

TD 5 : Espérance conditionnelle

Mercredi 11 Octobre

1 Espérance conditionnelle

On rappelle que, si X est une variable aléatoire intégrable et \mathcal{G} une tribu, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est l'unique variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable telle que, pour toute variable \mathcal{G} -mesurable positive Z , on ait

$$\mathbb{E}[ZX] = \mathbb{E}[Z \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]].$$

Exercice 1 (Petits contre-exemples)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et \mathcal{G} et \mathcal{H} deux sous-tribus de \mathcal{F} telles que $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathcal{F}$. Trouver des contre-exemples aux affirmations suivantes :

1. si $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$, alors X et Y sont indépendantes,
2. si $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = 0$ et $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = 0$, alors $X = 0$,
3. si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ le sont aussi.

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans E et F . Soit \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} . On suppose que X est indépendante de \mathcal{G} et que Y est \mathcal{G} -mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \rightarrow \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}[g(X, Y)|\mathcal{G}] = \int_E g(x, Y) P_X(dx)$$

où P_X désigne la loi de X . Le membre de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \rightarrow \int g(x, y) P_X(dx)$ (où ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

Exercice 3 (Espérance conditionnelle et positivité)

Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} . Montrer que $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\}$ est le plus petit ensemble \mathcal{G} -mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Exercice 4 (Espérance conditionnelle et convergence en proba)

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une suite de sous-tribus de \mathcal{F} . On suppose que $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.

2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 5 Soit X une variable intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} . Soit Y une v.a. \mathcal{G} -mesurable, on veut montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$. Montrer que si Π est un ensemble de parties de Ω qui contient Ω , stable par intersections finies et dont la tribu engendrée est \mathcal{G} , il suffit de montrer

$$\forall \pi \in \Pi, \mathbb{E}[X \mathbb{1}_\pi] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_\pi].$$

Exercice 6 (Indépendance conditionnelle) On dit que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans un espace (E, \mathcal{E}) sont indépendantes conditionnellement à \mathcal{G} si pour toutes fonctions f et g de E dans \mathbb{R}^+ mesurables,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}] \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{E}$?
2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z positive \mathcal{G} -mesurable, pour toutes fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ mesurables,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$

et aussi à : pour toute fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ mesurable,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\sigma(\mathcal{G}, X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

Exercice 7 (Quelques calculs)

On se donne deux réels $a, b > 0$, et (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y) dy.$$

Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X = n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, puis $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$. Calculer ensuite $\mathbb{P}(X = n|Y)$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 8 (Espérance conditionnelle et vecteurs gaussiens)

Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}$ avec $k_{22} > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X_1|X_2] = m_1 + \frac{k_{12}}{k_{22}}(X_2 - m_2).$$

2 Marches aléatoires et fonctions harmoniques

Exercice 9 Soit S une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} et $a, b \geq 0$. On note

$$T_{a,b} = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

1. Montrer qu'il existe $A, c > 0$ tel que $\mathbb{P}(T_{a,b} \geq n) \leq Ae^{-cn}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\mathbb{E}[T_{a,b}] < +\infty$.
2. En s'inspirant de la méthode vue en cours pour calculer la loi de $S_{T_{a,b}}$, calculer $\mathbb{E}[T_{a,b}]$.
3. En déduire que si $T_b = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n = b\}$, alors $\mathbb{E}[T_b] = +\infty$ pour tout $b \neq 0$.

Exercice 10 Soit B un mouvement brownien et $a, b > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 | B_t = x\}.$$

En utilisant le résultat analogue pour la marche aléatoire simple et le théorème de Donsker, montrer que

$$\mathbb{P}(\tau_b < \tau_{-a}) = \frac{a}{a+b}.$$

Indication : Soient $\tau_{-a} = \inf\{t | B_t = -a\}$ et $\tau_{b+} = \inf\{t | B_t > b\}$. On pourra montrer que l'événement $\{\tau_{b+} < \tau_{-a}, \tau_{b+} \leq t\}$ est ouvert dans l'ensemble des fonctions continues de $[0, t]$ dans \mathbb{R} nulles en 0.

3 Jolie image

Exercice 11 Que représente la jolie image ci-dessous ?

