LP 23 : Oscillations

Bibliographie

1. Taillet, Dictionnaire de physique
2. Sanz, Physique tout-en-un MPSI, PCSI, PTSI
3. Côte, Physique-Chimie, BCPST 2ème année

Introduction pédagogique

Niveau : BCPST2

Prérequis :

1. Mécanique du point [BCPST1]
2. Forces de frottements (fluide, solide) [BCPST1]
3. Pendules simple et système masse ressort [BCPST1]
4. Conservation de l'énergie (équilibres stables et instables) [BCPST1]
5. Régimes transitoires et régimes permanents [BCPST1]
6. Notation complexe [BCPST2]
7. Diagrammes de Bode et circuits RLC [BCPST2]

Objectifs :

1. Mettre en lien les oscillations vues en électrocinétique avec celles de la mécanique
2. Modéliser un oscillateur mécanique en régime libre avec et sans frottements ou en régime forcé

Difficultés :

1. Bien comprendre le phénomène d'oscillations et le mettre en lien avec les cours vu précédemment
2. Comprendre les calculs et savoir résoudre une équadiff
3. Reconnaître une équadiff et prévoir les types d'oscillations qui seront observées

Exemples de TP	pendule ou système masse-ressort
Exemples de TD	établissements et résolutions d'équations différentielles en régime libre ou forcé

Table des matières

Introduction

Oscillations : variation périodique d'une grandeur physique

Les oscillations sont observées sur de nombreux systèmes qu'on appelle des oscillateurs :

Oscillateurs : système soumis à deux effets antagonistes faisant osciller son état autour d'une position d'équilibre

Il existe plusieurs sortes d'oscillateurs, vous en avez déjà rencontré que ce soit en mécanique ou en électrocinétique. Nous allons ici faire le lien entre ces différents oscillateurs et vous montrer le caractère général des oscillations qui sont un phénomène très important en physique.

On va revoir les différents résultats que vous avez pu voir l'an dernier en mécanique et refaire un point sur ceux que vous venez d'obtenir lors du cours d'électrocinétique.

1 Oscillations libres non amorties

1.1 L'approximation harmonique

Prenons une courbe d'énergie potentielle comme suit :

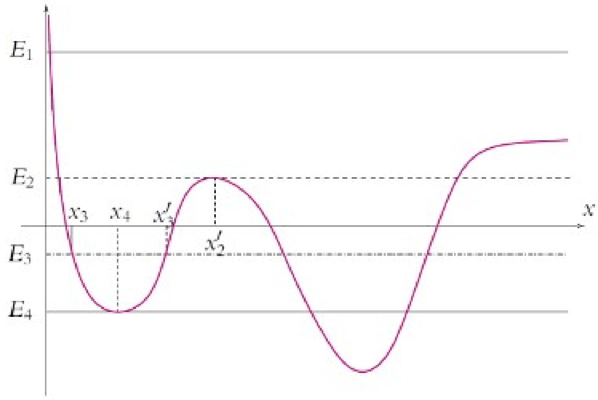

Figure 1 – Courbe d'énergie potentielle (*Source : Sanz p.159)*

On voit que l'on a un minimum d'Ep (et donc une position d'équilibre stable) en $x = x_4$. On peut faire un développement de Taylor :

$$E_p(x) = E_p(x_4) + (x - x_4)\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_4} + \frac{(x-x_4)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=x_4} \tag{1}$$

Or on sait que x_4 est un minimum pour l'énergie potentielle donc $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_4} = 0$. Ce qui donne :

$$E_p(x) = E_p(x_4) + \frac{(x-x_4)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=x_4} \tag{2}$$

De plus on sait que $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. En faisant l'hypothèse d'absence de force non conservatives et de frottements on a d'apres le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

$$0 = \dot{x}(x - x_4)\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}t^2} + m\dot{x}\ddot{x} \tag{4}$$

$$0 = (x - x_4)\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}t^2} + \ddot{x} \tag{5}$$

Enfin en notant $X = x - x_4$ on obtient :

$$\ddot{X} + \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}t^2}X = 0 \tag{6}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique. On voit que n'importe quel potentiel peut être assimilé à un potentiel harmonique au voisinage d'une postion d'équilibre stable.

Analogie électrique :

— Circuit LC : impossible dans la réalité car il y a toujours une résistance qui persiste (fils, bobine, condensateur)

1.2 Mise en évidence : le pendule simple

Equation du pendule simple :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - cos(\theta))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_m = \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin(\theta)) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin(\theta) = 0 \tag{7}$$

Avec l'approximation des petits angles on a un oscillateurs harmoniques (au voisinage de la position d'équilibre)

Pour des angles supérieurs à 20° on voit qu'on perd le fait qu'on se rapproche d'un oscillateur harmonique : on est plus au voisinage de l'équilibre les approximations faites ne sont plus valables.

Expérience : pendule simple avec tracé en direct sur LatisPro : on peut comparer avec le code python

2 Oscillations libres amorties

2.1 Présence de frottements fluides

On considère maintenant un pendule comme le précédent mais qui est en plus soumis à une force de frottement fluide ($\mathbf{f} = -\lambda\mathbf{v}$). On se doute que l'effet de ces frottements vont amortir les oscillations mais est-il possible de quantifier cela ?

On peut appliquer le PFD : $m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} - \lambda\mathbf{v}$ ce qui donne selon $\mathbf{u}_\theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{8}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{9}$$

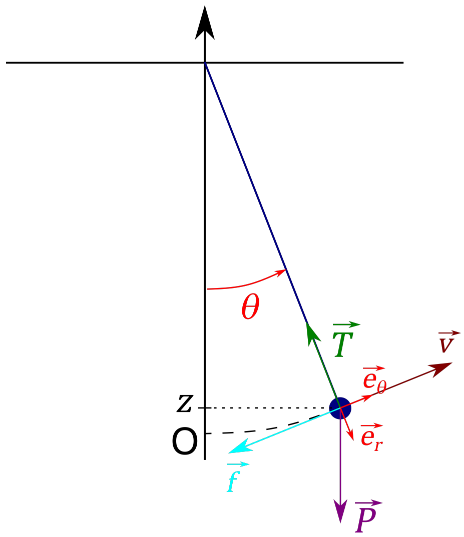

FIGURE 2 – Schéma du pendule amorti

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $Q = \frac{m}{\lambda}\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Si on regarde le discriminant de cette équation on obtient :

$$\varDelta = 4\omega_0^2(\frac{1}{4Q^2} - 1) \tag{10}$$

On remarque une valeur particulière de Q qui va définir trois types de régimes :
- $\varDelta < 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$: on a un régime apériodique : les frottments sont suffisament importants pour empêcher la moindre oscillations
- $\varDelta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$: on a un régime critique, on observe une première oscillations
- $\varDelta > 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$: on a un régime pseudo-périodique qui présente quelques oscillations avant de s'arrêter.

On note ce facteur Q : le facteur de qualité :

Facteur de qualité : Grandeur caractéristique des systèmes oscillants amortis qui mesure l'importance de l'amortissement sur les oscillations

Analogie électrique :
- Courant dans un circuit RLC avec la résistance qui représente les frottements
- Décharge d'un condensateur dans un circuit RLC, la résistance représente aussi les frottements

2.2 Mise en évidence expérimental

Expérience : pendule simple avec forces de frottements avec tracé en direct sur LatisPro : on peut comparer avec le code python en faisant varier Q : montrer les trois régimes

3 Oscillations forcés : régime transitoire et régime permanent

On a le système masse ressort suivant excité par un moteur qui va induire une force excitatrice du type $\mathbf{F_e} = F_e \cos(\omega t)\mathbf{u_x}$. On peut appliquer le PFD selon $\mathbf{u_x}$:

$$m\ddot{x} = -k(l - l_0) - \lambda\dot{x} + mg + F_e\cos(\omega t) \tag{11}$$

A l'équilibre (sans exciter le système) on a :

$$0 = -k(l_{\acute{e}q} - l_0) + mg \tag{12}$$

D'où :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(l - l_{\acute{e}q}) - \lambda\dot{x} + F_e\cos(\omega t) \\ m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx &= F_e\cos(\omega t) \\ \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{F_e}{m}\cos(\omega t) \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti avec un second membre

On a l'équation différentielle du mouvement. Vous avez déjà résolu des équations de ce type en électrocinétique : pour cela on passe en grandeurs complexes :

$$\underline{x} = \frac{\underline{F_e}/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}} \tag{13}$$

On a ainsi le module du complexe :

$$X_m(\omega) = \frac{F_e/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}} \tag{14}$$

On retrouve les propriétés que l'on avait pour les diagrammes de Bode du second ordre en électrocinétique et on peut résoudre en faisant les mêmes cheminements.

Analogie électrocinétique : circuit RLC classique aux bornes du condensateur : cf les diapos

4 Conclusion

On a vu que les phénomènes de résonances pouvaient se modéliser par des équations différentielles du second ordre. A part l'oscillateur harmonique non amorti, qui est un cas limite idéal, toutes ces oscillations sont composées d'un régime transitoire puis d'un régime permanent qui dépend du second membre : nul si il n'y en a pas ou sinusoïdal pour le régime forcé.

L'apparition du facteur de qualité Q permet de mieux comprendre ces équations et d'avoir un premier aperçu de l'allure des oscillations avant de résoudre le système.

De même qu'en électrocinétique on aura des phénomènes de résonance qui peuvent être extrémement problématique, que l'on étudiera plus en détail durant le TD.

Questions

1. Mesure de g : hypothèse ? On a négligé la masse de la tige : il faudrait prendre en compte le moment d'inertie de la tige. Quel théorème utiliser ? Théorème du moment cinétique
2. Comment Latis fait pour mesurer la période ?
3. Calcul d'incertitude ?
4. Comment on a calculé g ? Tracé de T en fonction de racine de l
5. Dans quels référentiel on applique le pfd. Référentiel terrestre galiléen ? Temps d'expérience court devant le mouvement de a Terre.
6. Un pendule peut-il mettre en évidence les forces d'inertie ? Pendule de Foucault
7. Formule de Borda
8. Jusqu'à quels angle l'hypothèse des petites oscillation reste valable ? Inférieur à 20 degré : justification (cf formule de Borda mais sinon on peut le montrer expérimentalement)
9. Diagramme de phase d'un oscillateur harmonique ? cercle ou ellipse pour un mouvement lié. Pour un mouvement libre ?
10. Facteur d'amortissement ? Dimension du facteur ? $\xi = \frac{1}{2Q}$: facteur adimensionné
11. Autre définition du facteur de qualité ? A partir de la bande passante ? Sélectivité d'un filtre : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$
12. Ordre de grandeur de Q ? Mesure rapide du nombre d'oscillation en cas d'oscillation amortie. Pour nous de l'ordre de la centaine
13. Ordre de grandeur en électrocinétique ? centaine, millier
14. Analogies électromécaniques ?
15. Comment mesurer une valeur d'inductance ?
16. Comment modéliser un condensateur réel ? Comment voir l'effet de la résistance interne ? Mesure de l'énergie de charge et de décharge
17. Comment modéliser une bobine réel ? Perte énergétique dans une bobine ? 3 sources de perte : effet Joule ; perte par courant de Foulcault
18. Que ce passe-t-il à haute fréquence dans un conducteur ohmique ? Effet de peau : le champs électrique reste confiné à la périphérie du conducteur : la résistance du câble est alors plus importante
19. Phénomène d'oscillation dans la vie courante ; enfant sur une balançoire. Que ce passe-t-il quand l'enfant tend les jambe ? Oscillateur paramètrique
20. Qu'est-ce que la leçon apporte en plus des prérequis ?
21. Condition pour faire un développement de Taylor ?

Correction

1. Leçon trop ambitieuse
2. Bien travailler le début pour se mettre en confiance

3. Expérience + python survolés superficiellement
4. Bonne réaction pour corriger l'erreur du développement de Taylor
5. Aucun résultat encadré
6. Unité sur le code python pas très cohérente avec l'expérience
7. Incertitudes ?
8. Analogie électromécanique pas très bien connue : on peut mettre une slide dessus.
9. Peut-être enlever les oscillations forcées
10. Bon usage des diapos
11. Mettre en lien les courbes de python avec l'expression des solutions.
12. Sens du courant non indiqué sur un schéma
13. Formule de Borda : correction à l'ordre supérieur de l'approximation des petits angles
14. Définition de la seconde ? Facteur de qualité pour les atomes de l'ordre de 10 puissance 7
15. On peut faire des analyses dimensionnelles quand on établit une formule
16. Ne pas hésiter à donner des ordres de grandeurs