

LP 05 – LOIS DE CONSERVATION EN DYNAMIQUE

1^{er} juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L1

Bibliographie

✦ *LP 05 2020*, Clément de la Salle et Col-
léaux) → Merci

Prérequis

- PFD, TEC, TMC
- Systèmes de coordonnées
- Énergie mécanique
- Moment cinétique d'un solide

Expériences

☞ Illustration avec la chaise tournante

Table des matières

1	Quantités conservées et invariances	2
1.1	Énergie	2
1.2	Impulsion	3
1.3	Moment cinétique	3
2	Application : le problème à deux corps	3
2.1	Conservation de la quantité de mouvement	4
2.2	Invariance par rotation	4
2.3	Conservation de l'énergie	5
2.4	Le vecteur de Runge-Lenz	5
3	Questions et commentaires	6
3.1	Questions	6
3.2	Commentaires	6

Introduction

On a vu dans des cours précédents comment décrire la dynamique des points matériels. On fait pour cela appel à des outils comme la seconde loi de Newton ou le théorème du moment cinétique. Ces outils nécessitent de connaître précisément les forces ou les moments qui s'appliquent sur le point matériel, et mettent en jeu des équations différentielles qui ne sont pas toujours aisées ou possible à résoudre. On va chercher aujourd'hui une autre méthode, à travers l'étude des quantités conservées, pour décrire le mouvement d'un système matériel.

☛ Choc magnétique

On utilise des mobiles avec des aimants qui se repoussent au lieu d'un contact, illustré sur cette vidéo [YouTube](#). L'un s'arrête et l'autre repart à la même vitesse. Pour avoir cette information avec le PFD, ça a l'air difficile. Avec des lois de conservation c'est très commode

On va voir l'utilité pratique des lois de conservations en dynamique et esquisser le fait que les quantités conservées sont des principes plus généraux liés aux symétries du problème. L'objectif final sera de traiter le problème de Kepler.

1 Quantités conservées et invariances

On va considérer dans cette partie un système évoluant dans un référentiel galiléen et donc dans lequel tous les théorèmes vus en mécanique s'appliquent : PFD, TMC, TEC. On se place en particulier dans le cas où toutes les forces sont conservatives ainsi :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\nabla U(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

But : L'idée de cette partie est la suivante : Pour chaque grandeur conservée

- Faire le lien avec le cas d'un système isolé
- Montrer que de manière plus générale la conservation de la grandeur est due à une invariance dans le potentiel U .
- Donner quelques exemples.

1.1 Énergie

Le théorème de l'énergie cinétique nous indique que, dans le cas d'un système isolé, la variation d'énergie cinétique étant égale au travail des forces extérieures, celle-ci est nulle :

$$\Delta E_c = W = 0 \quad (1.2)$$

Par contre même si le système n'est pas isolé on peut dégager une condition pour que ce résultat reste vrai pour l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + U \quad (1.3)$$

Il faut une *invariance temporelle* :

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) = U(x) \quad (1.4)$$

ou on s'est placé à une dimension pour la dernière égalité. En effet on a alors :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{dU}{dx} \right) dx = - \int_{U_1}^{U_2} dU \quad (1.5)$$

$$W = U_1 - U_2 \quad (1.6)$$

On a donc :

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta U = W + U_2 - U_1 = 0 \quad (1.7)$$

L'énergie mécanique est donc constante si le potentiel est invariant dans le temps !

Si le potentiel n'avait pas été invariant on aurait eu :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (1.8)$$

Exemple :

Montagnes russes : lorsque le wagon monte il perd de l'énergie cinétique et gagne de l'énergie potentielle et réciproquement lorsqu'il descend. Le profil de $U(x)$ est le même que $z(x)$ car $U = mgz$. Dans cet exemple l'invariance temporelle correspond au fait que le potentiel $U(x)$ reste toujours le même dans le temps.

1.2 Impulsion

La seconde loi de Newton implique que la quantité de mouvement d'un système isolé est toujours conservée :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad (1.9)$$

De même il existe un cadre plus général ou dans lequel un système non isolé a tout de même sa quantité de mouvement constante. Dans un cas à une dimension on a :

$$\frac{dp_x}{dx} = F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (1.10)$$

Ainsi si le potentiel U est *invariant par translation* selon x on a $\frac{dU}{dx} = 0$ et ainsi l'impulsion du système reste constante !

La conservation de l'impulsion est donc liée à l'invariance par translation.

Dans un cadre plus général à trois dimensions, l'invariance par translation dans une direction implique la conservation de l'impulsion projetée sur cet axe.

Exemple :

Dans le cas du choc magnétique on voit que le potentiel est invariant par translation, la quantité de mouvement totale du système se conserve. (de plus il est également invariant dans le temps ainsi l'énergie totale se conserve également).

1.3 Moment cinétique

De même que précédemment, le théorème du moment cinétique nous indique que le moment cinétique d'un système isolé se conserve :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad (1.11)$$

Dans ce cas là, la condition pour qu'un système non isolé ait un moment cinétique constant est l'invariance du potentiel par *rotation*. Dans un problème avec rotation, les coordonnées judicieuses sont les coordonnées sphériques $U = U(r, \theta, \phi, t)$ et si on suppose invariance par rotation, on a $U = U(r, t)$.

Ainsi la force qui s'applique est :

$$\vec{F} = F\hat{e}_r = m\vec{a} \implies \vec{a} = a\hat{e}_r \quad (1.12)$$

Or on peut exprimer la variation du moment cinétique comme :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad (1.13)$$

Plus généralement, l'invariance par rotation autour d'un axe implique la conservation du moment cinétique selon cette axe.

Exemple :

Le patinage artistique : [vidéo ici](#). Le moment d'inertie d'un solide évolue en $I \propto md^2$ avec m la masse du solide et d sa distance par rapport à son axe de rotation. Le moment cinétique est alors donné par :

$$\vec{L} = I\vec{\Omega} \quad (1.14)$$

Ainsi lorsque la patineuse artistique replie les bras, I diminue et pour conserver le moment cinétique (en particulier sa norme) on observe une accélération, Ω augmente.

On peut également faire l'exemple de la chaise tournante + roue de vélo.

2 Application : le problème à deux corps

Dans toute cette deuxième partie, on va illustrer nos propos sur l'exemple d'un système de deux corps interagissant par l'interaction gravitationnelle. Le système est considéré comme pseudo-isolé. Sur le schéma à faire au tableau, on pose les masses en des points M_1 et M_2 , l'origine en O et les vecteurs *unitaires* de 1 vers 2 $\hat{r}_{12}$ et de 2 vers 1 $\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$. Les vecteurs $\vec{OM}_1$ et $\vec{OM}_2$ sont notés $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$. Les masses sont m_1 et m_2 .

La première masse est soumise à la seule force $\vec{F}_{21}$ qui est l'attraction gravitationnelle de la seconde masse :

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{21}. \quad (2.1)$$

De même, la seconde masse est soumise à la force $\vec{\mathbf{F}}_{12}$:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12}. \quad (2.2)$$

On veut montrer comment les invariances virent les degrés de liberté : on passe de 12 à 6 puis 2 et enfin 1 !.

2.1 Conservation de la quantité de mouvement

Les forces prises en compte dans ce système dérivent d'un potentiel

$$U = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}} \quad (2.3)$$

qui ne dépend que de r_{12} , distance entre les masses définie par $r_{12} = \|\vec{\mathbf{OM}}_2 - \vec{\mathbf{OM}}_1\| = \|\vec{\mathbf{M}}_1\vec{\mathbf{M}}_2\|$.

Une translation spatiale *globale* du système laisse invariant r_{12} et donc U . On peut donc utiliser la première partie pour directement obtenir la conservation de l'impulsion *globale* du système :

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_1 = m_2\vec{\mathbf{v}}_2 = \text{cste}. \quad (2.4)$$

Comme ça ressemble beaucoup au barycentre des masses, on va s'y intéresser. Le barycentre G des masses est défini par $(m_1 + m_2)\vec{\mathbf{OG}} = m_1\vec{\mathbf{OM}}_1 + m_2\vec{\mathbf{OM}}_2$. si on dérive ça on tombe sur

$$(m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_G = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2, \quad (2.5)$$

que l'on identifie avec l'expression obtenue : on a $\vec{\mathbf{v}}_G = \text{cste}$. Le centre de gravité est en translation rectiligne uniforme, le référentiel barycentrique est donc galiléen, et on va pouvoir se placer dans celui-ci par la suite.

On peut écrire dans ce référentiel :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}_1 &= \vec{\mathbf{OM}}_1 - \vec{\mathbf{OG}} & \vec{\mathbf{r}}_2 &= \vec{\mathbf{OM}}_2 - \vec{\mathbf{OG}} \\ &= (\vec{\mathbf{OM}}_1 - \vec{\mathbf{OM}}_2)\frac{m_2}{m_1 + m_2} & &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{\mathbf{r}}. \\ &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{\mathbf{M}}_1\vec{\mathbf{M}}_2 \\ &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

On a noté $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{M}}_1\vec{\mathbf{M}}_2$

La dynamique du système s'obtient donc en étudiant celle d'un point matériel fictif situé en $\vec{\mathbf{r}}$, on lui applique donc le PFD

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} &= \vec{\mathbf{F}}_{12} \\ m_2 \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} &= \vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12} \\ m_2m_1 \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} &= (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{F}}_{21} \end{aligned}$$

La dynamique du point fictif est donc déterminée par le PFD, en prenant une masse fictive $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ qui est la masse réduite du système. On étudie donc une masse μ fictive soumise à un potentiel $U = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}$. On pourra alors en déduire toute la physique du système.

On peut montrer que pour le système Terre-Soleil, le barycentre est tout près du Soleil.

2.2 Invariance par rotation

Le potentiel $U(r)$ que l'on vient de définir est radial, il y a donc invariance par rotation. Et qui dit invariance par rotation dit conservation du moment cinétique :

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \wedge \mu\vec{\mathbf{v}} = \text{cste} \quad (2.6)$$

Le vecteur $\vec{L}$ est constant, or à tout instant $(\vec{r}, \vec{v})$ est dans le plan orthogonal à $\vec{L}$ donc le mouvement est plan.

La norme de ce vecteur est aussi constante donc $\|\vec{L}\| = \mu r^2 \dot{\theta}$ est une constante notée μC avec $C = r^2 \dot{\theta}$. Or l'aire balayée par le point est $dA = \frac{1}{2} \|\vec{r} \wedge \vec{v} dt\|$ donc

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2\mu} \|\vec{L}\| = cste = \frac{C}{2} \quad (2.7)$$

On retrouve la deuxième loi de Kepler : pour le système Terre-Soleil, le rayon issu du Soleil balaye des aires égales pendant des temps égaux (loi des aires).

2.3 Conservation de l'énergie

Encore une fois on réutilise notre première partie : l'invariance temporelle implique la conservation de l'énergie du système.

On a montré que l'on pouvait écrire le problème à deux corps comme le problème d'une particule représentée par μ et $\vec{r}$, l'énergie mécanique totale du système s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{Gm_1 m_2}{r} \quad (2.8)$$

$$E_m = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \left(\frac{1}{2} \mu \frac{C}{r^2} - \frac{Gm_1 m_2}{r} \right) \quad (2.9)$$

$$E_m = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}}(r) \quad (2.10)$$

Où $E_{p \text{ eff}}(r)$ représente l'énergie potentielle effective à laquelle est soumise la particule. Cette énergie, comme tout le problème maintenant ne dépend plus que de r . On a donc un problème à 1 D, bien plus facile à étudier.

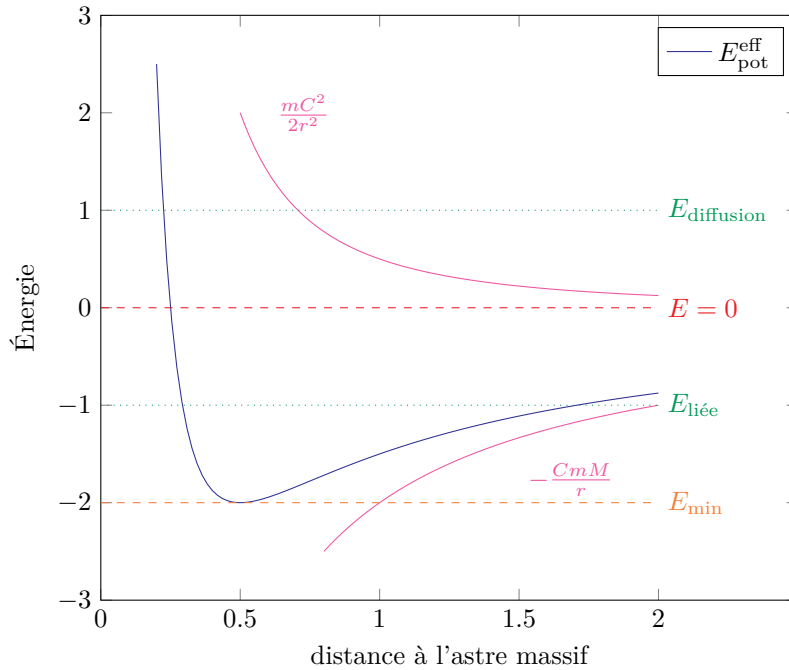


FIG. 1 : Potentiel effectif en fonction de la masse centrale

On parle d'état lié, d'état de diffusion.

2.4 Le vecteur de Runge-Lenz

En faisant le produit vectoriel du PFD avec le moment cinétique et en utilisant sa conservation on obtient :

$$m_1 \ddot{\vec{r}} \wedge \vec{L} = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v} \wedge \vec{L}) = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} L \hat{e}_\theta = m_1 Gm_1 m_2 k \dot{\theta} \hat{e}_\theta = m_1 Gm_1 m_2 \dot{\hat{e}}_r \quad (2.11)$$

En passant tous les termes du même côté et en divisant par m_1 on trouve :

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \wedge \vec{L} - m_1 m_2 G \hat{e}_r) = \vec{0} \quad (2.12)$$

On note donc :

$$\vec{A} = \vec{v} \wedge \vec{L} - G m_1 m_2 \hat{e}_r \quad (2.13)$$

que l'on nomme *vecteur de Runge-Lenz* et qui est conservé comme on vient de le démontrer.

Ce vecteur est utile pour trouver rapidement l'équation des trajectoires. En introduisant l'angle θ entre $\vec{A}$ et $\vec{r}$ on a :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = A r \cos \theta = \vec{r} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{L}) - m_1 m_2 G r \quad (2.14)$$

En permutant le produit mixte on trouve :

$$A r \cos \theta = L^2 - m_1 m_2 G r \quad (2.15)$$

On obtient alors la définition d'une conique :

$$r = \frac{L^2 / m_1 m_2 G}{1 + \frac{A}{m_1 m_2 G} \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (2.16)$$

Où on a respectivement $e = A / m_1 m_2 G$ et $p = L^2 / m_1 m_2 G$ nommés respectivement *excentricité* et *paramètre* de l'ellipse. Selon la valeur de e on peut donner la forme de la trajectoire :

- $e = 0$ cercle de rayon p
- $e < 1$ ellipse
- $e = 1$ parabole
- $e > 1$ hyperbole

On peut d'ailleurs montrer que $E_m = G \frac{m_1 m_2}{2\mu} (e^2 - 1)$. Pour $E_m < 0$ on a une trajectoire non seulement bornée mais surtout fermée.

Conclusion

On a donc vu dans cette leçon que les lois de conservation sont des outils très puissants qui permettent d'extraire des informations sur la trajectoire d'un système matériel voire de le résoudre entièrement. Elles sont primordiales dans les problèmes où on ne connaît que mal la nature des forces mises en jeu, comme dans le cas des chocs. De plus, les lois de conservations sont toujours reliées à une symétrie interne du problème, c'est un résultat général et fondamental de la physique théorique moderne qui l'utilise abondamment.

Les lois de conservations ont également un caractère prédictif car elles ont permis de postuler l'existence du neutrino.

En 1930, la communauté des physiciens est confrontée à une énigme : la désintégration β ne semble pas respecter les lois de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et du spin. Pour satisfaire ces principes, Pauli postule l'existence d'une nouvelle particule, de charge électrique nulle, qu'il nomme initialement neutron (pour particule neutre, le neutron n'ayant pas été découvert), et dont il estime la masse au moins 100 fois inférieure à celle du proton. Le physicien italien Edoardo Amaldi l'appelle neutrino (en italien : petit neutron). Par ailleurs, l'étude du bilan de moment cinétique dans cette même réaction permet déjà de déterminer quel spin devrait avoir cette nouvelle particule :

$$n \longrightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2.17)$$

Le neutrino (en fait l'antineutrino électronique), qui accompagne la formation d'un électron (par conservation du nombre leptonique lors de la transformation d'un neutron en proton) est découvert expérimentalement en 1956, par Frederick Reines et Clyde Cowan, auprès d'un réacteur nucléaire. Ceci illustre la puissance des lois fondamentales de conservation.

3 Questions et commentaires

3.1 Questions

•

3.2 Commentaires

•