

Titre : Etude du Pendule Pesant

Etudiants : Timothée Chauviré, Thomas Georges

LP associés : LP 6 Aspects énergétiques de phénomènes physiques / LP 12 Gravitation et poids

LP 20 Conservation de l'énergie / LP 24 Oscillations

Bibliographie : Duffait p264, Bellier p.260

Objectifs de la manipulation :

- 1) Mesurer l'accélération de Pesanteur g
- 2) Faire un bilan énergétique du pendule

Matériel et sécurité :

Pendule pesant (N079-001)

Carte d'acquisition

Ordinateur + LatisPro

Spécificités du matériel :

Données du fabricant/constructeur sans indication des incertitudes :

M_0 totale (pendule complet + aimant sans masse additionnelle) = 0,8 kg

$l = 0,1906\text{m}$ (distance du centre de Gravité de la masse M_0 à l'axe de rotation

$x = 0,5174\text{m}$ (Rayon décrit par le centre de l'aimant)

$J_0 = 0.0609 \text{ kg.m}^2$ (moment d'inertie du pendule complet (masse M_0))

$C_{fs} = 5,2.10^{-5} \text{ N.m}$ (Couple de frottement de type solide (roulement+ capteur (moteur))

Consignes pour la prise de mesure :

Alimenter en tension le pendule pesant en branchant la boîte d'alimentation.

Récupérer le signal de sortie sur la carte d'acquisition borne EA0

Faire le zéro (en tension) sans oscillation

Choisir le calibre adapté (Ici +5V/-5V) sur LatisPro

Faire la mesure à petit angle (10° max par exemple)

Schéma de principe :

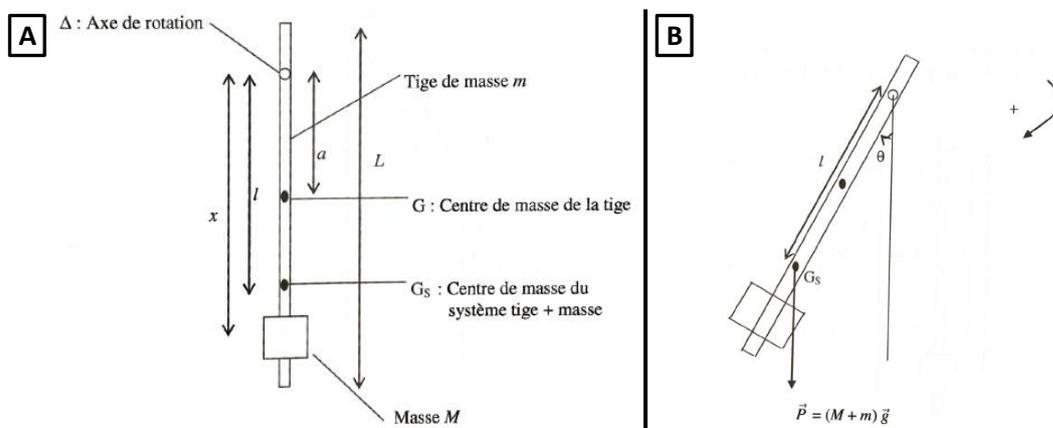


Figure 1 : Schéma de principe du pendule pesant, a) à l'équilibre, description des dimensions du système considéré, b) après rotation d'un angle θ , avant le lancement pour enregistrer les oscillations.

On se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

Les forces en présence sont :

- Force de pesanteur : $\vec{P} = (M + m)\vec{g}$
- Force de frottement fluide : $\vec{C}_s = -\frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta = -\frac{2}{\tau} \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

Comme le mouvement est circulaire, $\vec{a}_\theta = l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

Protocole et analyse de résultat :

I) Evaluation de l'accélération de la pesanteur g

En appliquant le PFD (pendule libre) ou le théorème du moment cinétique (pendule pesant), on obtient les équations du mouvement résumé dans le tableau suivant :

Tableau 1 : Résumé des quantités mécaniques liées à différents systèmes considérés : pendule libre sans frottement fluide, pendule libre avec frottement fluide, pendule pesant sans frottement fluide et pendule pesant avec frottement fluide

Quantité considérée	Pendule libre sans frottement fluide	Pendule libre avec frottement fluide	Pendule Pesant sans frottement fluide	Pendule Pesant avec frottement fluide
Masse considérée	M		M+m = M ₀	
Equation du mouvement	$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$	$\ddot{\theta} - \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$	$J_\Delta \ddot{\theta} + M_0 * gl * \sin(\theta) = 0$	$J_\Delta \ddot{\theta} - \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + M_0 gl \sin(\theta) = 0$
Approximation isochronisme (petit angles)	$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} * \theta = 0$	$\ddot{\theta} - \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$	$\ddot{\theta} + \frac{M_0 * gl}{J_\Delta} * \theta = 0$	$\ddot{\theta} - \frac{2}{\tau * J_\Delta} \dot{\theta} + \frac{M_0 gl}{J_\Delta} * \theta = 0$
Solution équation différentielle	$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + B)$	$\theta(t) = A * \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) * \cos(\omega_0 t + B)$	$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + B)$	$\theta(t) = A * \exp\left(-\frac{t}{J_\Delta \tau}\right) * \cos(\omega_0 t + B)$
Valeur pulsation pendule	$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_0)^2 - \left(\frac{1}{\tau}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\omega}$	$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{M_0 * l * g}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_0)^2 - \left(\frac{1}{\tau * J_\Delta}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\omega}$
Energie cinétique	$E_c = \frac{1}{2} M x(\dot{\theta})^2$		$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta (\dot{\theta})^2$	
Energie potentielle	$E_p = Mgx(1 - \cos(\theta))$		$E_p = M_0 gl(1 - \cos(\theta))$	
Energie mécanique	$E_m = E_p + E_c = cte$	$E_m = E_p + E_c = \sum W_{fluide}$	$E_m = E_p + E_c = 0$	$E_m = E_p + E_c = \sum W_{fluide}$

Le cas du pendule libre est mis de côté dans la suite de l'étude car complètement irréaliste par rapport au système étudié. Nous supposons le mouvement du pendule décrit par un système de type pendule pesant (dans les cas non amortis ou amortis).

On peut donc mesurer expérimentalement la période des oscillations et en déduire la valeur de l'accélération de pesanteur g. On a ici choisi d'évaluer cette période d'oscillation par simulation en utilisant LatisPro. 1 premier cas peut être étudié : le cas supposé non amorti (voir figure 2), T² et g sont alors directement proportionnels.

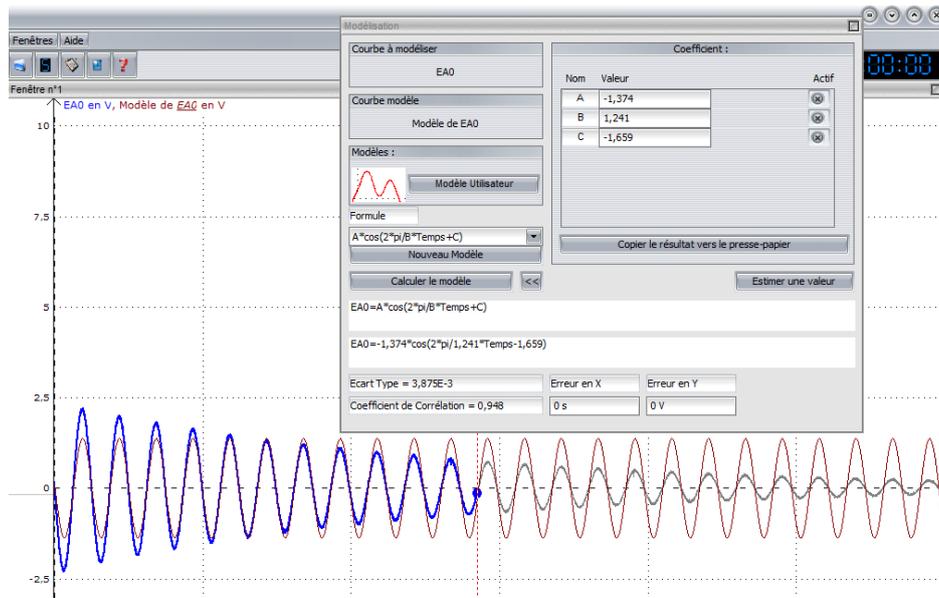


Figure 2 : Simulation effectuée sur LatisPro avec une fonction du type sinusoïdale : $EA0 = A \cdot \cos(2 \cdot \pi / B \cdot \text{Temps} + C)$

Par simulation, on obtient une période $T = 1,24 \pm 1,2 \cdot 10^{-4}$ s.

Or pour le pendule pesant $g = \frac{(2\pi)^2 J_{\Delta}}{M_0 \cdot l \cdot (T_0)^2}$

Et son incertitude :

$$\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{u(M_0)}{M_0}\right)^2 + \left(\frac{u(J_{\Delta})}{J_{\Delta}}\right)^2 + \left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u(T_0)}{T_0}\right)^2}$$

Avec les incertitudes types suivantes (Fonction de répartition supposée rectangulaire) :

$$u(M_0) = \frac{0,01}{\sqrt{3}} \text{ (kg)}$$

$$u(l) = \frac{0,001}{\sqrt{3}} \text{ (m)}$$

$$u(J) = \frac{0,001}{\sqrt{3}} \text{ (kg} \cdot \text{m}^{-2}\text{)}$$

D'après LatisPro, on détermine (voir figure 3) : $u(T_0) = 1,2 \cdot 10^{-4}$ (s)

On détermine ainsi : $g_{\text{exp}} = 10,2 \pm 0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (k=2, 95%)

Discussion : La valeur expérimentale de l'accélération de pesanteur est éloignée par rapport à la valeur tabulée ($9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). Les biais de mesure peuvent être incriminés (Longueur par rapport à l'axe de rotation non déterminée précisément, et/ou moment d'inertie légèrement différent de la valeur donné par le constructeur.) pour expliquer cette différence.

Le deuxième cas est de supposer le pendule pesant amorti par un frottement fluide. Plusieurs sources de frottement fluide peuvent être considérées : (frottement de l'air et interaction aimant/plaque). On évalue alors une pseudo-pulsation ω qui nous permet de déduire par la suite la valeur de l'accélération de pesanteur g . (Voir simulation en figure 3) On observe que la période de pulsation est très peu modifiée par rapport au pendule pesant non amorti.

On peut ensuite déterminer le coefficient d'amortissement fluide par simulation (voir figure 3) en utilisant le modèle : $EA0=A*\exp(-1*Temps/tau)*\cos(2*pi/B*Temps+C)$.

Par simulation, on trouve $J_{\Delta}*\tau = 12,1 \text{ kg.m}^2.\text{s}$ soit $\tau = 199 \text{ s}$.

Le coefficient d'amortissement fluide est la cause de différent phénomène physique :

- 1) Le frottement fluide de l'air peut être évalué en utilisant la relation d'écoulement visqueux de Stokes : $\vec{F}_{arr} = -6\pi R\eta\vec{v} = -6pR\eta l\dot{\theta}\vec{e}_{\theta}$ avec $\eta = 18,5 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ la viscosité dynamique de l'air.
- 2) Un frottement visqueux généré par courant de Foucault lié à la proximité de l'aimant et de la plaque de métal. D'après la loi de Laplace, on obtient :

$$\vec{F}_{aimant} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -\alpha_0\vec{v}$$

Au total, on trouve un force de frottement fluide totale $\vec{C}_S = -\frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_{\theta} = \vec{F}_{arr} + \vec{F}_{aimant}$

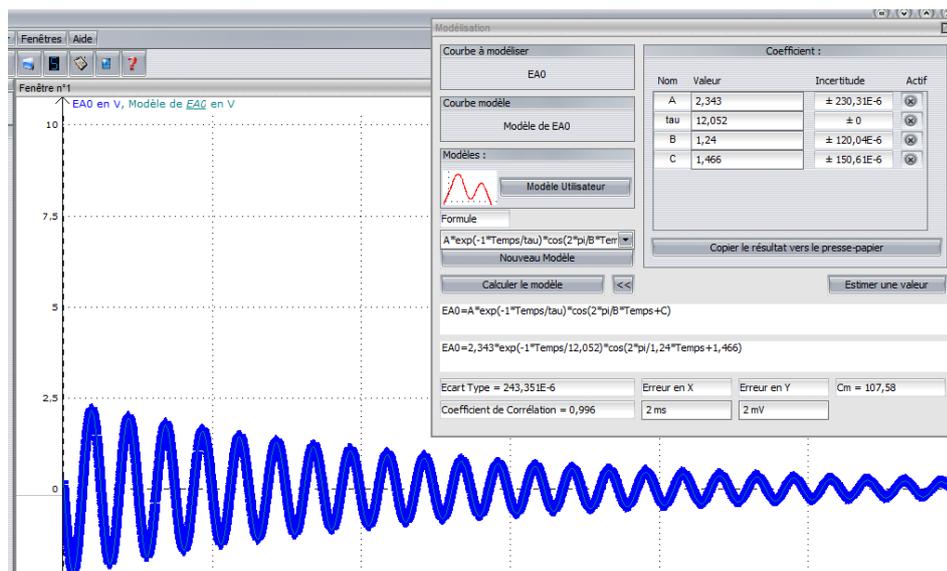


Figure 3 : Simulation effectuée sur LatisPro avec une fonction du type sinusoïdale amortie : $EA0 = A*\exp(-1*Temps/tau)*\cos(2*pi/B*Temps+C)$ (prise en compte des incertitudes sur LatisPro « élargie » le trait de la courbe expérimentale)

Diagramme de phase : $\dot{\theta}=f(\theta)$:

La figure 4 du diagramme des phases permet de mettre en évidence l'évolution du mouvement du pendule pesant. La trajectoire de phase tend vers un point qui correspond à l'état stable du pendule. On appelle ce point un attracteur. Pour le pendule simple, cet état correspond à une énergie cinétique nulle (vitesse nulle) et à une énergie potentielle minimale (point de la trajectoire le plus bas).

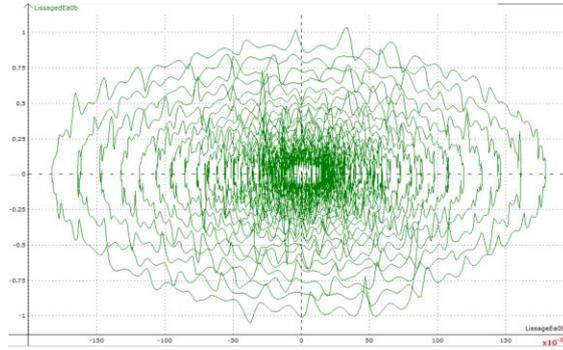


Figure 4 : Diagramme des phases ($\dot{\theta}=f(\theta)$) du pendule pesant avec amortissement fluide.

II) Bilan énergétique du système :

D'après le tableau 1, les énergies potentielles et cinétiques sont déterminés à partir de la variation d'angle θ et sa dérivée $\dot{\theta}$.

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} (\dot{\theta})^2$$

$$E_p = M_0 g l (1 - \cos(\theta))$$

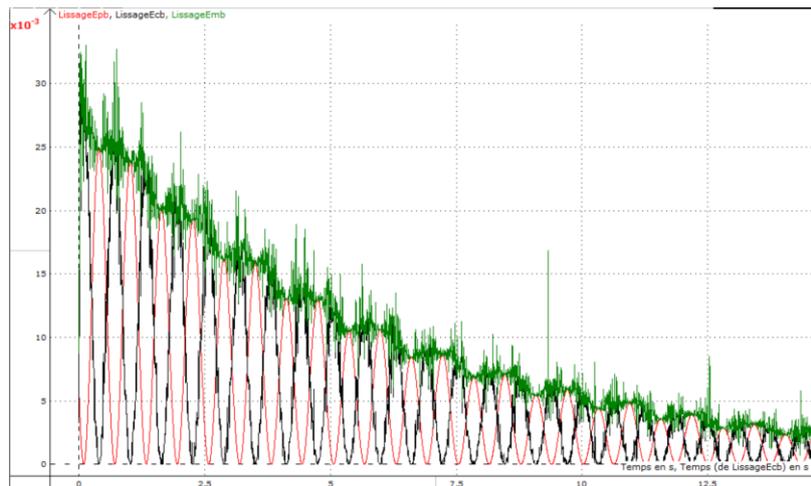


Figure 5 : Evolution des énergies cinétiques, énergies potentielles et énergies mécaniques au cours du temps. L'énergie mécanique décroît au cours du temps lié au travail des forces de frottement fluide.

Qualitativement, on observe que l'énergie mécanique diminue au cours du temps. La présence de force non conservative (ici les frottements fluides) justifie cette évolution.

Conclusion :

Les caractéristiques du pendule pesant ont été étudiées dans le cas des petites oscillations. Une valeur expérimentale de l'accélération de pesanteur a ainsi pu être déterminée. La numérisation du mouvement en tension permet par ailleurs une étude approfondie du mouvement du pendule pesant notamment via une analyse énergétique du mouvement. Pour poursuivre l'étude, la mise en évidence des anharmonicités pourra être effectuée.

Référence scripts Python : <http://www.tangentex.com/BibliothequeCodes.htm#Ind50>

Questions :

Comment relier coefficient d'amortissement expérimental et force de frottement visqueux par courant de Foucault ? Peut on trouver des valeurs tabulées ?

Annexes :

Feuille de calcul Latis Pro :

$Ea0b = (Ea0/2) * (10/180) * \pi$ //(Conversion Tension en angle (radian), bien noter la valeur d'angle initial)

LissageEa0b=Lissage(Ea0b;23)

dEa0b=Deriv(LissageEa0b)

LissagedEa0b=Lissage(dEa0b;23)

$Ecb = 0.5 * 0.0609 * (LissagedEa0b)^2$ // Calcul de l'énergie cinétique

LissageEcb=Lissage(Ecb;5)

$Epb = 0.8 * 9.81 * 0.19 * (1 - \cos(LissageEa0b))$ // Calcul de l'énergie potentielle

LissageEpb=Lissage(Epb;5)

$Emb = Epb + Ecb$ // Calcul de l'énergie mécanique du système

LissageEmb=Lissage(Emb;5)

Simulation Latis Pro :

$EA0 = A * \cos(2 * \pi / B * Temps + C)$

$EA0 = A * \exp(-1 * Temps / \tau) * \cos(2 * \pi / B * Temps + C)$