

## TD 12 : Chaînes de Markov : classification des états, mesures invariantes

Mercredi 6 Décembre

### Exercice 1 (Petites questions sur la classification des états)

On notera génériquement  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov de matrice de transition  $Q$  à valeurs dans un espace d'états dénombrable  $S$ . Pour  $x \in S$ , on notera  $N_x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$ .

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de  $x$  n'est pas déterministe.
2. Donner un exemple où, sous  $\mathbb{P}_x$ , l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même, sans que  $x$  soit récurrent. Donner un exemple où, de plus, l'ensemble des 3 premiers points visités en partant de  $x$  n'est pas déterministe.
3. Pour  $x, y \in S$ , est-il vrai que si  $y$  est récurrent et il existe  $n$  tel que  $Q^n(x, y) > 0$ , alors  $N_y = +\infty$   $\mathbb{P}_x$ -p.s. ?
4. Donner un exemple où il existe  $n$  tel que  $Q^n(x, y) > 0$  mais  $Q^m(y, x) = 0$  pour tout  $m \geq 0$ .
5. Montrer que pour  $x, y \in S$ , si  $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$ , alors  $y$  est récurrent. La réciproque est-elle vraie ?
6. Peut-on avoir  $0 < \mathbb{E}_x[N_y] < +\infty$ , avec  $y$  récurrent ?
7. Si  $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$ , quelles valeurs peut prendre  $\mathbb{E}_y[N_x]$  ?
8. On suppose que pour tout  $x \in S$ , l'ensemble  $V_x = \{y \in S \mid \exists n \text{ tel que } Q^n(x, y) > 0\}$  est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.

### Exercice 2 (Chaînes irréductibles)

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov à valeurs dans un espace dénombrable  $S$  de matrice de transition  $Q$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est irréductible si et seulement si il n'existe pas de sous-ensemble strict non vide  $F$  de  $S$  tel que

$$\forall x \in F, \forall y \in S \setminus F, \quad Q(x, y) = 0.$$

**Exercice 3** (Condition de Kolmogorov pour la réversibilité)

On considère une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable  $S$ , de matrice de transition  $Q$ . Montrer que la chaîne admet une mesure réversible si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $\forall (x, y) \in S^2, \quad Q(x, y) > 0 \implies Q(y, x) > 0,$
- Pour toute "boucle"  $x_0, x_1, \dots, x_n = x_0$  telle que  $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$ , on a

$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = 1.$$

**Exercice 4** (Chaîne de naissance et de mort)

Soit  $Q$  la matrice de transition sur  $\mathbb{N}$  donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec  $p_0 > 0, p_0 + r_0 = 1$ , ainsi que  $p_i > 0, q_i > 0$  et  $p_i + r_i + q_i = 1$  pour tout  $i \geq 1$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov à valeurs dans  $\mathbb{N}$  de matrice de transition  $Q$ .

1. Montrer que  $X$  est irréductible.
2. On suppose que

$$\sum_{i \geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < +\infty.$$

Montrer que  $X$  admet une mesure de probabilité réversible  $\pi$  qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur  $X$  ?

3. On pose  $f(j) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i}$  (avec  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ ) et  $\tau = \inf\{n \geq 0 | X_n = 0\}$ . Montrer que  $f(X_{n \wedge \tau})$  est une martingale, et en déduire que  $X_n$  est récurrente si et seulement si

$$\sum_{i \geq 0} \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i} = +\infty.$$

**Exercice 5** (Temps de départ)

Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov sur un espace dénombrable  $E$ , de matrice de transition  $Q$ . On suppose que  $Q(x, x) < 1$  pour tout  $x \in E$ . On note  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  la filtration canonique et on définit

$$\tau = \inf\{n \geq 1, X_n \neq X_0\}.$$

1. Montrer que  $\tau$  est un temps d'arrêt et que pour tout  $x \in E$ ,  $\tau$  est fini  $\mathbb{P}_x$ -p.s. Calculer les lois de  $\tau$  et de  $X_\tau$  sous  $\mathbb{P}_x$ .
2. On définit une suite de variables  $(\tau_k)_{k \geq 0}$  par

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_1 = \tau, \quad \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k, X_n \neq X_{\tau_k}\}.$$

Montrer que les  $\tau_k$  sont des temps d'arrêt finis  $\mathbb{P}_x$ -p.s.

3. On définit un processus  $(Y_n)$  par  $Y_n = X_{\tau_n}$ . Montrer que  $(Y_n)$  est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
4. On suppose que  $(X_n)$  est irréductible récurrente. Montrer que  $(Y_n)$  est aussi irréductible récurrente.
5. Soit  $\mu$  une mesure invariante pour  $(X_n)$ . A partir de  $\mu$ , construire une mesure  $\nu$  invariante pour  $(Y_n)$ .

**Exercice 6** (Beaucoup de jolies images)

Les jolies images ci-dessous sont des illustrations de l'exercice 4 (jusqu'à  $n = 1000$ , avec  $X_0 = 20$  à chaque fois, les échelles verticales changent d'une image à l'autre). On a pris à chaque fois  $r_i = 0$ , et on a testé les valeurs suivantes pour  $i \geq 1$  :

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| 1. $p_i = \frac{2}{5}$                | 4. $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2i}$        |
| 2. $p_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i}$ | 5. $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{i}}$ |
| 3. $p_i = \frac{1}{2}$                | 6. $p_i = \frac{3}{5}$                       |

Retrouver l'image qui correspond à chaque cas.

