

LP 31 VISCOSITÉ

Introduction Pédagogique

Bibliographie

1. Physique PC/PC*
2. BCPST 2ème année : le cours-complet

Niveau : BCPST 2

Prérequis :

1. mécanique PFD
2. Forces de pression, poussée d'Archimède
3. Équation d'Euler
4. Diffusion
5. Opérateur : expression du gradient scalaire en coordonnée cartésienne

Objectifs :

1. Introduire la notion de viscosité
2. Détermination expérimentale de la viscosité

Difficultés :

1. Nature diffusive de la viscosité difficile à appréhender

TD :

1. Écoulement de Couette cylindrique
2. Écoulement de Poiseuille.

Expérience :

1. Chute d'une bille

Table des matières

1	Introduction	2
2	Viscosité d'un fluide Newtonien	2
3	Mouvement dans un fluide visqueux	4

1 Introduction

La viscosité est une notion que l'on a l'habitude de rencontrer, notamment quand on compare l'écoulement de l'eau et du miel, on constate une différence de comportement due à la viscosité : quelle est l'origine de force ?

2 Viscosité d'un fluide Newtonien

2.1 Force de viscosité

Force de viscosité : force de frottement interne au fluide. Fluide Newtonien : Fluide dont la contrainte est proportionnelle à la variation de la vitesse. Ce coefficient est noté η : il s'agit du coefficient de viscosité : il dépend de la température, de la nature du fluide. Il s'exprime en Pa.s ou historiquement en poiseuille.

Soit la particule fluide de volume $d\tau = dx dy dz$, la force tangentielle exercée par le fluide au dessus de la particule vaut

$$d\mathbf{F}(x, y, z + dz)_t = \eta \frac{\partial V_x(x, y, z + dz)}{\partial z} dS \mathbf{e}_x$$

Ainsi le bilan des forces sur les 2 faces opposée est :

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_x &= \eta \left[\frac{\partial V_x(x, y, z + dz)}{\partial z} - \frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial z} \right] dS \mathbf{e}_x \\ &= \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dS \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

Équivalent volumique, en considérant l'action de chacune des composantes de la vitesse sur chacune des faces :

$$\mathbf{F} = \eta \Delta \mathbf{v}$$

Dans un fluide visqueux, les particules possédant une vitesse non nulle vont mettre en mouvement les particules immobiles. La viscosité correspond alors à un transfert de quantité de mouvement de nature diffusive afin de rendre le profil de vitesse homogène dans le fluide.

On peut ainsi généraliser l'équation d'Euler aux fluides visqueux, pour obtenir l'équation de Navier-Stokes d'un fluide incompressible :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} P + \eta \Delta \mathbf{v}$$

Conséquence de la viscosité : la vitesse tangentielle est continue à une interface.

2.2 Application : équation de Poiseuille

Position du problème :

- Système invariant selon x et y
- Régime stationnaire

$$\mathbf{v} = v(z) \mathbf{e}_x$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Dans ces conditions l'équation de Navier Stokes s'écrit :

$$0 = \rho \mathbf{g} - \mathbf{grad}P + \eta \Delta \mathbf{v}$$

Projection sur z : on retrouve la relation de la statique des fluides :

$$P(x, z) = f(x) - \rho g z$$

Projection sur x :

$$\begin{aligned}\eta \frac{d^2 v(z)}{dz^2} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x} \\ &= \kappa\end{aligned}$$

Car on égalise une fonction de z et une fonction de x. Si $\kappa \neq 0$, f diverge donc :

$$\begin{aligned}\eta \frac{d^2 v(z)}{dz^2} &= 0 \\ \mathbf{v} &= (Az + b)\mathbf{e}_x\end{aligned}$$

Conditions aux limites : $V(0)=U$; $V(h)=0$

2.3 Nombre de Reynold

Réécrivons l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} + \rho \mathbf{g} - \mathbf{grad}P + \eta \Delta \mathbf{v}$$

1. Si le terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ était seul : l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} \\ \frac{D\mathbf{v}}{dt} &= 0\end{aligned}$$

On dit qu'il s'agit d'un transport convectif de matière

2. Si le terme $\eta \Delta \mathbf{v}$ était seul :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{v}$$

On obtient une équation de diffusion de coefficient $\frac{\eta}{\rho} = \nu$, appelé viscosité cinématique du fluide.

L'équation de Navier-Stokes possédant peu de solutions analytique dans les cas réels : on va chercher à négliger certains termes et notamment si le mouvement des particules

fluides est plutôt due à des phénomènes convectifs ou diffusifs. On définit alors le nombre de Reynolds pour un écoulement de longueur caractéristique L et de vitesse caractéristique v .

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho \|\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\mathbf{v}\|}{\eta \|\Delta\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{\rho v^2 / L}{\eta v / L^2} \\ &= \frac{\rho v L}{\eta} \\ &= \frac{v}{\nu L} \end{aligned}$$

Si $Re \ll 1$ le transport convectif est plus efficace que le transport diffusif : on parle de régime **laminaire**

Si $Re \gg 1$ le transport diffusif est plus efficace que le transport convectif : on parle de régime turbulent.

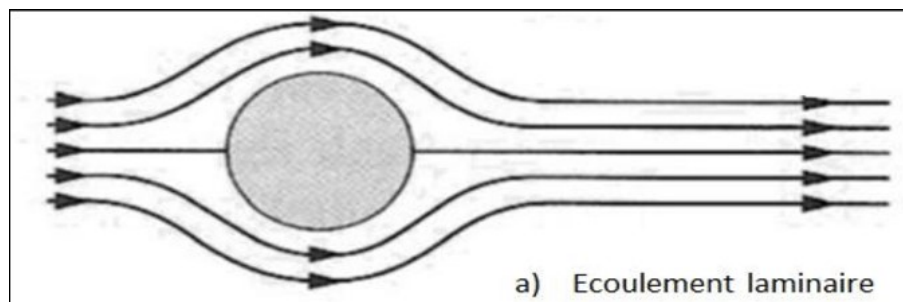
3 Mouvement dans un fluide visqueux

On considérera un objet à symétrie sphérique de rayon r , de dans un fluide de viscosité η . On doit rajouter une force de frottement dans le même sens que la vitesse appelée force de traînée.

3.1 Force de frottement fluide

3.1.1 Faible nombre de Reynold : loi de Stokes

Régime laminaire $Re < 1$:



La force de traînée s'écrit :

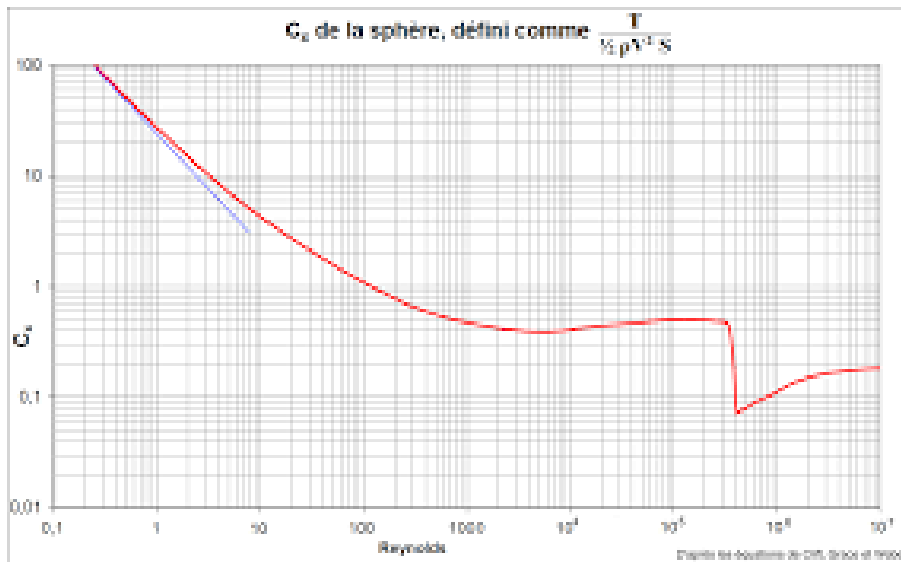
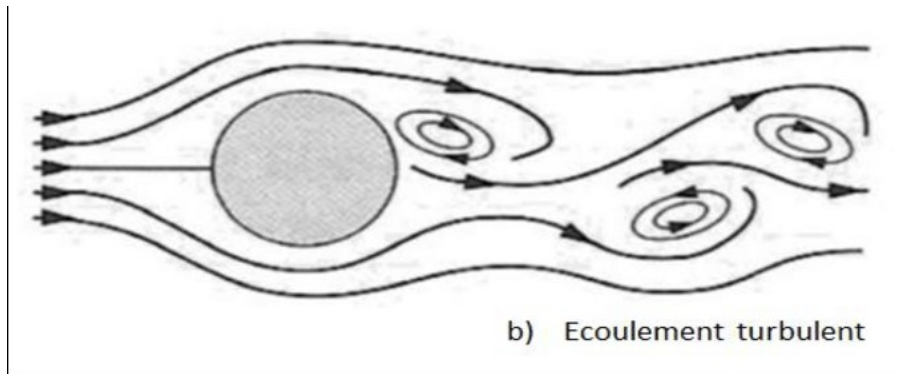
$$\mathbf{F}_t = -6\pi r \mathbf{v}$$

3.1.2 Haut nombre de Reynold : coefficient de traînée

Pour un nombre de Reynold de l'ordre de 1000, on est dans le régime turbulent. La force de traînée s'écrit :

$$\mathbf{F}_t = -\rho C S v^2 \frac{\mathbf{v}}{\|v\|}$$

C correspond est un coefficient appelé *coefficient de traînée* dont les variations suivent le graphe :



3.2 Mesure de la viscosité d'un fluide

Chute de la bille de masse volumique μ et de volume V dans un fluide de masse volumique ρ : bilan des forces :

$$\mu V \frac{dv}{dt} = \mu g - \rho V g - 6\pi\eta r v$$

En régime stationnaire pour $v = v_{max}$ et projeté sur l'axe vertical, ce bilan devient :

$$\begin{aligned} v_{max} &= \frac{Vg(\mu - \rho)}{6\pi\eta r} \\ \eta &= \frac{Vg(\mu - \rho)}{6\pi v_{max} r} \\ &= \frac{2r^2 g(\mu - \rho)}{9v_{max}} \end{aligned}$$