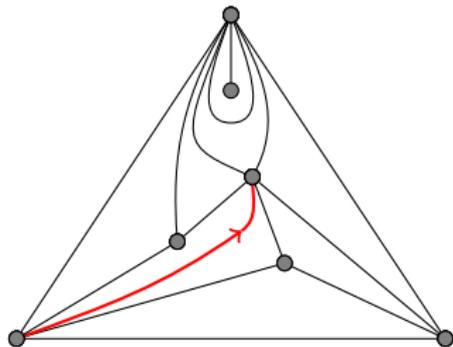
- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.



$$\text{flip}(t, e_2) = t$$

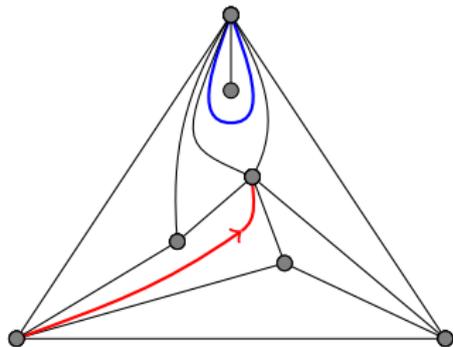
Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.



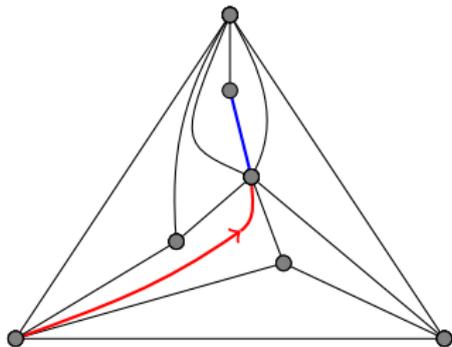
Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.



Comment simuler une grande triangulation uniforme ?

- La taille de l'ensemble \mathcal{T}_n des triangulations de taille n est exponentielle en n : impossible de faire la liste !
- Dans les années 80, les physiciens ont utilisé des *méthodes de Monte-Carlo* : on cherche une chaîne de Markov pour laquelle la mesure uniforme est stationnaire.
- On utilise une opération locale très simple : les *flips*.



- On se donne une triangulation initiale $t_0 \in \mathcal{T}_n$.
- À chaque étape, on choisit une arête uniformément au hasard dans notre triangulation, et on la flippe. On note $T_n(k)$ la triangulation obtenue après k flips.
- La mesure uniforme sur \mathcal{T}_n est réversible, donc stationnaire.
- La chaîne est bien *irréductible* : toutes les triangulations peuvent être atteintes [Wagner 1936], donc elle converge vers la mesure uniforme.
- Question naturelle : combien de flips faut-il pour approcher la mesure uniforme ?

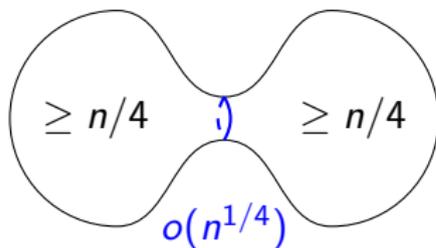
Théorème

Le *temps de mélange* de $(T_n(k))_{k \geq 0}$ (i.e. le nombre de flips nécessaires pour approcher la mesure uniforme) est au moins d'ordre $n^{5/4}$.

Théorème

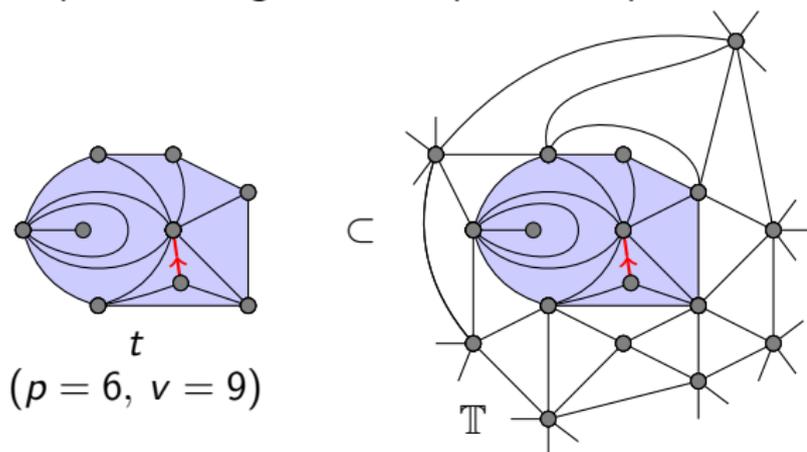
Le *temps de mélange* de $(T_n(k))_{k \geq 0}$ (i.e. le nombre de flips nécessaires pour approcher la mesure uniforme) est au moins d'ordre $n^{5/4}$.

- Idée de la preuve : on s'intéresse à l'existence de petits cycles séparants.



- On s'attend à ce que l'exposant $5/4$ soit optimal. Très récent : le temps de mélange est polynomial, au plus en $n^{13/2}$ [Caraceni–Stauffer 2018].

- Soit t une petite triangulation de périmètre p et à v sommets.

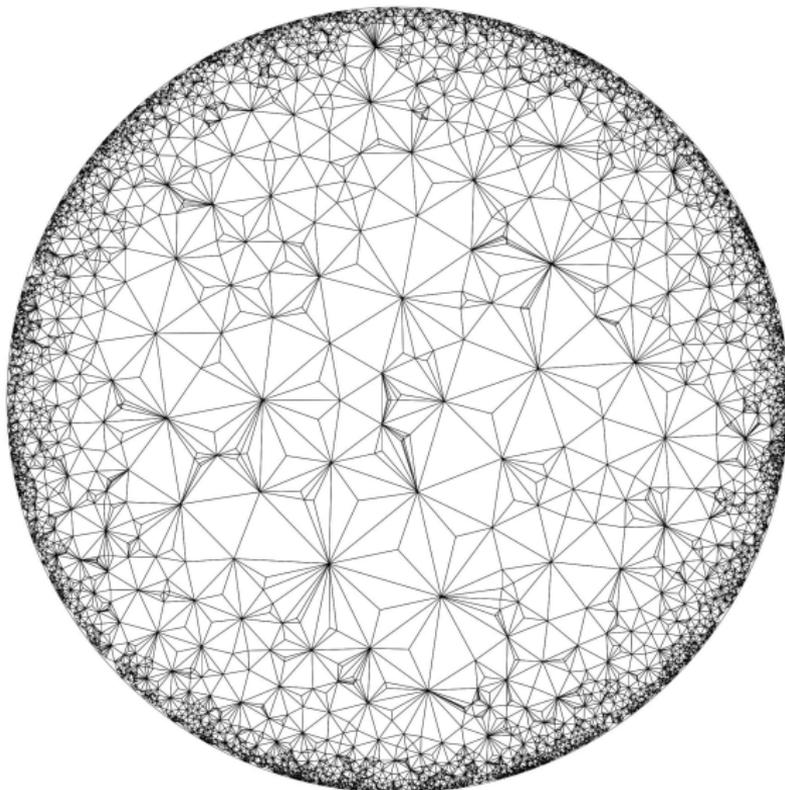


- Alors $\mathbb{P}(t \subset \mathbb{T}) = C_p \times \lambda_c^v$, avec $\lambda_c = \frac{1}{12\sqrt{3}}$ et C_p explicites.
- Conséquence : conditionnellement à $t \subset \mathbb{T}$, la loi du complémentaire $\mathbb{T} \setminus t$ ne dépend que de p .
- Cela permet d'explorer \mathbb{T} de manière markovienne (peeling), et d'étudier la croissance, la marche aléatoire, la percolation...

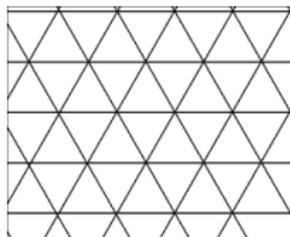
- On dit qu'une triangulation aléatoire du plan T est λ -markovienne s'il existe des constantes $(C_p)_{p \geq 1}$ telles que, pour toute triangulation t de périmètre p et à v sommets,

$$\mathbb{P}(t \subset T) = C_p \times \lambda^v.$$

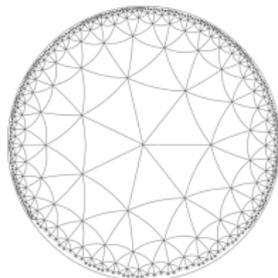
- Pour $0 < \lambda \leq \lambda_c$, il existe une unique triangulation λ -markovienne (notée \mathbb{T}_λ); pour $\lambda > \lambda_c$, il n'en existe pas [[Curien 2014](#)]. Formule explicite pour $C_p(\lambda)$ [[B. 2016](#)].
- Les \mathbb{T}_λ sont appelées PSHIT (Planar Stochastic Hyperbolic Infinite Triangulations).
- \mathbb{T}_{λ_c} est l'UIPT. Pour $0 < \lambda < \lambda_c$, la triangulation \mathbb{T}_λ est **hyperbolique**.



Qu'entend-on par "hyperbolique" ?



vs

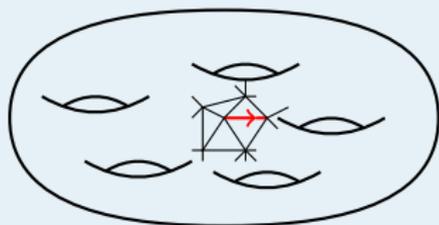


- Propriétés métriques : **croissance exponentielle**, nombreuses géodésiques s'éloignant rapidement les unes des autres...
- Inégalités isopérimétriques : non-moyennabilité...
- Marche aléatoire simple : **transience**, **vitesse positive**, **existence de nombreuses fonctions harmoniques bornées**...
- Comportement d'autres modèles probabilistes : percolation, forêts couvrantes...
- Pour les PSHIT : [**Curien 2014**].

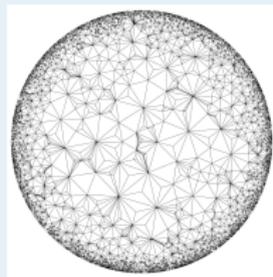
Une conjecture

- Le degré moyen dans une triangulation de la sphère vaut au plus 6 (formule d'Euler). Pour voir les PSHIT comme une limite locale, il faut ajouter des trous.
- Soit $T_{n,g}$ uniforme parmi toutes les triangulations à $2n$ faces du tore à g trous.

Conjecture (Benjamini–Curien 2014)



loc. →



Une conjecture

- Le degré moyen dans une triangulation de la sphère vaut au plus 6 (formule d'Euler). Pour voir les PSHIT comme une limite locale, il faut ajouter des trous.
- Soit $T_{n,g}$ uniforme parmi toutes les triangulations à $2n$ faces du tore à g trous.

Conjecture (Benjamini–Curien 2014)

Soit $0 < \theta < \frac{1}{2}$, et soit (g_n) telle que $\frac{g_n}{n} \rightarrow \theta$. Il existe $\lambda(\theta) \in]0, \lambda_c[$ tel que

$$T_{n,g_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(loi)} \mathbb{T}_\lambda$$

pour la topologie locale.

- Une formule explicite pour $\lambda(\theta)$ [B. 2018].
- Démonstration en cours [B.–Louf 2018+].

Limite d'échelle des PSHIT ?

- Rappel : pour $\lambda = \lambda_c$, si les distances sont multipliées par $1/n \rightarrow 0$, convergence vers le *plan brownien* \mathcal{P} .
- Si on fixe $\lambda \in]0, \lambda_c[$ avant de renormaliser les distances, la croissance est trop rapide !
- Il faut donc faire tendre λ vers λ_c en même temps qu'on renormalise les distances.

Théorème

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres dans $]0, \lambda_c]$ telle que

$$\lambda_n = \lambda_c \left(1 - \frac{2}{3n^4}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Alors

$$\frac{1}{n} \mathbb{T}_{\lambda_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(loi)} \mathcal{P}^h$$

pour la distance de Gromov–Hausdorff, où \mathcal{P}^h est un espace métrique (pointé) aléatoire appelé *plan Brownien hyperbolique*.

Description de \mathcal{P}^h en fonction de \mathcal{P}

- On note $B_r(\mathcal{P})$ la boule de rayon r de \mathcal{P} , et $\overline{B}_r(\mathcal{P})$ l'enveloppe de rayon r , union de $B_r(\mathcal{P})$ et de toutes les composantes connexes bornées de son complémentaire.
- On peut donner un sens au périmètre $P_r(\mathcal{P})$ et au volume $V_r(\mathcal{P})$ de $\overline{B}_r(\mathcal{P})$ [Curien–Le Gall 2014].

Théorème (suite)

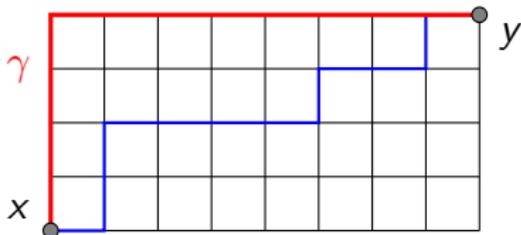
Pour tout $r \geq 0$, l'enveloppe $\overline{B}_r(\mathcal{P}^h)$ est absolument continue par rapport à $\overline{B}_r(\mathcal{P})$, avec densité

$$e^{-2V_{2r}(\mathcal{P})} e^{P_{2r}(\mathcal{P})} \int_0^1 e^{-3P_{2r}(\mathcal{P})x^2} dx.$$

- Idée de la preuve : écrire les relations d'absolue continuité entre \mathbb{T}_{λ_n} et \mathbb{T}_{λ_c} , et passer à la limite.

- Conséquence de l'absolue continuité : \mathcal{P} et \mathcal{P}^h ont les mêmes propriétés locales.
- Comme \mathcal{P} , il donc est p.s. homéomorphe au plan, et de dimension fractale 4.
- Description explicite de la loi des processus $(P_r(\mathcal{P}^h))_{r \geq 0}$ et $(V_r(\mathcal{P}^h))_{r \geq 0}$, similaire à celles obtenues pour \mathcal{P} . En particulier, croissance exponentielle en r .

- Géodésique: chemin le plus court entre deux sommets (dans un graphe) ou deux points (dans un espace métrique).
- Dans un graphe planaire, on peut définir la géodésique *la plus à gauche* entre x et y .



- Géodésiques *infinies* les plus à gauche : γ tel $\gamma(0)$ est la racine, et pour tout n , la partie entre $\gamma(0)$ et $\gamma(n)$ est la géodésique la plus à gauche de $\gamma(0)$ vers $\gamma(n)$.
- Ces géodésiques forment un arbre, où toutes les branches sont infinies.

- Cas "usuels" : propriétés de confluence des géodésiques :
 - confluence dans la carte brownienne [Le Gall 2010],
 - deux géodésiques infinies dans l'UIPT s'intersectent une infinité de fois [\approx Curien–Ménard–Miermont 2013].

- Cas "usuels" : propriétés de confluence des géodésiques :
 - confluence dans la carte brownienne [Le Gall 2010],
 - deux géodésiques infinies dans l'UIPT s'intersectent une infinité de fois [\approx Curien–Ménard–Miermont 2013].
- Arbre de Galton–Watson : arbre où les nombres d'enfants des individus sont indépendants, de même loi μ .

Théorème

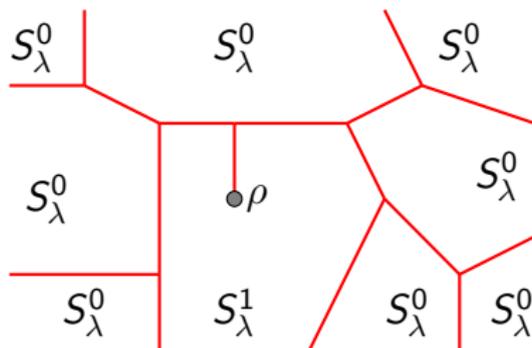
Les géodésiques infinies les plus à gauche de \mathbb{T}_λ forment un arbre de Galton–Watson de loi de reproduction μ_λ , avec $\mu_\lambda(0) = 0$ et

$$\mu_\lambda(k) = m_\lambda(1 - m_\lambda)^{k-1},$$

où m_λ est explicite, avec $m_{\lambda_c} = 1$, et $m_\lambda < 1$ pour $\lambda < \lambda_c$.

- En particulier, pour $\lambda = \lambda_c$, une seule géodésique infinie la plus à gauche. Pour $\lambda < \lambda_c$, il y en a une infinité.

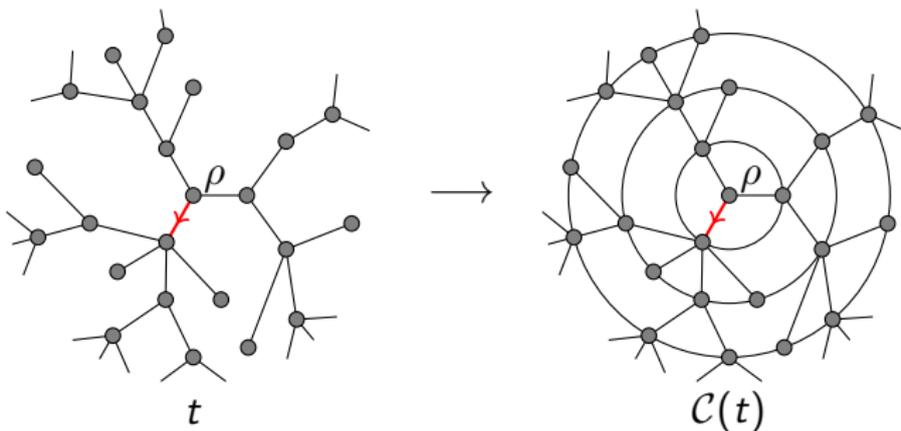
Décomposition de \mathbb{T}_λ en bandes



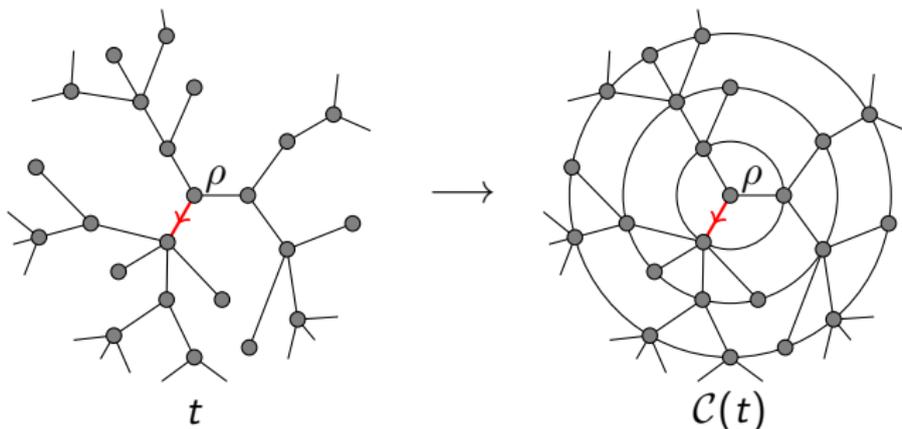
- L'arbre des géodésiques infinies les plus à gauche découpe \mathbb{T}_λ en "bandes".
- Ces bandes sont indépendantes de l'arbre et entre elles, et ont presque toutes la même loi.
- Preuve du théorème : on adapte aux PSHIT une décomposition due à Krikun pour l'UIPT.

- Les branches infinies de l'arbre des géodésiques peuvent être vues comme des "points à l'infini" de \mathbb{T}_λ , ce qui donne une nouvelle construction de la frontière de Poisson, après **[Angel–Hutchcroft–Nachmias–Ray 2016]**.
- En passant à la limite d'échelle, on obtient l'arbre des géodésiques infinies de \mathcal{P}^h : c'est un arbre binaire complet, où les longueurs des arêtes sont des variables exponentielles i.i.d..
- Nouveaux résultats d'hyperbolicité pour \mathbb{T}_λ (voir section suivante !).

- Soit t un arbre infini. La *carte causale* $\mathcal{C}(t)$ associée à t est obtenue à partir de t en ajoutant à chaque niveau un cycle reliant les sommets de la même génération.



- Soit t un arbre infini. La *carte causale* $\mathcal{C}(t)$ associée à t est obtenue à partir de t en ajoutant à chaque niveau un cycle reliant les sommets de la même génération.



- On veut étudier $\mathcal{C}(T)$, où T est un arbre de Galton–Watson de loi de reproduction μ .

- Motivations :
 - d'après les simulations des physiciens, généralisation en dimension supérieure plus agréable,
 - "modèle-jouet" pour d'autres modèles de cartes qui font apparaître des arbres.

- Motivations :
 - d'après les simulations des physiciens, généralisation en dimension supérieure plus agréable,
 - "modèle-jouet" pour d'autres modèles de cartes qui font apparaître des arbres.
- Soit $m = \sum_i i\mu(i)$ le nombre moyen d'enfants.
 - Cas critique ($m = 1$, avec T conditionné à être grand) : propriétés métriques et spectrales étudiées récemment [[Curien–Hutchcroft–Nachmias 2017](#)].
 - Pour obtenir des objets hyperboliques, on s'intéresse au cas *surcritique* : $m > 1$. Dans ce cas, avec probabilité > 0 , l'arbre T est infini et croît exponentiellement.

Théorème

Toute carte planaire aléatoire qui contient un arbre de Galton–Watson surcritique vérifie les deux propriétés suivantes :

- une forme faible de Gromov-hyperbolicité,
 - l'existence de géodésiques bi-infinies (chemins indexés par \mathbb{Z} dont la restriction à chaque segment est une géodésique).
-
- Résultat robuste : cartes causales surcritiques, mais aussi PSHIT grâce à la section précédente !
 - Pour les géodésiques bi-infinies, répond à une question de [\[Benjamini–Tessera 2016\]](#) sur les PSHIT.
 - Idée de la preuve : l'arbre croît très vite, donc il est difficile de se déplacer horizontalement. Dans beaucoup de cas, mieux vaut revenir près de la racine.

- Soit (X_n) la marche aléatoire simple sur $\mathcal{C}(T)$. L'arbre T est transient, donc $\mathcal{C}(T)$ aussi : X_n part à l'infini.
 - Dans quelle direction ?
 - À quelle vitesse ?

Théorème

L'ensemble des bouts de T est (à peu près) une réalisation de la frontière de Poisson de $\mathcal{C}(T)$.

- Autrement dit, (X_n) va rester proche d'une branche (aléatoire) de l'arbre, et cette branche aléatoire permet de décrire toutes les fonctions harmoniques bornées sur $\mathcal{C}(T)$.

Théorème

Supposons $\mu(0) = 0$. Il existe une constante $v_\mu > 0$ telle que

$$\frac{d_{\mathcal{C}(\mathcal{T})}(X_0, X_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{a.s.} v_\mu.$$

Théorème

Supposons $\mu(0) = 0$. Il existe une constante $v_\mu > 0$ telle que

$$\frac{d_{\mathcal{C}(T)}(X_0, X_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{a.s.} v_\mu.$$

- Déjà connu pour d'autres modèles comme les PSHIT [Curien 2014] ou l'arbre T [Lyons–Pemantle–Peres 1996].
- Les méthodes "habituelles" (théorie ergodique) ne marchent pas car les cartes causales ne sont pas *stationnaires*. Il faut donc de nouvelles idées.
- Questions ouvertes : marche biaisée ? Cas $\mu(0) > 0$? Probabilité de retour à la racine ?

MERCI !