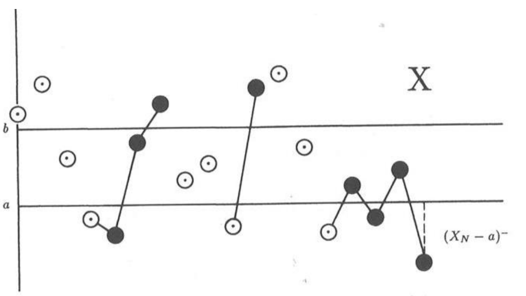
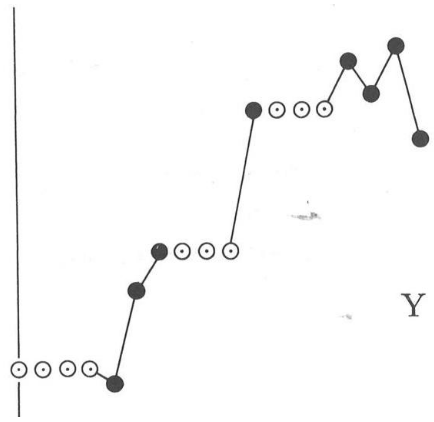
Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2016-2017 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 7 : Convergence des martingales

Lundi 7 Novembre

Exercice 1 (Une jolie image)
Quel est le rapport entre l'image suivante et la preuve du théorème de convergence des martingales ?





Exercice 2 (Exemples et contre-exemples)

1. Trouver un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans L^1.
2. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans L^1.
3. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.

Exercice 3 (Urne de Polya)
À l'instant 0, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule uniformément et on la remplace par deux boules de sa couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}\left(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n\right)$ et $\mathbb{P}\left(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n\right)$.
2. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.

3. *Cas* $a = b = 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de U.
4. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:
$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(N_0+n)(N_0+n+1)\dots(N_0+n+k-1)} .$$
Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.
5. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). Expliquer pourquoi on a caractérisé la loi de U.

Exercice 4 (Théorème de Kakutani)
Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes positives d'espérance 1. Pour $n \geq 0$ on pose
$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k \qquad (\text{avec } M_0 = 1).$$

1. Montrer que (M_n) est une martingale qui converge p.s. vers une variable M_∞.
Pour $k \geq 1$, soit $a_k = \mathbb{E}[\sqrt{X_k}] \in]0, 1]$ (par Cauchy-Schwarz) et
$$N_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{X_k}}{a_k} \qquad (\text{avec } N_0 = 1).$$
2. En utilisant le processus (N_n), montrer que les cinq conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$,
   (b) $M_n \to M_\infty$ dans L^1 quand $n \to \infty$,
   (c) la martingale (M_n) est uniformément intégrable,
   (d) $\prod_{k=1}^{\infty} a_k > 0$,
   (e) $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) < \infty$.

   Montrer que si l'une des conditions précédentes n'est pas remplie alors $M_\infty = 0$ presque sûrement.

Exercice 5 (Théorème de Rademacher)
Le but de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose
$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n) \right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :
$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X)\,.$$
2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathscr{F}_n$-martingale bornée (où $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite p.s. et dans L^1 de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $Z = g(X)$.
4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s. :
$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u\,.$$
5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$.

Exercice 6 (Singe savant)
Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note T le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot "ABRACADABRA". Pour calculer $\mathbb{E}[T]$, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \ldots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement

$$\{\text{la } n\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "A"}\}.$$

Si il perd, il part (et le singe met 1 banane dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26 euros du singe qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+1\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "B"}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2 bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+2\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "R"}\}.$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe.

1. Montrer que le nombre de bananes dans le sac du chimpanzé au temps n est une martingale pour $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$, où $\mathscr{F}_n$ est la tribu engendrée par les n premières lettres tapées par l'animal.
2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$

3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK". Commenter.

Exercice 7 (Propriété de Liouville)
Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \to \mathbb{R}$. On dit que h est *harmonique sur* G si pour tout $x \in V$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y),$$

où la somme est effectuée sur les voisins y de x et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que G vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur G est constante.

1. Montrer que si h est harmonique et (X_n) est une marche aléatoire simple sur G, alors $(h(X_n))_{n \geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que si la marche aléatoire simple sur G est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors G vérifie la propriété de Liouville.
3. (Difficile) Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod 2$. Montrer qu'il existe (X_n) et (Y_n) deux marches aléatoires simples (non indépendantes !) issues respectivement de x et y telles que p.s., pour n assez grand, $X_n = Y_n$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}^d$ vérifie la propriété de Liouville.
5. Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

Indication : Pour la question 3, commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à d quelconque.