

## TD 12 : Chaînes de Markov : classification des états, mesures invariantes Corrigé

Mercredi 6 Décembre

### Exercice 1 (Petites questions sur la classification des états)

On notera génériquement  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov de matrice de transition  $Q$  à valeurs dans un espace d'états dénombrable  $S$ . Pour  $x \in S$ , on notera  $N_x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$ .

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de  $x$  n'est pas déterministe.
2. Donner un exemple où, sous  $\mathbb{P}_x$ , l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même, sans que  $x$  soit récurrent. Donner un exemple où, de plus, l'ensemble des 3 premiers points visités en partant de  $x$  n'est pas déterministe.
3. Pour  $x, y \in S$ , est-il vrai que si  $y$  est récurrent et il existe  $n$  tel que  $Q^n(x, y) > 0$ , alors  $N_y = +\infty$   $\mathbb{P}_x$ -p.s. ?
4. Donner un exemple où il existe  $n$  tel que  $Q^n(x, y) > 0$  mais  $Q^m(y, x) = 0$  pour tout  $m \geq 0$ .
5. Montrer que pour  $x, y \in S$ , si  $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$ , alors  $y$  est récurrent. La réciproque est-elle vraie ?
6. Peut-on avoir  $0 < \mathbb{E}_x[N_y] < +\infty$ , avec  $y$  récurrent ?
7. Si  $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$ , quelles valeurs peut prendre  $\mathbb{E}_y[N_x]$  ?
8. On suppose que pour tout  $x \in S$ , l'ensemble  $V_x = \{y \in S \mid \exists n \text{ tel que } Q^n(x, y) > 0\}$  est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.

### Solution de l'exercice 1

1. On prend  $S = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Q(1, 1) = Q(-1, -1) = 1$  et  $Q(0, 1) = Q(0, -1) = 1/2$ . Alors, sous  $\mathbb{P}_0$ , l'ensemble des points visités est  $\{0, 1\}$  avec probabilité  $1/2$ , et  $\{0, -1\}$  avec probabilité  $1/2$ .
2. Pour  $S = \{0, 1\}$  et  $Q(0, 1) = 1 = Q(1, 1)$ , on voit que  $x = 0$  n'est pas récurrent, et l'ensemble des points visités par la chaîne est  $\{0, 1\}$   $\mathbb{P}_0$ -p.s..  
Pour  $S = \{0, 1, 2\}$  et  $Q(i, 1) = Q(i, 2) = 1/2$  pour  $i = 0, 1, 2$ , on voit que  $x = 0$  n'est pas récurrent, que l'ensemble des points visités est  $\{0, 1, 2\}$   $\mathbb{P}_0$ -p.s., et que le deuxième point visité est 1 ou 2 avec probabilité  $1/2$  chacun.
3. La réponse est non. Il suffit de reprendre l'exemple de la question 1., on voit que 1 est récurrent,  $Q(0, 1) > 0$  mais  $\mathbb{P}_0(N_1 = +\infty) = 1/2$ .
4. Toujours avec le même exemple,  $Q(0, 1) > 0$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $Q^p(1, 0) = 0$ .

5. On a, d'après la propriété de Markov forte pour  $H_y = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = y\}$ , en notant  $(Y_n)$  une autre chaîne de même matrice de transition,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[N_y] &= \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{H_y < +\infty} \sum_{n \geq H_y} \mathbb{1}_{X_n = y} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{H_y < +\infty} \mathbb{E}_{X_{H_y}} \left[ \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{Y_n = y} \right] \right] \\ &= \mathbb{P}_x(H_y < +\infty) \mathbb{E}_y \left[ \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{Y_n = y} \right] \\ &= \mathbb{P}_x(H_y < +\infty) \mathbb{E}_y[N_y], \end{aligned}$$

donc si  $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$ , comme  $\mathbb{P}_x(H_y < +\infty)$  est fini, on a  $\mathbb{E}_y[N_y] = +\infty$ , i.e.  $y$  est récurrent.

La réciproque est fautive, cf l'exemple 1. où 1 est récurrent, mais  $\mathbb{E}_{-1}[N_1] = 0$ .

6. Non, car  $\mathbb{E}_x[N_y] = \mathbb{P}_x(H_y < +\infty) \mathbb{E}_y[N_y]$  (cf question 5.) et  $\mathbb{E}_y[N_y] = +\infty$ , donc  $\mathbb{E}_x[N_y] = 0$  ou  $+\infty$  selon que  $\mathbb{P}_x(H_y < +\infty) = 0$  ou  $> 0$ .
7. Si  $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$ , alors  $y$  est récurrent (cf 5.). On en déduit que  $\mathbb{E}_y[N_x]$  ne peut prendre que 2 valeurs :  $\mathbb{E}_y[N_x] = +\infty$  si  $x$  est récurrent et dans la même classe que  $y$ , et  $\mathbb{E}_y[N_x] = 0$  sinon.
8. Soit  $x \in E$ . Sous  $\mathbb{P}_x$ , la chaîne reste p.s. dans  $V_x$ , donc sous  $\mathbb{P}_x$ ,

$$\forall k \geq 0 \quad \sum_{y \in V_x} Q^k(x, y) = 1,$$

donc

$$\sum_{y \in V_x} \sum_{k \geq 0} Q^k(x, y) = \sum_{k \geq 0} \sum_{y \in V_x} Q^k(x, y) = +\infty.$$

$V_x$  étant fini, il existe  $y \in V_x$  tel que  $\mathbb{E}_x[N_y] = \sum_{k \geq 0} Q^k(x, y) = +\infty$ , ce qui implique (cf 5.) que  $y$  est récurrent.

### Exercice 2 (Chaînes irréductibles)

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov à valeurs dans un espace dénombrable  $S$  de matrice de transition  $Q$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est irréductible si et seulement si il n'existe pas de sous-ensemble strict non vide  $F$  de  $S$  tel que

$$\forall x \in F, \forall y \in S \setminus F, \quad Q(x, y) = 0.$$

Solution de l'exercice 2 • On suppose que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est irréductible et que l'on peut trouver un sous-ensemble strict non vide  $F$  de  $S$  tel que

$$\forall x \in F, \forall y \in S \setminus F, \quad Q(x, y) = 0.$$

Soient  $x \in F$  et  $y \in S \setminus F$ . Par hypothèse  $Q(x, y) = 0$  et, puisque la chaîne est irréductible, il existe  $n \geq 2$  tel que  $Q^n(x, y) > 0$ , et donc une suite  $x = x_1, x_2, \dots, x_n = y$  d'éléments de  $S$  telle que  $Q(x_i, x_{i+1}) > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ . Soit

$$k = \max\{1 \leq i \leq n-1 \mid x_i \in F\}.$$

Alors  $x_k \in F$ ,  $x_{k+1} \in S \setminus F$  et  $Q(x_k, x_{k+1}) > 0$  ce qui est impossible.

• On suppose que pour tout sous-ensemble strict non vide  $F$  de  $S$ , il existe  $x \in F$  et  $y \in S \setminus F$  tels que  $Q(x, y) > 0$ . Pour  $x \in S$ , on note  $S_x = \{y \in E : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Q^n(x, y) > 0\}$ . On veut montrer que  $S_x = S$ . L'ensemble  $S_x$  est non vide car il contient  $x$ . Supposons que  $S_x \neq S$ , et soient  $a \in S_x$  et  $b \in S \setminus S_x$

tels que  $Q(a, b) > 0$  (ils existent par hypothèse). On a  $a \in S_x$  donc il existe  $n \geq 0$  tel que  $Q^n(x, a) > 0$ , d'où

$$Q^{n+1}(x, b) \geq Q^n(x, a)Q(a, b) > 0.$$

Ceci est absurde car alors  $b \in S_x$ . Cela signifie que  $S_x = S$  et ceci pour tout  $x \in S$ . La chaîne est donc irréductible.

**Exercice 3** (Condition de Kolmogorov pour la réversibilité)

On considère une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable  $S$ , de matrice de transition  $Q$ . Montrer que la chaîne admet une mesure réversible si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $\forall (x, y) \in S^2, \quad Q(x, y) > 0 \implies Q(y, x) > 0,$
- Pour toute "boucle"  $x_0, x_1, \dots, x_n = x_0$  telle que  $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$ , on a

$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = 1.$$

*Solution de l'exercice 3*

• Supposons qu'il existe une mesure réversible  $\mu$ , i.e.  $\mu$  n'est pas identiquement nulle (cette partie de la définition est souvent omise car trivialement vérifiée...) et pour tout  $(x, y) \in S^2$ ,  $\mu(x)Q(x, y) = \mu(y)Q(y, x)$ . Montrons d'abord que  $\mu(x) > 0$  pour tout  $x \in S$ . Soit  $x \in S$ . On sait qu'il existe  $y \in S$  tel que  $\mu(y) > 0$ . Puisque la chaîne est irréductible, il existe  $x_0 = y, x_1, \dots, x_n = x$  tels que  $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ . La condition de réversibilité de  $\mu$  pour le couple  $(x_0, x_1)$  donne alors

$$\mu(x_1)Q(x_1, x_0) = \mu(x_0)Q(x_0, x_1) > 0,$$

donc  $\mu(x_1) > 0$ . Par une récurrence immédiate, on obtient  $\mu(x_i) > 0$  pour tout  $i$  donc  $\mu(x) > 0$ , et ce pour tout  $x \in S$ . La condition de réversibilité s'écrit alors pour tous  $(x, y) \in S^2$

$$Q(y, x) = \frac{\mu(x)}{\mu(y)}Q(x, y),$$

donc

$$Q(x, y) > 0 \implies Q(y, x) > 0.$$

De plus, soient  $x_0, x_1, \dots, x_n = x_0$  dans  $S$  tels que  $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$ . Alors on a

$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = \prod_{i=1}^n \frac{\mu(x_i)}{\mu(x_{i-1})} = 1,$$

ce qui achève la démonstration de la première implication.

• Réciproquement, supposons que les conditions données dans l'énoncé sont satisfaites. Nous allons définir une mesure réversible  $\mu$ . Soit  $x$  fixé arbitrairement dans  $S$ , on pose  $\mu(x) = 1$ . Soit  $y \in S$ . Puisque la chaîne est irréductible, il existe  $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$  tels que  $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Pour que  $\mu$  soit réversible, il faut  $\mu(x_{i-1})Q(x_{i-1}, x_i) = \mu(x_i)Q(x_i, x_{i-1})$  pour tout  $i$ . Puisque  $Q(x_i, x_{i-1}) > 0$  pour tout  $i$  par hypothèse, on peut donc poser

$$\mu(y) = \prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})}.$$

Vérifions que  $\mu(y)$  est bien défini, c'est à dire que sa valeur ne dépend pas du chemin  $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$  choisi (du moment que  $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$  pour tout  $i$ ). Soit  $y_0 = x, y_1, \dots, y_m = y$  un autre chemin tel que  $Q(y_{i-1}, y_i) > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ . On veut montrer

$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = \prod_{i=1}^m \frac{Q(y_{i-1}, y_i)}{Q(y_i, y_{i-1})}, \quad (1)$$

ce qu'on peut faire en appliquant l'hypothèse à la "boucle"

$$(z_0, \dots, z_{n+m}) = (x, x_1, \dots, x_{n-1}, y, y_{m-1}, \dots, y_1, x).$$

La mesure  $\mu$  est ainsi bien définie partout, et non identiquement nulle. Il reste à vérifier qu'elle est bien réversible. Soit  $z$  un autre état de  $S$ , il suffit de vérifier que  $\mu(y)Q(y, z) = \mu(z)Q(z, y)$ . Si  $Q(y, z) = 0$ , alors  $Q(z, y) = 0$  et l'égalité est triviale. Si  $Q(y, z) > 0$ , alors en reprenant le chemin  $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$  utilisé pour définir  $\mu(y)$ , on construit un chemin  $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y, x_{n+1} = z$  de  $x$  à  $z$  tel que  $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$  pour tout  $1 \leq n+1$ , et par construction de  $\mu$  on a

$$\mu(z) = \prod_{i=1}^{n+1} \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = \mu(y) \frac{Q(y, z)}{Q(z, y)},$$

donc  $\mu$  est bien réversible.

**Exercice 4** (Chaîne de naissance et de mort)

Soit  $Q$  la matrice de transition sur  $\mathbb{N}$  donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec  $p_0 > 0, p_0 + r_0 = 1$ , ainsi que  $p_i > 0, q_i > 0$  et  $p_i + r_i + q_i = 1$  pour tout  $i \geq 1$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov à valeurs dans  $\mathbb{N}$  de matrice de transition  $Q$ .

1. Montrer que  $X$  est irréductible.
2. On suppose que

$$\sum_{i \geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < +\infty.$$

Montrer que  $X$  admet une mesure de probabilité réversible  $\pi$  qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur  $X$  ?

3. On pose  $f(j) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i}$  (avec  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ ) et  $\tau = \inf\{n \geq 0 | X_n = 0\}$ . Montrer que  $f(X_{n \wedge \tau})$  est une martingale, et en déduire que  $X_n$  est récurrente si et seulement si

$$\sum_{i \geq 0} \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i} = +\infty.$$

Solution de l'exercice 4

1. Soient  $i \in \mathbb{N}$  et  $j \in \mathbb{N}$ . On remarque que

$$\begin{aligned} Q^{j-i}(i, j) &\geq Q(i, i+1) \cdots Q(j-1, j) = p_i \cdots p_{j-1} > 0 \text{ si } i < j \\ Q^{i-j}(i, j) &\geq Q(i, i-1) \cdots Q(j+1, j) = q_i \cdots q_{j+1} > 0 \text{ si } i > j \\ Q^2(i, i) &\geq Q(i, i+1)Q(i+1, i) = p_i q_{i+1} > 0, \end{aligned}$$

donc  $X$  est irréductible.

2. Soit  $\pi$  une mesure de probabilité. Elle est réversible ssi pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\pi(i)p_i = \pi(i+1)q_{i+1}. \tag{2}$$

En effet cette condition est suffisante car si  $j \neq i \pm 1$ , la condition  $\pi(i)Q(i, j) = \pi(j)Q(j, i)$  est triviale. La condition (2) est équivalente à : pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\pi(i) = \pi(0) \times \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}. \tag{3}$$

Il suffit donc de vérifier qu'il existe une mesure de probabilité qui satisfait (3). Or

$$s := \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} \in ]0, +\infty[$$

par hypothèse, donc on peut poser  $\pi(0) = \frac{1}{s}$  pour obtenir  $\sum_i \pi(i) = 1$ . On en déduit que la mesure  $\pi$  définie par

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \pi(i) = \frac{1}{s} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}$$

est bien une probabilité réversible pour la chaîne.

La mesure  $\pi$  étant réversible, elle est également invariante. Puisque la chaîne est irréductible et admet une probabilité invariante, on sait qu'elle est aussi récurrente positive.

Si la somme considérée est infinie,  $\pi$  reste une mesure réversible donc invariante, mais sa masse est infinie. Par unicité de la mesure invariante pour une chaîne de Markov irréductible,  $X$  n'a donc pas de mesure de proba invariante, donc la condition qu'on a donnée est nécessaire et suffisante.

3. On se fixe un point de départ  $x > 0$ , et on commence par montrer que  $f(X_{n \wedge \tau})$  est une martingale sous  $\mathbb{P}_x$  pour  $(\mathcal{F}_n)$ , où  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ . Si  $X_{n \wedge \tau} = 0$ , alors  $X_{(n+1) \wedge \tau} = 0$ , donc

$$\mathbb{E}[f(X_{(n+1) \wedge \tau}) | \mathcal{F}_n] = f(0) = f(X_{n \wedge \tau}).$$

Si  $X_{n \wedge \tau} > 0$ , alors  $X_{(n+1) \wedge \tau} = X_{n+1}$ , et sa loi conditionnelle sachant  $\mathcal{F}_n$  est la suivante : elle vaut  $X_n + 1$  avec proba  $p_{X_n}$ , elle vaut  $X_n$  avec proba  $r_{X_n}$ , et elle vaut  $X_n - 1$  avec proba  $q_{X_n}$ . On en déduit

$$\mathbb{E}[f(X_{(n+1) \wedge \tau}) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = p_{X_n} f(X_n + 1) + r_{X_n} f(X_n) + q_{X_n} f(X_n - 1).$$

Pour conclure, il suffit donc de vérifier, pour tout  $j \geq 1$ , la relation

$$p_j f(j+1) + r_j f(j) + q_j f(j-1) = f(j).$$

En remplaçant  $r_j$  par  $1 - p_j - q_j$ , elle équivaut à

$$p_j (f(j+1) - f(j)) = q_j (f(j) - f(j-1)),$$

qui est facile à vérifier.

Si la somme considérée est finie, alors  $f$  est bornée, donc la martingale  $f(X_{n \wedge \tau})$  converge p.s. et dans  $L^1$  vers une limite  $M_\infty$  avec  $\mathbb{E}[M_\infty] = f(x) > 0$  (on rappelle qu'on a choisi un point de départ  $x > 0$ ). En particulier, on a  $\mathbb{P}_x(M_\infty > 0) > 0$ . Mais si  $M_\infty > 0$ , alors forcément  $\tau = +\infty$ . On a donc  $\mathbb{P}_x(\tau = +\infty) > 0$ , donc la chaîne  $X$  est transiente.

Si au contraire la somme est infinie, alors  $\lim_{j \rightarrow +\infty} f(j) = +\infty$ . De plus,  $f(X_{n \wedge \tau})$  est une martingale positive, donc elle converge p.s.. Par conséquent,  $X_{n \wedge \tau}$  est p.s. constante à partir d'un certain rang, donc soit  $\tau < +\infty$ , soit  $X_n$  est constante à partir d'un certain rang. Le second cas est impossible par irréductibilité, donc  $\tau < +\infty$  p.s. et la chaîne est récurrente.

### Exercice 5 (Temps de départ)

Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov sur un espace dénombrable  $E$ , de matrice de transition  $Q$ . On suppose que  $Q(x, x) < 1$  pour tout  $x \in E$ . On note  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  la filtration canonique et on définit

$$\tau = \inf\{n \geq 1, X_n \neq X_0\}.$$

1. Montrer que  $\tau$  est un temps d'arrêt et que pour tout  $x \in E$ ,  $\tau$  est fini  $\mathbb{P}_x$ -p.s. Calculer les lois de  $\tau$  et de  $X_\tau$  sous  $\mathbb{P}_x$ .
2. On définit une suite de variables  $(\tau_k)_{k \geq 0}$  par

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_1 = \tau, \quad \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k, X_n \neq X_{\tau_k}\}.$$

Montrer que les  $\tau_k$  sont des temps d'arrêt finis  $\mathbb{P}_x$ -p.s.

3. On définit un processus  $(Y_n)$  par  $Y_n = X_{\tau_n}$ . Montrer que  $(Y_n)$  est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
4. On suppose que  $(X_n)$  est irréductible récurrente. Montrer que  $(Y_n)$  est aussi irréductible récurrente.
5. Soit  $\mu$  une mesure invariante pour  $(X_n)$ . A partir de  $\mu$ , construire une mesure  $\nu$  invariante pour  $(Y_n)$ .

Solution de l'exercice 5

1. Pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\{\tau \leq n\} = \bigcup_{i=1}^n \{X_n \neq X_0\} \in \mathcal{F}_n$  donc  $\tau$  est bien un temps d'arrêt. De plus, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}_x(\tau > n) = \mathbb{P}_x(X_0 = X_1 = \dots = X_n) = Q(x, x)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc  $\tau < +\infty$  p.s.

2. On montre par récurrence sur  $k$  que  $\tau_k$  est un temps d'arrêt. On l'a montré pour  $k = 1$  dans la question précédente. De plus, pour tout  $n \geq 0$  on a

$$\{\tau_{k+1} \leq n\} = \bigcup_{j=1}^{n-1} \bigcup_{i=j+1}^n \{\tau_k = j, X_i \neq X_j\} \in \mathcal{F}_n$$

par hypothèse de récurrence, donc  $\tau_{k+1}$  est un temps d'arrêt. On montre également par récurrence sur  $k$  que  $\tau_k$  est fini  $P_x$ -p.s. On l'a montré pour  $k = 1$  dans la question précédente. De plus, si  $\tau_k$  est fini  $P_x$ -p.s., alors  $\tau_{k+1} = \tau_1 \circ \theta_{\tau_k}$  donc d'après la propriété de Markov forte appliquée à  $\tau_k$ ,

$$\mathbb{P}_x(\tau_{k+1} < +\infty) = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\tau_1 < +\infty} \circ \theta_{\tau_k} \mathbb{1}_{\tau_k < +\infty}] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_{\tau_k}}[\mathbb{1}_{\tau_1 < +\infty}] \mathbb{1}_{\tau_k < +\infty}] = \mathbb{E}_x[1 \times \mathbb{1}_{\tau_k < +\infty}] = 1.$$

3. Soient  $y_0 = x, y_1, \dots, y_k \in E$  tels que  $y_{i+1} \neq y_i$  pour tout  $i$ . On a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_k) \\ &= \sum_{t_1, \dots, t_k \geq 1} \mathbb{P}(Y_0 = y_0, \tau_1 = t_1, Y_1 = y_1, \tau_2 - \tau_1 = t_2, \dots, \tau_k - \tau_{k-1} = t_k, Y_k = y_k) \\ &= \sum_{t_1, \dots, t_k \geq 1} \mathbb{P}(X_0 = \dots = X_{t_1-1} = y_0, X_{t_1} = \dots = X_{t_1+t_2-1} = y_1, \dots, X_{t_1+t_2+\dots+t_k} = y_k) \\ &= \sum_{t_1, \dots, t_k \geq 1} Q(y_0, y_0)^{t_1-1} Q(y_0, y_1) Q(y_1, y_1)^{t_2-1} \dots Q(y_{k-1}, y_{k-1})^{t_k-1} Q(y_{k-1}, y_k) \\ &= \frac{Q(y_0, y_1)}{1 - Q(y_0, y_0)} \dots \frac{Q(y_{k-1}, y_k)}{1 - Q(y_{k-1}, y_{k-1})}. \end{aligned}$$

Le processus  $Y$  est donc bien une chaîne de Markov, de matrice de transition  $P(x, y) = \frac{Q(x, y)}{1 - Q(x, x)}$  pour  $x \neq y$  et  $P(x, x) = 0$ .

4. Soient  $x \neq y \in S$ . Comme  $X$  est irréductible, il existe  $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$  tels que  $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ . Quitte à retirer  $x_i$  quand  $x_i = x_{i-1}$ , on peut de plus supposer  $x_i \neq x_{i-1}$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ . On a alors  $P(x_{i-1}, x_i) > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ , donc  $Y$  est bien irréductible. Par ailleurs, comme tous les  $\tau_k$  sont finis, un sommet est visité une infinité de fois par  $Y$  ssi il est visité une infinité de fois par  $y$ , donc  $Y$  est récurrente.
5. Pour tout  $x \in E$ , on pose  $\nu(x) = (1 - Q(x, x)) \mu(x)$ . Pour tout  $y \in E$ , on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} \nu(x) P(x, y) &= \sum_{x \in E \setminus \{y\}} (1 - Q(x, x)) \mu(x) \frac{Q(x, y)}{1 - Q(x, x)} \\ &= \left( \sum_{x \in E} \mu(x) Q(x, y) \right) - \mu(y) Q(y, y) \\ &= \mu(y) - \mu(y) Q(y, y) \\ &= \nu(y), \end{aligned}$$

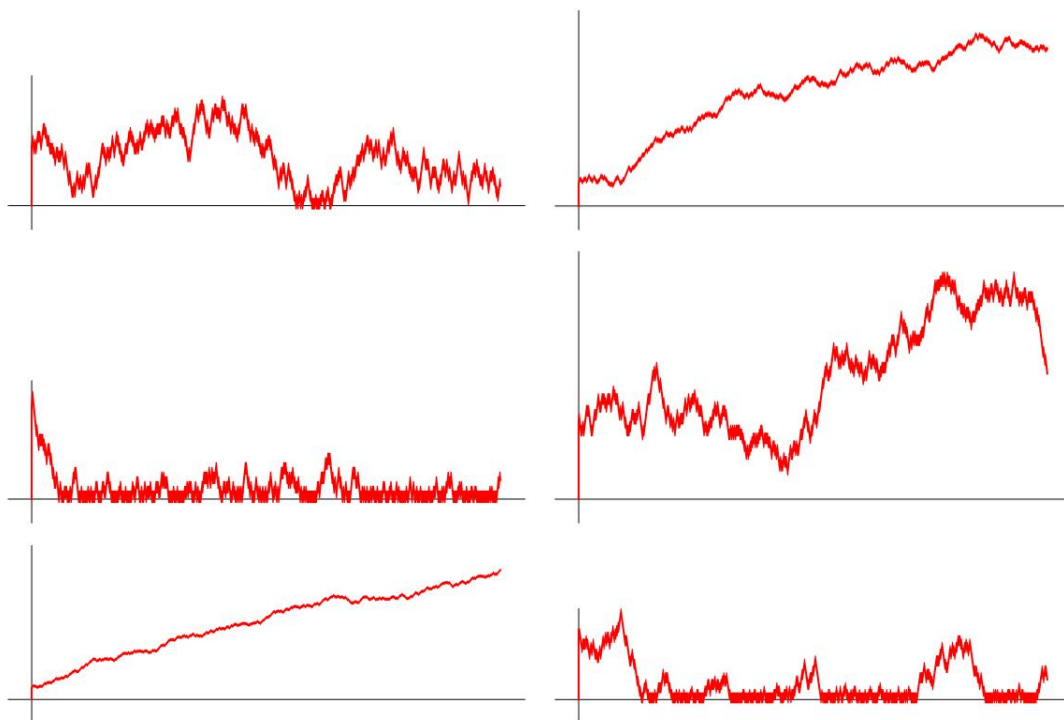
donc  $\nu$  est bien invariante pour  $Y$ .

### Exercice 6

Les jolies images ci-dessous sont des illustrations de l'exercice 4 (jusqu'à  $n = 1000$ , avec  $X_0 = 20$  à chaque fois, les échelles verticales changent d'une image à l'autre). On a pris à chaque fois  $r_i = 0$ , et on a testé les valeurs suivantes pour  $i \geq 1$  :

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| 1. $p_i = \frac{2}{5}$                | 4. $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2i}$        |
| 2. $p_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i}$ | 5. $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{i}}$ |
| 3. $p_i = \frac{1}{2}$                | 6. $p_i = \frac{3}{5}$                       |

Retrouver l'image qui correspond à chaque cas.



### Solution de l'exercice 6

- La première correspond à  $p_i = \frac{1}{2}$ . C'est la marche aléatoire simple, réfléchie en 0. Elle est récurrente nulle.
- La seconde correspond à  $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{i}}$ . Elle est transiente, et on peut vérifier que  $X_n \sim \left(\frac{3n}{2}\right)^{2/3}$  p.s..
- La troisième correspond à  $p_i = \frac{2}{5}$ . Elle est récurrente positive.
- La quatrième correspond à  $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2i}$ . C'est la marche aléatoire "conditionnée à rester positive" (cf. exercice 4 du TD 11, ou la jolie image du TD 5). Elle est transiente, mais on a  $X_n \approx \sqrt{n}$  comme pour la marche simple.
- La cinquième correspond à  $p_i = \frac{3}{5}$ . Elle est transiente et d'après la loi des grands nombres, on a  $X_n \sim \frac{n}{5}$  p.s..
- La sixième correspond à  $p_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i}$ . Elle est récurrente positive comme la troisième, mais met un peu plus de temps à "redescendre" en partant de haut.