

## TD 3 : Mouvement brownien, théorème de Donsker Corrigé

Mercredi 26 Septembre

Dans tout le TD, on note  $B$  un mouvement brownien, et  $\mathcal{Z} = \{t \in [0, 1] | B_t = 0\}$  l'ensemble des points où il s'annule.

### 1 Applications du théorème de Donsker

**Exercice 1** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$ , et  $M_n = \max\{X_k | 0 \leq k \leq n\}$ .

1. Montrer que pour tous  $a, n \in \mathbb{N}^*$  on a  $\mathbb{P}(M_n \geq a, X_n < a) = \mathbb{P}(M_n \geq a, X_n > a)$ .
2. En déduire une expression aussi simple que possible de la loi de  $M_n$  en fonction de celle de  $X_n$ .
3. Soit  $S_t = \sup\{B_s | 0 \leq s \leq t\}$  pour tout  $t \geq 0$ . Montrer que  $S_1$  a la même loi que  $|B_1|$ .
4. En déduire que  $S_t$  a la même loi que  $|B_t|$  pour tout  $t \geq 0$ . Que peut-on en déduire sur  $\mathcal{Z}$  ?
5. Est-il vrai que  $(S_t)_{t \geq 0}$  a la même loi que  $(|B_t|)_{t \geq 0}$  ?

Solution de l'exercice 1

1. On appelle trajectoire *de type I* une trajectoire de marche aléatoire de longueur  $n$  qui atteint  $a$  et qui termine (strictement) en-dessous, et trajectoire *de type II* une trajectoire qui atteint  $a$  et termine (strictement) au-dessus. Il suffit de montrer qu'il y a autant de trajectoires de type *I* que de type *II*, ce qu'on va faire en construisant une bijection entre les deux. Soit  $t$  une trajectoire de type *I*, et  $k$  le premier instant où elle atteint  $a$ . On note  $t'$  la trajectoire  $t$ , réfléchie à partir du temps  $k$  par rapport à la droite d'équation  $y = a$  (cf. Figure 1). Il est facile de vérifier que  $t'$  est de type *II*, et que la transformation décrite est involutive donc bijective, ce qui permet de conclure.
2. Pour tout  $a \geq 1$ , en utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \geq a) &= \mathbb{P}(M_n \geq a, X_n \geq a) + \mathbb{P}(M_n \geq a, X_n < a) \\ &= \mathbb{P}(X_n \geq a) + \mathbb{P}(X_n > a) \\ &= 2\mathbb{P}(X_n \geq a) - \mathbb{P}(X_n = a) \\ &= \mathbb{P}(|X_n| \geq a) - \mathbb{P}(X_n = a). \end{aligned}$$

On en déduit  $\mathbb{P}(M_n = a) = \mathbb{P}(|X_n| = a) - \mathbb{P}(X_n = a) + \mathbb{P}(X_n = a + 1)$  pour  $a \geq 1$ , et  $\mathbb{P}(M_n = 0) = \mathbb{P}(|X_n| = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1)$ .

3. On utilise la convergence des fonctions de répartition. Plus précisément, soit  $\alpha > 0$ . Alors on a, en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha\right) &= \mathbb{P}(M_n \geq \lceil \alpha\sqrt{n} \rceil) \\ &= \mathbb{P}(|X_n| \geq \lceil \alpha\sqrt{n} \rceil) - \mathbb{P}(X_n = \lceil \alpha\sqrt{n} \rceil) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{|X_n|}{\sqrt{n}} \geq \alpha\right) - \mathbb{P}(X_n = \lceil \alpha\sqrt{n} \rceil). \end{aligned}$$

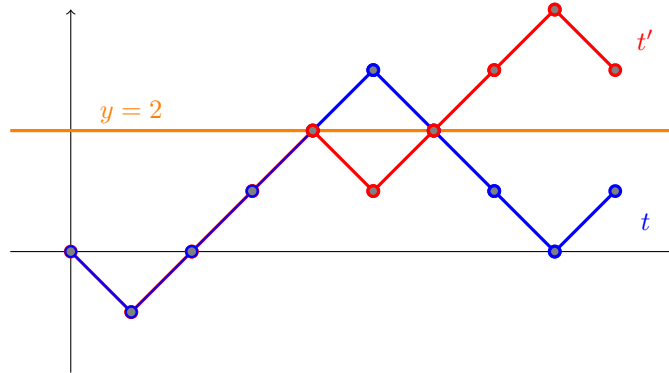


FIGURE 1 – Réflexion décrite dans la question 1 avec  $a = 2$ .

Or, on sait que  $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$  converge en loi vers  $B_1$ . Par continuité de la fonction valeur absolue,  $\frac{|X_n|}{\sqrt{n}}$  converge donc en loi vers  $|B_1|$ . De plus, la loi de  $|B_1|$  n'a pas d'atome, donc  $\mathbb{P}\left(\frac{|X_n|}{\sqrt{n}} \geq \alpha\right)$  tend vers  $\mathbb{P}(|B_1| \geq \alpha)$ . De plus, on a

$$\mathbb{P}(X_n = \lceil \alpha\sqrt{n} \rceil) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc  $\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha\right) \rightarrow \mathbb{P}(|B_1| \geq \alpha)$ . Cela est vrai pour tout  $\alpha > 0$  et immédiat pour tout  $\alpha \leq 0$ , donc  $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$  converge en loi vers  $|B_1|$ .

D'autre part, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}([0, 1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sup_{s \in [0, 1]} x_s \end{aligned}$$

est continue pour la norme uniforme (car 1-lipschitzienne), donc d'après le théorème de Donsker, on a  $\frac{M_n}{\sqrt{n}} \rightarrow S_1$  en loi. Par conséquent, les variables  $|B_1|$  et  $S_1$  ont nécessairement la même loi.

4. Il suffit d'utiliser l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle (exo 9 du TD 2) :  $S_t$  a la même loi que  $\sqrt{t}S_1$ , qui a la même loi que  $\sqrt{t}|B_1|$  (d'après la question précédente), qui a la même loi que  $|B_t|$ . On en déduit que pour tout  $t$ , on a  $S_t > 0$  p.s.. Par conséquent, p.s., on a  $S_t > 0$  pour tout  $t > 0$  rationnel, donc pour tout  $t > 0$  car  $S$  est croissante. De manière similaire, p.s., on a  $\inf_{[0, t]} B_t < 0$  pour tout  $t > 0$ . En particulier,  $B$  change de signe une infinité de fois au voisinage de 0, donc  $\mathcal{Z}$  est p.s. infini, et admet 0 comme point d'accumulation.

5. Non. Par exemple  $(S_t)_{t \geq 0}$  est p.s. croissant mais pas  $(|B_t|)_{t \geq 0}$ .

### Exercice 2

1. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$ . On note aussi  $I_n = \min\{X_k | 0 \leq k \leq n\}$ . Justifier que les processus discrets  $(X_n - I_n)_{n \geq 0}$  et  $(|X_n + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2})_{n \geq 0}$  ont la même loi.
2. Pour tout  $t \geq 0$ , on note  $J_t = \inf\{B_s | 0 \leq s \leq t\}$ . Dédurre de la question précédente que  $(B_t - J_t)_{0 \leq t \leq 1}$  a la même loi que  $(|B_t|)_{0 \leq t \leq 1}$ .
3. Que peut-on en déduire sur  $\mathcal{Z}$  ?

### Solution de l'exercice 2

1. Tant que  $X_n - I_n > 0$ , on a  $X_n > I_n$  donc  $I_{n+1} = I_n$  et  $X_n - I_n$  évolue comme une marche aléatoire, c'est-à-dire que  $X_{n+1} - I_{n+1}$  vaut  $(X_n - I_n) + 1$  avec proba  $\frac{1}{2}$  et  $(X_n - I_n) - 1$  avec proba  $\frac{1}{2}$ . Si  $X_n - I_n = 0$ , alors  $X_n = I_n$ , donc avec proba  $\frac{1}{2}$  on a  $X_{n+1} = X_n - 1$ , d'où  $I_{n+1} = I_n - 1$  et

$X_{n+1} - I_{n+1} = X_n - I_n$ , et avec proba  $\frac{1}{2}$  on a  $X_{n+1} = X_n + 1$  donc  $I_{n+1} = I_n$  et  $X_{n+1} - I_{n+1} = (X_n - I_n) + 1$ . Le processus  $(X_n - I_n)$  évolue donc comme une marche aléatoire, sauf en 0 où il a une chance sur deux de rester en 0 et une chance sur deux de passer à 1.

De même, si  $|X_n + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2} \neq 0$ , alors  $X_n \neq -1, 0$  et  $|X_n + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2}$  va augmenter de 1 avec proba  $\frac{1}{2}$ , et diminuer de 1 avec proba  $\frac{1}{2}$ . Si  $|X_n + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2} = 0$ , alors  $X_n$  vaut 0 ou  $-1$ . Si par exemple  $X_n = 0$ , alors avec proba  $\frac{1}{2}$  on a  $X_{n+1} = -1$ , auquel cas  $|X_{n+1} + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2} = 0$ , et avec proba  $\frac{1}{2}$  on a  $X_{n+1} = 1$ , auquel cas  $|X_{n+1} + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2} = 1$ . Le cas  $X_n = -1$  se traite similairement. Les deux processus ont donc la même loi.

La démonstration ci-dessus n'est pas totalement rigoureuse. Une manière de l'écrire rigoureusement est de décrire  $\mathbb{P}(X_1 - I_1 = i_1, \dots, X_n - I_n = i_n)$  pour tous entiers  $i_1, \dots, i_n$  et de même pour le second processus, ce qui est un peu lourd à rédiger. Une seconde manière est de dire que d'après la discussion ci-dessus,  $(X_n - I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(|X_n + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2})_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux chaînes de Markov avec les mêmes probabilités de transitions et ont donc la même loi (cf. plus tard dans le cours).

2. D'après la première question, pour tout  $n$ , les processus  $\left(\frac{X_{[nt]} - I_{[nt]}}{\sqrt{n}}\right)_{0 \leq t \leq 1}$  et  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(|X_{[nt]} + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2})\right)_{0 \leq t \leq 1}$  ont la même loi. Quand  $n \rightarrow +\infty$ , d'après le théorème de Donsker et la continuité (pour la norme uniforme) de l'application (elle est en fait 2-lipschitzienne)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}([0, 1]) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, 1]) \\ x &\longrightarrow \left(x_t - \inf_{[0, s]} x_s\right)_{0 \leq t \leq 1}, \end{aligned}$$

le premier processus converge vers  $(B_t - J_t)_{0 \leq t \leq 1}$ . Il suffit donc de montrer que le second converge vers  $(|B_t|)_{0 \leq t \leq 1}$ . Or, d'après le théorème de Donsker et la continuité de

$$\begin{aligned} \mathcal{C}([0, 1]) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, 1]) \\ x &\longrightarrow (|x_t|)_{0 \leq t \leq 1}, \end{aligned}$$

on a  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|X_{[nt]}|\right)_{0 \leq t \leq 1} \rightarrow (|B_t|)_{0 \leq t \leq 1}$ . On a de plus

$$\left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(|X_{[nt]} + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2}\right)\right)_{0 \leq t \leq 1} - \left(\frac{1}{\sqrt{n}}|X_{[nt]}|\right)_{0 \leq t \leq 1} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le processus qui nous intéresse est donc la somme d'un processus qui converge en loi vers  $(|B_t|)_{0 \leq t \leq 1}$  et d'un processus qui converge en loi vers 0. On peut donc conclure par le lemme de Slutsky.

3. Ce résultat permet de montrer que  $\mathcal{Z}$  est p.s. indénombrable. En effet, d'après la question précédente, les sous-ensembles aléatoires  $\mathcal{Z}$  et  $\{t | B_t = J_t\}$  de  $[0, 1]$  ont la même loi, donc il suffit de montrer que le second est p.s. indénombrable. Or, d'après la question 4 de l'exercice 1, quitte à remplacer  $B$  par  $-B$ , on a  $J_1 < 0$ . Pour tout  $x \in ]J_1, 0[$ , on note  $\tau_x = \inf\{t \in [0, 1] | B_t = x\}$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tous ces  $\tau_x$  sont bien définis. Ils sont de plus tous distincts et forment un ensemble indénombrable. De plus, on a  $B_{\tau_x} = J_{\tau_x}$  pour tout  $x$  (toujours grâce au TVI), ce qui permet de conclure.

## 2 Autres exercices sur le mouvement brownien

**Exercice 3** Montrer que  $\mathcal{Z}$  est presque sûrement de mesure de Lebesgue nulle.

*Solution de l'exercice 3* Tout d'abord, remarquons que presque sûrement,  $B$  est continu donc  $\mathcal{Z}$  est fermé, donc mesurable. On note  $\lambda$  la mesure de Lebesgue. Pour montrer  $\lambda(\mathcal{Z}) = 0$ , on utilise le théorème de

Fubini :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\lambda(\mathcal{Z})] &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \mathbb{1}_{B_t=0} dt\right] \\
 &= \int_0^1 \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_t=0}] dt \\
 &= \int_0^1 \mathbb{P}(B_t = 0) dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

car pour tout  $t > 0$ , la variable  $B_t$  est une gaussienne de variance non nulle donc  $\mathbb{P}(B_t = 0) = 0$ . On en déduit  $\lambda(\mathcal{Z}) = 0$  p.s..

**Exercice 4** Montrer que  $\int_0^{+\infty} |B_t| dt = +\infty$  presque sûrement.

*Solution de l'exercice 4* Il y a plusieurs manières de résoudre cet exercice. Une possibilité est de montrer que comme  $\mathbb{P}(|B_t| < 1) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , on a  $|B_t| \geq 1$  la plupart du temps. Plus précisément, on a  $|B_t| \geq \mathbb{1}_{|B_t| \geq 1}$  pour tout  $t$ , donc il suffit de montrer que  $\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{|B_t| \geq 1} dt = +\infty$  p.s.. Il suffit donc de montrer que pour tous  $c$  et  $\varepsilon > 0$ , on a  $\mathbb{P}\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{|B_t| \geq 1} dt \leq c\right) \leq \varepsilon$ . Soient donc  $c, \varepsilon > 0$ . Il existe  $a$  tel que pour  $t \geq a$ , on a  $\mathbb{P}(|B_t| < 1) \leq \varepsilon$  (par exemple en écrivant la densité de  $B_t$ ), donc pour tout  $b > 0$ , en utilisant Fubini :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left[\int_a^{a+b} \mathbb{1}_{|B_t| < 1} dt\right] &= \int_a^{a+b} \mathbb{P}(|B_t| < 1) dt \\
 &\leq b\varepsilon
 \end{aligned}$$

donc, pour tout  $b > c$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{|B_t| \geq 1} dt \leq c\right) &\leq \mathbb{P}\left(\int_a^{a+b} \mathbb{1}_{|B_t| \geq 1} dt \leq c\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\int_a^{a+b} \mathbb{1}_{|B_t| < 1} dt \geq b - c\right) \\
 &\leq \frac{b\varepsilon}{b - c} \\
 &\xrightarrow{b \rightarrow +\infty} \varepsilon,
 \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Markov à l'avant-dernière ligne.

**Remarque** Il est également possible de résoudre cet exercice en utilisant l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle. En effet, pour tout  $a > 0$ , les variables

$$\int_0^1 |B_t| dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a}} |B_{at}| dt$$

ont la même loi, donc

$$\int_0^a |B_t| dt \quad \text{et} \quad a^{3/2} \int_0^1 |B_t| dt$$

ont la même loi. Soit donc  $A > 0$ . On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\int_0^a |B_t| dt \leq A\right) &= \mathbb{P}\left(a^{3/2} \int_0^1 |B_t| dt \leq A\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\int_0^1 |B_t| dt \leq \frac{A}{a^{3/2}}\right) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, presque sûrement, il existe  $a$  tel que  $\int_0^a |B_t| dt \leq A$ . Ceci est vrai pour tout  $A$ , donc  $\int_0^{+\infty} |B_t| dt = +\infty$  p.s..

On rappelle qu'une fonction  $f$  est à variation finie sur l'intervalle  $[a, b]$  si les sommes

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

sont bornées indépendamment de  $k$  et de la subdivision  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ .

**Exercice 5** (Le mouvement brownien n'est pas à variation finie)

Soient  $0 \leq a < b$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on pose

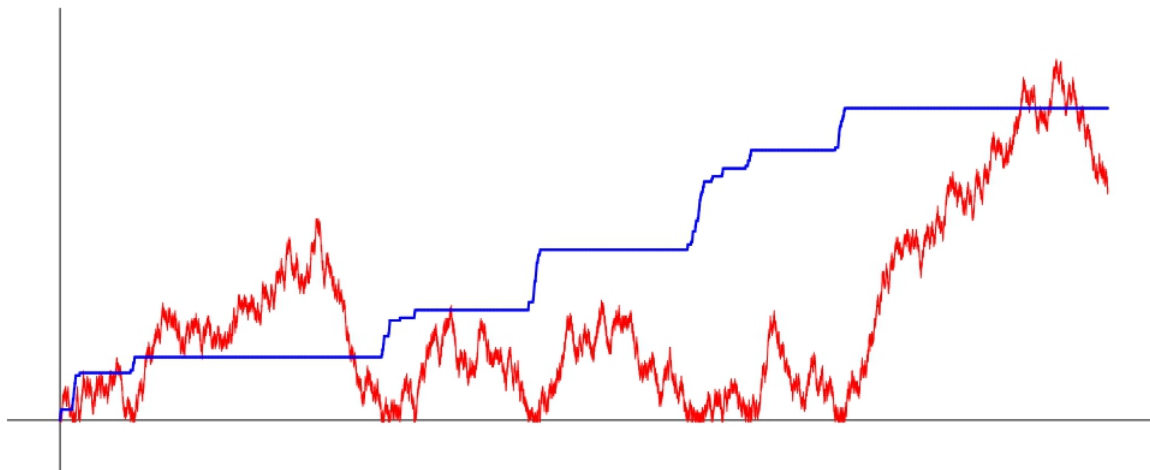
$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} (B_{a+(k+1)(b-a)2^{-n}} - B_{a+k(b-a)2^{-n}})^2.$$

1. Calculer la moyenne et la variance de  $X_n$ .
2. En déduire que  $X_n$  converge p.s. vers une limite à préciser.
3. En conclure que p.s., le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial.

*Solution de l'exercice 5* Attendre la semaine prochaine.

### 3 Jolie image

**Exercice 6** Que représente la jolie image ci-dessous ?



*Solution de l'exercice 6* Il s'agit d'une illustration de l'exercice 2 : en bleu, le processus  $(-J_t)_{t \geq 0}$ , où  $J_t = \inf_{[0,t]} B$ , et en rouge le processus  $(B_t - J_t)_{t \geq 0}$ , qui a la même loi que  $(|B_t|)_{t \geq 0}$ .

Notons que le processus bleu a une autre interprétation sympathique : il "compte" le temps que le processus rouge passe en 0. En effet, il est croissant, et constant sur tout intervalle où le processus rouge ne tape pas 0. Plus précisément, si  $\beta$  est un mouvement brownien, on peut supposer qu'il existe un mouvement brownien  $B$  tel que  $|\beta_t| = B_t - J_t$  pour tout  $t \geq 0$ , et dans ce cas  $-J_t$  permet de mesurer le temps que  $\beta$  a passé en 0. Le processus bleu  $-J$  est appelé *temps local en 0* de  $\beta$ , et on peut par exemple montrer que pour tout  $t$ , on a

$$-J_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{\beta_t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} dt.$$

Notons enfin que la construction d'un tel processus n'est pas évidente. On a vu que l'ensemble des points où  $\beta$  s'annule est un fermé indénombrable mais de mesure nulle, donc il n'y a pas de manière évidente de "mesurer" sa taille.