

LP 26 : RÉGIMES TRANSITOIRES

Introduction Pédagogique

Bibliographie

1. Salamito PCSI
2. Fruchart

Niveau : BCPST 1

Prérequis :

1. Electrocinétique : loi des mailles, loi des noeuds, dipôle linéaire et les relations courant/tension associées.
2. Radioactivité : écriture d'une équation de désintégration
3. Mécanique du point : principe fondamental de la dynamique, frottement fluide, pendule pesant.
4. Résolution d'équation différentielle d'ordre 1 et 2.

Objectifs :

1. Savoir caractériser un régime transitoire
2. Montrer la présence de régime transitoires similaires dans différents domaines de la physique

Difficultés :

1. La leçon mélange plusieurs domaines de la physique : on essaiera de bien faire comprendre l'analogie en terme de régime transitoire
2. Besoin d'être à l'aise avec la résolution d'équation différentielle.

TD :

1. Analyse de régime transitoire

Expérience : Détermination du temps caractéristique du régime transitoire d'un circuit RC.

Pendule pesant avec frottement fluide : montrer les oscillations amorties

Table des matières

1	Introduction	2
2	Régime transitoire du 1er ordre	2
2.1	Temps caractéristique	2
2.2	Etude d'un circuit RC	3
3	Régime transitoire du second ordre	3
3.1	Etude du circuit RLC	4
3.2	Analogie avec la mécanique : pendule pesant amorti	4
4	Conclusion	5

1 Introduction

Si on perturbe un système, celui ci sort de son état d'équilibre. Il va donc chercher à retrouver un état stable. Ce retour à l'équilibre n'est instantané : le système passe par un régime **transitoire** entre ses 2 états d'équilibre. Par définition les régimes transitoires sont des systèmes où certaines grandeurs du système au cours du temps. Ils s'opposent ainsi aux **régimes permanent** qui n'évoluent pas dans le temps.

Les régimes transitoires sont des phénomènes que l'on constate tout les jours : si vous donnez un coup de pied dans un ballon : ce dernier va passer d'un état au repos vers un autre état de repos. Le mouvement qu'il décrit entre ces 2 points est un exemple de régime transitoire.

Ces régimes transitoires sont donc présent dans divers domaines de la physique. Nous allons voir aujourd'hui :

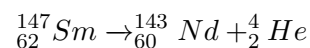
Comment caractériser ces régimes transitoires ?

2 Régime transitoire du 1er ordre

Un régime transitoire du 1er ordre est un régime où au moins une grandeur caractéristique du système varie en fonction du temps selon une **équation différentielle du premier ordre**. Comment caractériser ces systèmes ? On introduit la notion de temps caractéristique.

2.1 Temps caractéristique

Par exemple, on peut dater des roches en étudiant la désintégration du $^{147}_{62}\text{Sm}$ en $^{143}_{60}\text{Nd}$ selon la réaction de désintégration :



Le noyau de samarium étant instable, le système évolue vers la formation de néodyme qui est un isotope stable. Tant que du samarium est présent, le système est dans un régime transitoire, la concentration en samarium varie au cours du temps dans l'échantillon de roche suit l'équation différentielle :

$$\frac{d[\text{Sm}]}{dt} = -\lambda[\text{Sm}](t)$$

Avec λ la constante de désintégration du samarium. On exprime généralement cette constante en an^{-1} . On introduit alors le temps caractéristique $\tau = \frac{1}{\lambda}$ homogène à une durée.

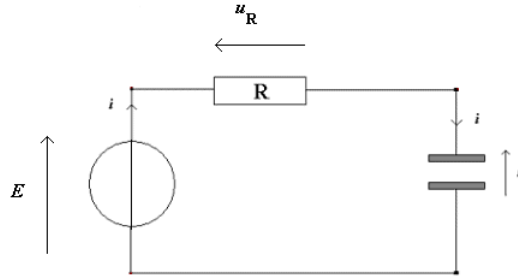
Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{Sm}]}{dt} &= -\frac{1}{\tau}[\text{Sm}](t) \\ [\text{Sm}](t) &= [\text{Sm}](0) \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \end{aligned}$$

La connaissance de ce temps caractéristique est de la concentration en samarium présent dans l'échantillon au moment de sa formation permet de remonter à l'âge de la roche.

Ainsi, un régime transitoire est entièrement caractérisé par la valeur initiale de la grandeur qui varie et par le temps caractéristique d'évolution de la grandeur. En fonction des systèmes, il est plus ou moins facile de connaître la valeur initiale mais comment mesurer un temps caractéristique ?

2.2 Etude d'un circuit RC



A l'instant $t=0$, on ferme l'interrupteur : la loi des mailles donne :

$$E = Ri + u$$

$$E = RC \frac{du}{dt} + u$$

$$\frac{E}{RC} = \frac{du}{dt}(t) + \frac{1}{RC}u(t)$$

L'équation homogène donne une solution :

$$u_0(t) = A \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}$$

$$u_0(t) = A \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$$

On fait intervenir le temps caractéristique $\tau = RC$ du système.

Afin de terminer la résolution de l'équation différentielle, on doit chercher une solution particulière sous la forme d'une solution constante :

$$\tilde{u} = E$$

Ainsi :

$$u(t) = E + A \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$$

Détermination de la condition initiale A la fermeture de l'interrupteur, la tension au borne du condensateur est continue : $u(t=0)=0$. Donc :

$$u(t) = E(1 - \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\})$$

Détermination expérimentale du temps caractéristique
cf protocole sur mon site.

3 Régime transitoire du second ordre

3.1 Etude du circuit RLC

Etablissement de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} E &= Ri(t) + u_L(t) + u(t) \\ E &= Ri(t) + L \frac{di}{dt} + C \\ E &= RC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} + u(t) \\ \frac{E}{LC} &= \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} + \omega^2 u(t) \end{aligned}$$

Le régime transitoire n'est plus définie par un temps caractéristique mais par 2 paramètres :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}$$

ω_0 est la pulsation propre du circuit : homogène à l'inverse d'un temps. Q est le facteur de qualité du circuit, sans unité. On a maintenant besoin, en plus des conditions initiale, de 2 paramètres pour caractériser le régime transitoire.

La nature du régime transitoire est déterminé par le signe du discriminant de l'équation caractéristique du système :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0 \\ \Delta &= \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) \end{aligned}$$

Ainsi, la nature du régime transitoire dépend de la valeur du facteur de qualité :

1. $Q < 1/2$; $\Delta > 0$: régime aperiodique. $u(t) = A \exp\{-\omega_0 t\}$
2. $Q = 1/2$; $\Delta = 0$: régime critique. $u(t) = (A + Bt) \exp\{-\omega_0 t\}$
3. $Q > 1/2$; $\Delta < 0$: régime pseudo-periodique. $u(t) = \exp\left\{-\frac{\omega_0}{2Q} t\right\} (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$

Projeter l'allure des solutions.

Ainsi, si on reste rigoureux mathématiquement le système n'atteint le régime permanent que pour un temps infini. En pratique, au bout d'un moment, le système varie peu autour de sa valeur d'équilibre.

On définit alors la notion de **temps de réponse à 5%**, temps à partir duquel la grandeur du système est bornée autour de 5% de sa valeur finale. cf figure *Salamito p 346*.

3.2 Analogie avec la mécanique : pendule pesant amorti

Schéma du pendule.

Les forces qui s'appliquent sur le systèmes sont :

— Le poids : P

— La force de frottement fluide. $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda l \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$

Le théorème du moment cinétique appliqué au pendule pesant donne :

$$\begin{aligned} J \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -mgl \sin(\theta) - \lambda l^2 \frac{d\theta}{dt} \\ 0 &= \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\lambda}{J} l^2 \frac{d\theta}{dt} + \frac{mgl}{J} \theta \\ 0 &= \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta \end{aligned}$$

En approximant $\sin(\theta) \approx \theta$ pour des petits angles.

On peut alors introduire par analogie :

— $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ la pulsation propre du système

— $Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{mglJ}{l^3}}$

Ainsi

— si les forces de frottements fluides sont faible, Q est élevé : régime pseudoperiodique

— si les forces de frottements fluides sont forte, Q est faible : régime aperiodique

L'illustrer avec le pendule pesant.

4 Conclusion

Ainsi, nous avons vu 2 catégories de régimes transitoires qui sont présents dans plusieurs domaines de la physiques. Ces régimes peuvent être caractérisées par différents paramètres qui permettent de prédire l'évolution d'un système au cours du temps pour pouvoir remonter à certaines informations.

Les systèmes que nous avons considéré subissent une perturbation puis évoluent vers un état d'équilibre. On étudiera dans un prochain cours, le cas où on stimule en permanence le système : on parlera de régime **forcé**.