UN RÉSULTAT DE RECHERCHE OBTENU GRÂCE À DES LYCÉENS

par

Thomas Budzinski & Giancarlo Lucchini Arteche

Résumé. — Nous présentons une démonstration élémentaire d'une question posée par Fouvry, Kowalski et Michel sur les solutions de l'équation $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + t = 0$ sur un corps fini, en utilisant des résultats obtenus par des lycéens lors de leur participation au Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens.

1. Introduction

Le Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens $\mathbb{TFJM}^2$ est un tournoi de mathématiques destiné aux élèves de lycée qui existe depuis 2011. Il se distingue d'autres compétitions comme les Olympiades de mathématiques en proposant des problèmes ouverts dont les énoncés sont connus à l'avance et en étant organisé par équipes. Guidées par des encadrants, les équipes composées de 4, 5 ou 6 élèves ont environ trois mois pour réfléchir aux problèmes proposés. Lors du tournoi, les différentes équipes présentent leurs résultats et en discutent avec les autres équipes sous la forme de "joutes" mathématiques (voir l'appendice par Matthieu Lequesne et le deuxième auteur). Les problèmes proposés sont inhabituels pour la plupart des élèves, car ils n'admettent pas, à la connaissance du jury, de solution complète. Pour les équipes, il s'agit donc de comprendre le problème, de résoudre des cas particuliers, de repérer les difficultés...

Le but de ce texte est de montrer à quel point le $\mathbb{TFJM}^2$ peut amener les élèves de lycée à entreprendre une démarche de recherche scientifique. Cette histoire date de l'édition 2014 et commence par un post dans le blog mathématique d'Emmanuel

Nous tenons à remercier Ramon Moreira Nunes pour avoir attiré notre attention sur cette question pendant l'organisation du $\mathbb{TFJM}^2$ 2014, ainsi que pour avoir servi de contact avec Emmanuel Kowalski par la suite. Nous remercions aussi ce dernier pour son soutien et pour avoir pointé les autres preuves existantes.

Kowalski, datée du 29 juin 2012.[1] Celui-ci, intitulé “A bijective challenge”, commençait comme suit :

Étienne Fouvry, Philippe Michel and myself have just finished a new paper,[2] which is available on my web page and will soon be also on arXiv. [...] *Today I want to discuss a by-product that we found particularly nice (and amusing). It can be phrased as a rather elementary-looking challenge: given a prime number p, and an element t of $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ which is neither 0, 4 or -4 modulo p, let $N_p(t)$ be the number of solutions $(x,y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\})^2$ of the congruence*

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + t = 0.$$

The challenge is to prove, bijectively if possible, that

$$N_p(t) = N_p\left(\frac{16}{t}\right).$$

[...] *This sounds simple and elegant enough that an elementary proof should exist, but our argument is a bit involved. First, the number $N_p(t)$ is the number of points modulo p of the curve with equation above, whose projective (smooth) model is an elliptic curve, say E_t, over $\mathbb{F}_p$. Then we checked using Magma that E_t and $E_{16/t}$ are isogenous over $\mathbb{F}_p$, and this is well-known to imply that the two curves have the same number of points modulo p.*

[...] *The best explanation of this has probably to do with the relation between the family of elliptic curves and the modular curve $Y_0(8)$ (a relation whose existence follows from Beauville's classification of stable families of elliptic curves over $\mathbb{P}^1$ with four singular fibers, as C. Hall pointed out), but we didn't succeed in getting a proof of all our statements using that link. In fact, we almost expected to find the identities above already spelled out in some corner or other of the literature on modular curves and universal families of elliptic curvers thereon, but we did not find anything.*

Cette question de Fouvry, Kowalski et Michel a été reprise pour l'édition 2014 du $\mathbb{TFJM}^2$, ainsi que pour sa version internationale, l'ITYM. Bien entendu, on ne peut pas lancer des élèves de lycée directement sur une question ouverte comme celle-ci. C'est pourquoi l'énoncé a été modifié de la façon suivante pour amener les élèves à la question de ces chercheurs sans pour autant la leur poser frontalement. Voici l'énoncé précis de ce problème lors du $\mathbb{TFJM}^2$:

Soit p un nombre premier impair. On considère l'ensemble $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ des entiers modulo p. On note $\mathbb{F}_p^*$ l'ensemble des éléments inversibles de cet ensemble, i.e. les $x \in \mathbb{F}_p$ tels qu'il existe $y \in \mathbb{F}_p$ vérifiant $xy \equiv 1 \pmod p$. Pour $x \in \mathbb{F}_p^*$, on note $\frac{1}{x}$ un tel élément y (remarquer qu'il est unique dans $\mathbb{F}_p$).

(1) `https://blogs.ethz.ch/kowalski/?s=isogenies`
(2) Pour les curieux, il s'agit de l'article **[2]**.

Dans ce problème, on veut étudier l'équation

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = t,$$

où $x, y \in \mathbb{F}_p^*$ *et* $t \in \mathbb{F}_p$. *On note* $N_p(t)$ *le nombre de solutions en* x *et* y *pour un* t *fixé.*

1. *Quel est le cardinal de l'ensemble* $A := \{x + \frac{1}{x} | x \in \mathbb{F}_p^*\}$ *? Et celui des ensembles*
$$A + A := \{a + b \,|\, a, b \in A\} \quad et \quad A \cdot A = \{a \cdot b \,|\, a, b \in A\}\,?$$
On pourra commencer par les calculer explicitement pour des petites valeurs de p.
2. *Calculer* $N_p(0)$.
3. *Pour des petites valeurs de* p, *calculer explicitement* $N_p(t)$ *pour tout* t.
4. *Existe-t-il des couples* (a, b) *avec* $a \in \mathbb{F}_p^*$ *et* $b \in \mathbb{F}_p$ *tels que* $N_p(t) = N_p(at + b)$ *pour tout* $t \in \mathbb{F}_p$ *? Existe-t-il* $a \in \mathbb{F}_p^*$ *tel que* $N_p(t) = N_p(a\frac{1}{t})$ *pour tout* $t \in \mathbb{F}_p^*$ *? Étudier d'autres transformations possibles de* t *laissant stable la valeur de* N_p.
5. *Généraliser ces résultats, à* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *pour* n *quelconque (on pourra commencer avec les puissances des nombres premiers), puis aux corps finis quelconques.*

Comme on pourra le remarquer, on s'est permis de poser des questions a priori plus difficiles que celle posée par Fouvry-Kowalski-Michel (qui est cachée dans la question 4). Ceci est un facteur commun de tous les problèmes posés au $\mathbb{TFJM}^2$, le but étant que le problème soit ouvert même pour les jurys qui évalueront les élèves lors du tournoi (ces jurys sont composés de chercheurs, doctorants et étudiants de master ou de grandes écoles).

Ce qui fait l'intérêt de ce problème en particulier, c'est qu'il est issu d'une question posée par des vrais chercheurs en mathématiques à d'autres chercheurs, donc toute solution devient *ipso facto* un résultat de recherche (certes pas de la plus haute importance, mais de la vraie recherche tout de même). Et c'est en mettant ensemble les différentes solutions des élèves qui ont participé au $\mathbb{TFJM}^2$ 2014 que l'on a réussi à trouver une réponse élémentaire à la question de Fouvry-Kowalski-Michel. Grâce au $\mathbb{TFJM}^2$, des lycéens français ont donc fait un véritable petit apport à la recherche mathématique. On présente leurs arguments dans ce qui suit.

2. La preuve

2.1. Énoncé du théorème et résultats préliminaires. — Dans toute la suite p désigne un nombre premier impair. Pour tout $t \in \mathbb{F}_p$, on note $M_p(t)$ le nombre de solutions dans $\mathbb{F}_p^*$ de l'équation

$$x + \frac{1}{x} = t, \tag{1}$$

et $N_p(t)$ le nombre de solutions dans $(\mathbb{F}_p^*)^2$ de l'équation

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = t. \tag{2}$$

Notre but est de montrer le résultat suivant.

Théorème 1. — *Pour tout* $t \in \mathbb{F}_p^*$, *on a* $N_p\left(\frac{16}{t}\right) = N_p(t)$.

La preuve du résultat consiste en un comptage plus ou moins explicite des solutions. On établit d'abord une borne supérieure sur les quantités $N_p(t)$, puis on montre que les quantités $N_p\left(\frac{16}{t}\right)$ et $N_p(t)$ sont congrues modulo p. Ayant toutes ces informations, un simple argument de parité conclut l'affaire.

On commence par donner une formule relativement explicite pour $N_p(t)$: on a

$$N_p(t) = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(a) M_p(t-a). \tag{3}$$

On cherche donc à calculer explicitement les $M_p(a)$.

L'équation (1) pour $t = a$ est équivalente à $x^2 - ax + 1 = 0$, qui est une équation quadratique de discriminant $a^2 - 4$. Elle a donc une solution si $a^2 - 4 = 0$, deux si $a^2 - 4$ est un carré et aucune si $a^2 - 4$ n'est pas un carré. On rappelle donc la définition du symbole de Legendre :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \equiv 0 \pmod p, \\ +1 & \text{si } a \text{ est un carré non nul modulo } p, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sachant que le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique d'ordre $p-1$, ce symbole peut aussi être calculé par ce qu'on appelle le critère d'Euler :

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

À l'aide de ce symbole, on voit que l'on peut exprimer les valeurs de M_p comme suit :

$$M_p(a) = 1 + \left(\frac{a^2-4}{p}\right). \tag{4}$$

Ces formules nous permettent de prouver deux résultats élémentaires sur les valeurs $N_p(t)$. Le premier est la borne supérieure annoncée plus haut, le deuxième concerne la parité de ces valeurs, ce qui sera utile à la fin de la preuve.

Lemme 2. — *Pour tout* $t \in \mathbb{F}_p$ *on a*

$$N_p(t) \le N_p(0) = 2p - 4.$$

Démonstration. — En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (3) on obtient

$$\begin{aligned} N_p(t) &\le \sqrt{\left(\sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(a)^2\right)\left(\sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(t-a)^2\right)} \\ &= \sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(a)^2 = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(a) M_p(-a) = N_p(0), \end{aligned}$$

où $M_p(a) = M_p(-a)$ d'après (4).

Pour calculer $N_p(0)$, on étudie la répartition des valeurs de M_p. D'une part, la formule (4) nous dit que $M_p(2) = M_p(-2) = 1$ et M_p vaut 0 ou 2 partout ailleurs. D'autre part on a

$$\sum_{a\in\mathbb{F}_p} M_p(a) = p-1,$$

donc M_p prend $\frac{p-1}{2}$ fois la valeur 0, deux fois la valeur 1 et $\frac{p-3}{2}$ fois la valeur 2. On obtient donc

$$N_p(0) = \sum_{a\in\mathbb{F}_p} M_p(a)^2 = 2\cdot 1 + \frac{p-3}{2}\cdot 4 = 2p-4.$$

□

Lemme 3. — *$N_p(t)$ est impair si et seulement si $t \equiv \pm 4 \pmod p$.*

Démonstration. — Le cas $t = 0$ découle immédiatement du lemme 2. Supposons $t \neq 0$ et soit $a \in \mathbb{F}_p$: si $M_p(a)M_p(t-a)$ est impair, alors $a, t-a \in \{-2, 2\}$ d'après la formule (4), donc (a,t) vaut $(2,4)$ ou $(-2,-4)$. Ainsi, si $t \notin \{-4, 4\}$ alors tous les termes de la somme (3) sont pairs donc $N_p(t)$ est pair. Si $t \in \{-4, 4\}$ alors le terme correspondant à $a = \frac{t}{2}$ est impair et tous les autres sont pairs donc $N_p(t)$ est impair. □

2.2. Un argument inspiré de la preuve de Chevalley-Warning. — Le théorème de Chevalley-Warning est un résultat classique de la théorie des corps finis.

***Théorème 4* (Chevalley-Warning).** — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p et soit $P(x_1, \ldots, x_n)$ un polynôme de degré d à coefficients dans $\mathbb{F}$. Alors, si $n > d$, le nombre de solutions de l'équation $P = 0$ est congru à 0 modulo p.*

En particulier, si $(0, \ldots, 0)$ est une solution (par exemple, si P est homogène), alors il existe une solution non triviale.

La preuve de ce théorème, qui est bien classique (cf. par exemple le premier chapitre de [**3**]), consiste en une description astucieuse de l'ensemble des solutions qui utilise le petit théorème de Fermat. La même technique nous permettra de démontrer dans la suite le résultat suivant :

Proposition 5. — *Pour tout $t \in \mathbb{F}_p^*$ on a $N_p\left(\frac{16}{t}\right) \equiv N_p(t) \pmod p$.*

Démonstration. — L'équation (2) est équivalente à

$$x^2y + xy^2 + x + y - txy = 0, \quad \text{avec} \quad (x,y) \in (\mathbb{F}_p^*)^2, \tag{5}$$

donc $(x^2y + xy^2 + x + y - txy)^{p-1}$ vaut 0 si (x,y) est solution et 1 sinon, d'après le petit théorème de Fermat. On peut ainsi compter les couples non-solutions modulo p :

$$(p-1)^2 - N_p(t) \equiv \sum_{x,y\in\mathbb{F}_p^*} (x^2y + xy^2 + x + y - txy)^{p-1} \pmod p,$$

soit, en développant le polynôme et en remplaçant t par $-t$ (la bijection évidente $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ donne $N_p(t) = N_p(-t)$),

$$\begin{aligned}
N_p(t) &\equiv 1 - \sum_{x,y\in\mathbb{F}_p^*} \sum_{k_1+\ldots+k_5=p-1} \frac{(p-1)!}{k_1!\ldots k_5!}(x^2y)^{k_1}(xy^2)^{k_2}x^{k_3}y^{k_4}(txy)^{k_5} \\
&\equiv 1 + \sum_{k_1+\ldots+k_5=p-1} \frac{1}{k_1!\ldots k_5!} \sum_{x,y\in\mathbb{F}_p^*} t^{k_5}x^{2k_1+k_2+k_3+k_5}y^{k_1+2k_2+k_4+k_5} \\
&\equiv 1 + \sum_{k_1+\ldots+k_5=p-1} \frac{t^{k_5}}{k_1!\ldots k_5!} \sum_{x,y\in\mathbb{F}_p^*} x^{p-1+k_1-k_4}y^{p-1+k_2-k_3} \\
&\equiv 1 + \sum_{k_1+\ldots+k_5=p-1} \frac{t^{k_5}}{k_1!\ldots k_5!} \left(\sum_{x\in\mathbb{F}_p^*} x^{k_1-k_4}\right)\left(\sum_{y\in\mathbb{F}_p^*} y^{k_2-k_3}\right) \pmod p
\end{aligned}$$

On a maintenant besoin du lemme suivant, clé dans la preuve de Chevalley-Warning.

Lemme 6. — *Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors $\sum_{x\in\mathbb{F}_p^*} x^a$ vaut -1 si $p-1|a$, et 0 sinon.*

Démonstration. — Si $p-1$ divise a, chacun des $p-1$ termes de la somme vaut 1 d'après le petit théorème de Fermat, d'où le résultat. Sinon, soit g un générateur du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^*$. On a

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_p^*} x^a = \sum_{i=0}^{p-2} g^{ia} = \frac{g^{a(p-1)}-1}{g^a-1} = 0.$$

□

D'après le lemme, si le terme correspondant à $(k_1, ..., k_5)$ est non nul, alors $k_1 - k_4$ et $k_2 - k_3$ sont divisibles par $p-1$, donc valent 0, $p-1$ ou $1-p$. Si par exemple $k_1 - k_4 = p-1$, alors $k_1 = p-1$ et $k_2 = ... = k_5 = 0$, et la contribution de ce terme vaut $\frac{1}{(p-1)!}(-1)(-1) = -1$, et de même lorsque k_2, k_3 ou k_4 vaut $p-1$. Dans tous les autres termes non nuls, on a $k_1 = k_4$ et $k_2 = k_3$ d'où

$$N_p(t) \equiv -3 + \sum_{2k_1+2k_2+k_5=p-1} \frac{t^{k_5}}{k_1!^2k_2!^2k_5!} \pmod p. \tag{6}$$

Remarque. — *C'est à partir d'ici que notre preuve diffère de celle du théorème de Chevalley-Warning : alors que l'hypothèse sur le degré dans Chevalley-Warning garantit que tous les termes non triviaux sont nuls, il reste ici un certain nombre de termes à contrôler, le degré de (5) étant plus élevé que le nombre de variables.*

On cherche donc à regrouper les termes de (6) selon la valeur de k_5. On constate que, $p-1$ étant pair, k_5 est toujours pair. Soit donc k_5 pair dans $[\![0, p-1]\!]$ fixé. On a

$$\begin{aligned}\sum_{2k_1+2k_2=p-1-k_5} \frac{t^{k_5}}{k_1!^2 k_2!^2 k_5!} &= \frac{t^{k_5}}{k_5!\left(\frac{p-1-k_5}{2}\right)!^2} \sum_{k_1+k_2=\frac{p-1-k_5}{2}} \binom{\frac{p-1-k_5}{2}}{k_1}^2 \\ &= \frac{t^{k_5}}{k_5!\left(\frac{p-1-k_5}{2}\right)!^2} \binom{p-1-k_5}{\frac{p-1-k_5}{2}},\end{aligned} \tag{7}$$

où la dernière ligne utilise l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. C'est un cas particulier de l'identité de Vandermonde, qu'on peut obtenir par exemple par double-comptage.

Donc, en appliquant (6) et (7) respectivement à t et $\frac{16}{t}$, on a d'une part

$$N_p(t) \equiv -3 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{p-1} \frac{1}{k!\left(\frac{p-1-k}{2}\right)!^2} \binom{p-1-k}{\frac{p-1-k}{2}} t^k \pmod p,$$

et d'autre part

$$N_p\left(\frac{16}{t}\right) \equiv -3 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{p-1} \frac{1}{k!\left(\frac{p-1-k}{2}\right)!^2} \binom{p-1-k}{\frac{p-1-k}{2}} \left(\frac{16}{t}\right)^k \pmod p,$$

ce qui donne, en échangeant k et $p-1-k$,

$$N_p\left(\frac{16}{t}\right) \equiv -3 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{p-1} \frac{1}{(p-1-k)!\left(\frac{k}{2}\right)!^2} \binom{k}{\frac{k}{2}} \frac{t^k}{16^k} \pmod p.$$

Pour en déduire $N_p\left(\frac{16}{t}\right) \equiv N_p(t) \pmod p$, il suffit donc de démontrer que pour tout k pair dans $[\![0, p-1]\!]$ on a

$$\frac{1}{k!\left(\frac{p-1-k}{2}\right)!^2} \binom{p-1-k}{\frac{p-1-k}{2}} \equiv \frac{1}{(p-1-k)!\left(\frac{k}{2}\right)!^2} \binom{k}{\frac{k}{2}} \frac{1}{16^k} \pmod p,$$

ou encore, en chassant les dénominateurs et en prenant la racine carrée,

$$(p-1-k)!\left(\frac{k}{2}\right)!^2 4^k \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} k!\left(\frac{p-1-k}{2}\right)!^2 \pmod p,$$

ce qui se fait directement par récurrence sur k. □

2.3. Le coup de grâce. — D'après la proposition 5, on a $N_p\left(\frac{16}{t}\right) \equiv N_p(t) \pmod p$, donc $N_p\left(\frac{16}{t}\right) - N_p(t)$ est divisible par p. De plus, on sait que $N_p(t)$ et $N_p\left(\frac{16}{t}\right)$ sont positifs et majorés par $N_p(0) = 2p-4$ d'après le lemme 2, donc leur différence ne peut valoir que $-p$, 0 ou p. Enfin, $N_p(t)$ est impair si et seulement si t vaut -4 ou 4 d'après le lemme 3. Les quantités $N_p(t)$ et $N_p\left(\frac{16}{t}\right)$ ont alors la même parité et leur différence doit donc valoir 0, d'où le résultat.

3. Quelques commentaires sur la preuve

Les résultats de la section 2.1 sont entièrement dûs aux participants du tournoi. Ils ont été modifiés pour gagner en brieveté et répondre spécifiquement à l'énoncé orginal de Fouvry-Kowalski-Michel. Comme il a été démontré dans la section 2.3, ces résultats suffisent pour réduire la preuve de l'égalité en une preuve de congruence modulo p. C'est là que l'expérience a joué un rôle, puisque c'est le premier auteur qui a vu que les idées appliquées dans Chevalley-Warning pouvaient être utiles pour démontrer une telle affirmation. La section 2.2 a été donc rédigée par ses soins.

Il est cependant important de remarquer que le niveau des techniques utilisées dans cette démonstration reste très basique, y compris dans la section 2.2. C'est pourquoi on ne doute aucunement qu'elle aurait été largement à la portée des élèves si jamais leur encadrant leur avait suggéré, tel un directeur de thèse, d'aller lire la démonstration de Chavelley-Warning pour y trouver des pistes. Malheureusement, cette idée est venue à l'esprit du premier auteur après le tournoi international dans lequel il encadrait une équipe française !

Enfin, nous tenons à mentionner que, malgré le fait d'avoir trouvé une preuve élémentaire à la question de Fouvry-Kowalski-Michel, le défi n'est pas pour autant complètement relevé. En effet, ces chercheurs demandent une preuve non seulement élémentaire, mais *bijective* de l'énoncé du théorème 1, alors que notre preuve établit seulement que les deux ensembles ont le même cardinal. D'autres preuves non-bijectives ont d'ailleurs été trouvées avant celle du $\mathbb{TFJM}^2$, mais toujours avec des outils plus complexes. Il y a notamment :

- la preuve mentionnée sur le blog de Kowalski, basée sur des calculs informatiques sur des courbes elliptiques ;
- une preuve (non publiée) par David Zywina, basée sur l'étude de certaines formes modulaires, comme il était suggéré à la fin du post de Kowalski ;
- un résultat encore plus général sur les représentations ℓ-adiques du groupe fondamental d'une courbe, dû à Deligne et Flicker (cf. [**1**]), qui implique aussi l'énoncé.

Après les courbes elliptiques, les formes modulaires, les représentations ℓ-adiques et Chevalley-Warning, à vous de trouver une meilleure preuve !

Références

[1] **Pierre Deligne, Yuval Flicker.** Counting local systems with principal unipotent local monodromy. *Ann. of Math. (2)* 178(3), 921–982.

[2] **Étienne Fouvry, Emmanuel Kowalski, Philippe Michel.** Algebraic twists of modular forms and Hecke orbits. *Geom. Funct. Anal.* 25(2), 580–657, 2015.

[3] **Jean-Pierre Serre.** *Cours d'arithmétique.* Collection SUP : "Le Mathématicien", No 2. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

Appendice A. Quelques mots sur le $\mathbb{TFJM}^2$ (par Matthieu Lequesne et Giancarlo Lucchini Arteche)

A.1. Qu'est-ce que le $\mathbb{TFJM}^2$? — Le *Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens* est une compétition de mathématiques qui propose à des élèves de lycée de travailler par équipe sur une série de problèmes ouverts pendant plusieurs mois. Il est organisé par l'association Animath et par une grande équipe d'anciens participants, aujourd'hui tous en études supérieures.

A.1.1. *Un peu d'histoire.* — C'est David Zmiaikou, jeune mathématicien biélorusse, qui est à l'origine du $\mathbb{TFJM}^2$, ainsi que de sa version internationale, l'ITYM (International Tournament of Young Mathematicians). Pendant ses années en tant que doctorant en mathématiques à l'université Paris-Sud, il a eu l'idée d'organiser un tournoi international à l'image des tournois de mathématiques en Biélorussie. Avec l'aide de Bernardo da Costa, également doctorant à la faculté d'Orsay, et avec le soutien de l'association Animath, le premier tournoi international des jeunes mathématiciens a eu lieu en 2009 dans les installations de l'université avec la participation de six équipes provenant de quatre pays différents : Biélorussie, Bulgarie, France et Russie.

En 2011, deux ans après le succès du premier tournoi, un troisième doctorant, Igor Kortchemski, s'est ajouté à ce groupe pour créer la version française du tournoi, en partie pour mieux préparer les équipes françaises envoyées à l'ITYM. C'est ainsi que le $\mathbb{TFJM}^2$ est né, accueillant pour sa première édition quatre équipes venues de Paris, Versailles et Strasbourg.

Le $\mathbb{TFJM}^2$ s'est bien dévéloppé depuis. En effet, il accueillait déjà dix-huit équipes en 2014 et, pour l'édition 2015, il a fait un grand saut en proposant pour la première fois des tournois régionaux aux quatre coins de la France.

A.1.2. *Le format.* — Le $\mathbb{TFJM}^2$ se compose aujourd'hui de deux étapes : des tournois régionaux répartis partout en France, puis une finale nationale à l'École polytechnique et à l'ENSTA Paristech. Une liste contenant entre 8 et 12 problèmes est publiée chaque année en décembre. Ainsi les élèves peuvent regarder les problèmes pendant leurs vacances et commencer à travailler pendant le mois de janvier. Ils sont encadrés pour cela par des professeurs de lycée, mais aussi par des étudiants, doctorants ou chercheurs des universités voisines. En 2017, des tournois régionaux sont prévus dans les villes de Lille, Lyon, Paris, Rennes, Strasbourg et Toulouse lors d'un week-end pendant le mois d'avril. La finale nationale aura lieu pour sa part au mois de mai.

Lors des différents tournois, les équipes s'affrontent par poules sous la forme de "joutes mathématiques". Dans celles-ci, chaque équipe occupe à tour de rôle trois fonctions :

– *présenter la solution* d'un problème sur lequel ils ont travaillé ;

– *critiquer la solution* qui a été présentée : chercher les imprécisions, demander des explications et lancer un débat constructif qui a lieu au tableau ;
– *évaluer le débat* et éventuellement le prolonger s'il y reste des choses intéressantes à discuter ;

le tout devant un jury formé de chercheurs, professeurs, doctorants et étudiants de master ou de grandes écoles.

Outre leur prestation orale, les élèves sont aussi incités à évaluer les solutions écrites par leurs camarades. Ils rédigent pour cela des notes de synthèse sur la solution qui va être présentée. Celles-ci sont également évaluées par le jury.

Les solutions sont soumises une semaine avant chaque tournoi. Peu après, un tirage au sort a lieu pendant lequel se décide la formation des poules, les problèmes qui seront présentés et l'ordre des présentations.

A.2. Une rencontre avec la recherche. — On voit ainsi que, à la différence des mathématiques que les participants rencontrent au lycée et dans d'autres compétitions, ce tournoi leur propose une vraie rencontre avec la recherche en mathématiques. En effet :

1. Les problèmes proposés sont complètement ouverts puisque personne n'en connaît la solution générale, pas même leurs auteurs. Les élèves doivent donc chercher par eux-mêmes en ayant droit à toutes les ressources possibles, y compris des résultats intermédiaires trouvés dans des livres, voire sur internet. En cela, ils ont la même liberté qu'un chercheur dans son laboratoire face à ses problèmes mathématiques quotidiens.

2. Le travail se fait par équipes. On peut alors travailler à plusieurs sur un même problème, en répartissant les tâches en fonction des compétences de chacun. On peut se relire les uns les autres et on peut aussi travailler sur plusieurs problèmes à la fois. Les problèmes recouvrant divers domaines des mathématiques, l'équipe entière simule ainsi un "mini-laboratoire" de recherche !

3. Le rôle de l'encadrant est à mettre en parallèle avec celui d'un directeur de thèse. En effet, il est là pour aider les élèves lorsqu'ils se trouvent dans une impasse, pour leur donner des outils qui les aideront à trouver la solution et pour leur donner des pistes de recherche, sans toutefois leur donner directement la solution.

4. Les débats qui ont lieu au tableau lors du tournoi n'ont rien à envier aux discussions que les chercheurs ont tous les jours dans un laboratoire de mathématiques. En effet, il s'agit de quelqu'un qui présente ses résultats de manière concise et de son interlocuteur qui lui fait remarquer là où il a été imprécis, tout comme un chercheur qui présente ses travaux au collègue du bureau voisin pour être sûr que tout semble correct.

5. Le travail de relecture des solutions des autres équipes est similaire au travail des rapporteurs d'articles de recherche. De plus, le fait de lire d'autres solutions aide les élèves à comprendre ce qui a pu manquer en pédagogie dans leurs propres textes. C'est également dans cette dynamique, en lisant de plus en plus d'articles, qu'un chercheur apprend petit à petit à en écrire de meilleurs.

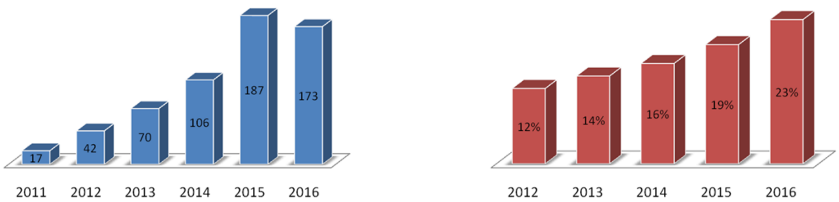
Le tournoi permet aussi les échanges entre élèves et chercheurs de premier niveau, lesquels participent de façon bénévole en tant que jurys. Les présidents de jury interagissent notamment avec les élèves après le premier tour de chaque tournoi pour faire un compte-rendu des débats afin de les faire progresser dans la présentation de résultats scientifiques. En outre, depuis 2013, les élèves assistent à des exposés donnés par des chercheurs lors des cérémonies d'ouverture ou de clôture.

A.3. Le $\mathbb{TFJM}^2$ en chiffres. —

A.3.1. *Un tournoi en pleine croissance.* — Après un premier tournoi en 2011 avec seulement 17 participants, le $\mathbb{TFJM}^2$ a atteint un cap en 2014 avec 106 participants. Ceci a motivé la création des tournois régionaux en 2015, lesquels rassemblent depuis plus de 150 participants. Le nombre de tournois n'a cessé d'augmenter : quatre tournois régionaux en 2015, puis cinq en 2016 et six en 2017. L'objectif à long terme serait de parvenir à en organiser un par académie.

A.3.2. *Un tournoi ouvert à tous.* — L'édition 2016 du tournoi, avec ses cinq tournois régionaux, a réuni des participants scolarisés dans 16 académies distinctes, de Nantes à Montpellier, en passant par Nancy-Metz. Ceci est possible grâce au format du tournoi, qui permet de travailler en temps libre et à distance. D'ailleurs, des équipes mixtes inter-départamentales participent chaque année.

Le $\mathbb{TFJM}^2$ se veut également de plus en plus mixte avec une part de mathématiciennes toujours croissante : de 12% de filles en 2012, ce pourcentage est en augmentation constante et a atteint 23% en 2016 (l'année 2011 n'est pas représentative compte tenu du nombre total de participants).



Nombre total de participants et pourcentage de participantes par année.

Thomas Budzinski & Giancarlo Lucchini Arteche