Processus aléatoires
ENS Paris, 2017-2018

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 6 : Espérance conditionnelle dans L^2, lois conditionnelles

Mercredi 18 Octobre

1 Espérance conditionnelle dans L^2

Exercice 1
On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s..
2. On se place maintenant dans le cas général. Montrer que $X = Y$ en remarquant que, pour tout $a \geq 0$, on a
$$\mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_{X \leq a}\right] = \mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{X \leq a}\right].$$

Exercice 2 (Convergence L^2 des martingales rétrogrades)
Soit $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$, avec $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2, et que la série
$$\sum_{n\geq 0} (\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}])$$
converge dans L^2.
2. Montrer que si $\mathscr{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} \mathscr{F}_n$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$

Exercice 3 (Espérance conditionnelle et positivité)
Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Montrer que $\{\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] > 0]\}$ est le plus petit ensemble $\mathscr{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

2 Lois conditionnelles

Exercice 4 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. intégrables, et $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

— Calculer $\mathbb{E}[S|X_1]$ et $\mathbb{E}[X_1|S]$.

— Dans le cas où les X_i sont exponentielles de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant S.

Exercice 5 (Processus ponctuel de Poisson)
On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble aléatoire de points dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout borélien A, on note $N(A) = |\mathcal{P} \cap A|$. On dit que $\mathcal{P}$ est un *processus ponctuel de Poisson* si :

1. pour tout borélien A tel que $\lambda(A) < +\infty$, la variable $N(A)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(A)$,
2. pour tous boréliens disjoints $A_1, \ldots, A_k$, les variables $N(A_i)$ sont indépendantes.

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $\lambda(A) < +\infty$. Montrer que conditionnellement à $N(A)$, les points de $\mathcal{P}$ dans A ont la loi de $N(A)$ points uniformes.

<u>*Indication :*</u> On pourra estimer la probabilité que les points se trouvent dans $N(A)$ ensembles disjoints fixés, puis utiliser le lemme de classe monotone pour montrer qu'il est suffisant de considérer des ensembles disjoints.

3 Jolie image

Exercice 6 Que représente la jolie image ci-dessous ?