

LP 06 – CINÉMATIQUE RELATIVISTE

1^{er} juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L3

Bibliographie

➤ *LP 06 2020*, Cléments de la Salle et Col-léaux → Les gars surs

Prérequis

- Lois de Newton
- Électromagnétisme
- Interférences lumineuses

Expériences

- ☞ Expérience de Michelson et Morley
- ☞ Visualisation de l'effet Doppler relativiste sur l'étoile double Albireo
- ☞ Désintégration des muons dans l'atmosphère

Table des matières

1	Principes de la relativité	2
1.1	Incompatibilité entre mécanique classique et électromagnétisme	2
1.2	Postulats de la relativité	3
1.3	Définitions	3
2	Conséquences cinématiques	3
2.1	Notion de simultanéité	3
2.2	Dilatation du temps	4
2.3	Contraction des distances	5
3	Autour du boost de Lorentz	6
3.1	Boost de Lorentz	6
3.2	Composition des vitesses	7
3.3	Invariance	7
4	Questions et commentaires	8
4.1	Questions	8
4.2	Commentaires	8

Introduction

1 Principes de la relativité

Apparemment toute cette partie y a moyen de la faire passer en intro sinon c'est chaud.

1.1 Incompatibilité entre mécanique classique et électromagnétisme

En mécanique classique, lorsqu'un référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement rectiligne uniforme à $\vec{v}$ par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}$, on peut lier la position d'un objet d'un référentiel à un autre par le boost de Galilée

$$\vec{OM} = \vec{OM}' + \vec{v}t. \quad (1.1)$$

On peut en déduire la loi de composition des vitesses :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{u}' + \vec{v}. \quad (1.2)$$

C'est la vision intuitive qu'on a de la composition des vitesses : lorsque j'avance à $\vec{u}'$ dans un train à $\vec{v}$, un observateur me voit me déplacer à $\vec{u}' + \vec{v}$. À la fin du XIX^{ème} siècle, les équations de Maxwell et l'avènement de l'électromagnétisme indiquent qu'une onde électromagnétique se déplace à la vitesse c , indépendamment du référentiel choisi. Ceci rentre en contradiction avec la vision précédente.

La mécanique est aussi mise à mal par les résultats de l'expérience de Fizeau de 1851, illustrée en [Figure 1](#).

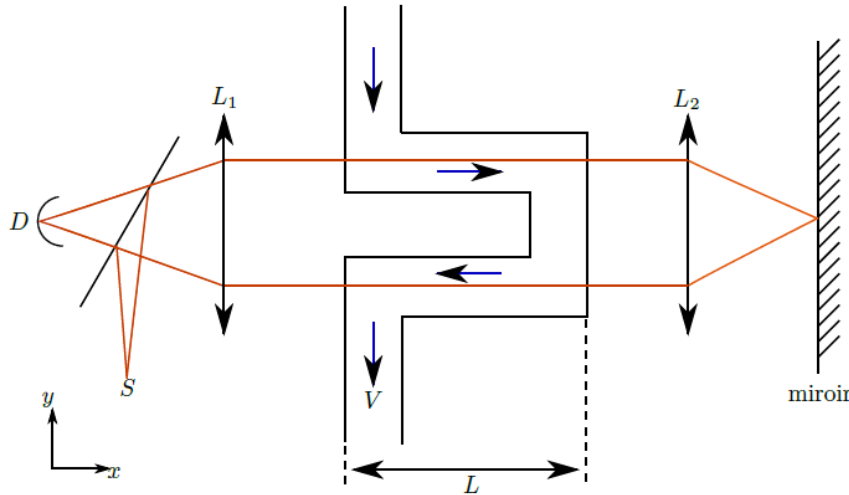


FIG. 1 : Schéma de l'expérience de Fizeau

Il faut être bien précis sur l'expérience de Fizeau : c'est en lumière blanche au contact optique.

L'expérience de Fizeau consiste à faire interférer deux faisceaux lumineux passant par deux bras d'un circuit d'eau. Dans l'un de ses bras, l'eau circule à la vitesse $\vec{V} = V\hat{x}$, tandis que dans l'autre bras, l'eau circule à la vitesse $\vec{V} = -V\hat{x}$. La lumière se déplace à la célérité c/n dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{eau}}$ et donc à la célérité $c^\pm = c/n \pm V$ dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ si l'on suppose juste les transformations de Galilée. On s'attendrait alors à un retard de temps de parcours entre les deux faisceaux :

$$\Delta t = 2L \left(\frac{1}{c^-} - \frac{1}{c^+} \right) \simeq 4LV \frac{n^2}{c^2} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{V}{c} \right)^2 \right). \quad (1.3)$$

Ce résultat n'est pas en accord avec ce que trouva Fizeau :

$$\Delta t \simeq 4LV \frac{1}{c^2(n^2 - 1)} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{V}{c} \right)^2 \right) \quad (1.4)$$

On peut aussi parler de l'expérience célèbre de Michelson et Moley. Les possibilités qui s'offrent aux physiciens de l'époque sont alors les suivantes :

- Il faut revoir la mécanique et les lois de Newton

- Il faut revoir l'électromagnétisme et les équations de Maxwell.

À l'époque, la communauté scientifique penchait pour la première solution, surtout que l'hypothèse d'un référentiel privilégié (l'éther) était populaire (Maxwell s'en est même servi pour ajouter le terme de « courant de déplacement »). Il a donc fallu la tester, et c'est ce qu'ont fait Michelson et Morley dans leur très célèbre expérience d'interférométrie qui valut à Michelson le prix Nobel en 1907 d'ailleurs.

↓ *La sérieuse remise en cause de l'existence de l'éther, grâce à cette expérience, a permis à Einstein de poser les bases de la relativité en modifiant donc les lois de la mécanique telles qu'on les connaissait.*

1.2 Postulats de la relativité

1. Les lois de la physique (comme l'équation de d'Alembert pour les ondes lumineuses) sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. C'est une généralisation de la première loi de Newton, cela ne contredit donc pas notre intuition.
2. La vitesse de la lumière est identique dans tous ces référentiels (là par contre c'est totalement contre-intuitif).

Dans le cadre de l'étude cinématique, nous allons plus particulièrement nous intéresser à ce deuxième point. L'étude des trajectoires se fait plutôt dans le cadre de la dynamique relativiste.

1.3 Définitions

Référentiel Il s'agit, comme en mécanique classique, d'une origine à laquelle on associe trois axes. La différence, c'est qu'on lui ajoute une horloge qui mesure le temps propres dans ce référentiel :

$$\mathcal{R}_{\text{Galilée}}(O, x, y, z) \mapsto \mathcal{R}_{\text{Einstein}}(O, x, y, z, t) \quad (1.5)$$

Espace-temps Il s'agit de l'espace mathématique dans lequel on décrit les événements. Il est de dimension 4 : 3 dimensions spatiales et une dimension temporelle.

Événement Il s'agit d'un point de l'espace-temps, repéré par quatre coordonnées (x,y,z,t). C'est comme dire « Rendez-vous demain 8 h devant le lycée. »

↓ *Puisqu'on part sur quelque chose de contre-intuitif, on va essayer au travers d'un exemple simple, de voir ce que ces principes impliquent et pourquoi ils sont cohérents.*

2 Conséquences cinématiques

2.1 Notion de simultanéité

En mécanique classique c'est facile : si deux événements se produisent au même instant t ils sont simultanés. Mais puisqu'ici la notion de temps est relative au référentiel considéré, comment adapter cette notion ?

Considérons un train de longueur L se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ constante. Un observateur situé au centre de ce train lance deux photons en même temps : le premier photon va vers l'avant et le deuxième vers l'arrière. On note A l'événement d'arrivée du premier photon au bout du train et B celui d'arrivée du second photon. On va décrire ces événements dans le référentiel R' du train ou bien dans le référentiel R terrestre supposé inertiel (donc celui du train l'est aussi).

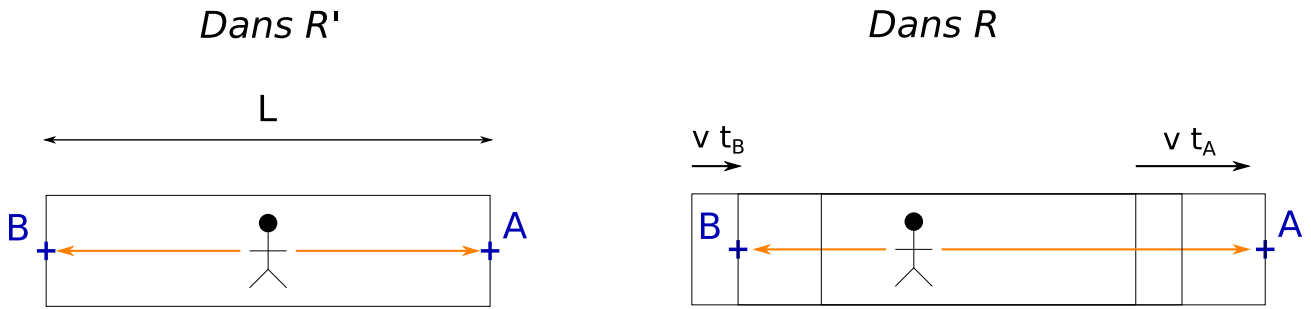


FIG. 2 : Simultanéité en relativité restreinte

- Dans R' :

$$t'_A = t'_B = \frac{L}{2c} \quad (2.1)$$

Les événements sont simultanés (l'observateur voit arriver les deux photons en même temps).

- Dans R :

$$t_A = \frac{L/2 + vt_B}{c} \Rightarrow t_A = \frac{L/2}{c - v} \quad (2.2)$$

$$t_B = \frac{L/2 - vt_B}{c} \Rightarrow t_B = \frac{L/2}{c + v} \neq t_A \quad (2.3)$$

Ainsi un observateur situé à l'extérieur du train verra un photon arriver à destination avant l'autre alors que pour celui dans le train ils arrivent tout deux en même temps. Ainsi, la notion même de simultanéité dépend du référentiel d'observation.

On pose alors les variables :

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (2.4)$$

Et on peut ainsi exprimer :

$$t_A - t_B = \frac{\beta\gamma^2}{c} L \quad (2.5)$$

On remarque que pour $v \ll c$ (cas classique) on a $\beta \simeq 0$ et $\gamma \simeq 1$. On retrouve le cas classique où $t_A - t_B = 0$.

2.2 Dilatation du temps

Cette fois ci l'observateur lance un photon du sol vers le toit du train et celui-ci rebondit sur un miroir pour revenir à son emplacement initial dans le train.

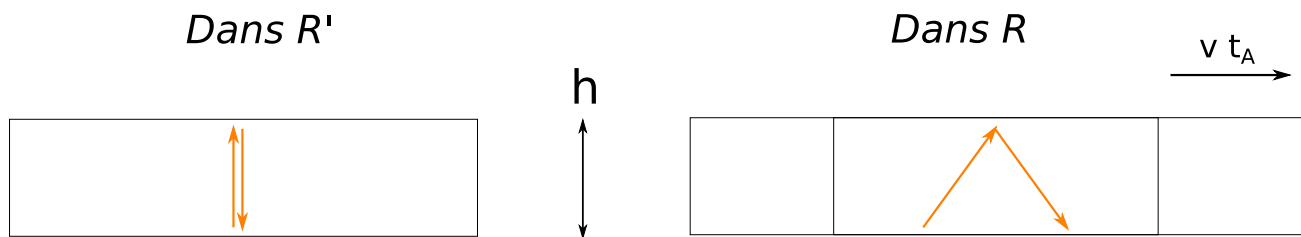


FIG. 3 : Dilatation du temps

- Dans R' :

$$\Delta t' = \frac{2h}{c} \quad (2.6)$$

- Dans R :

$$(c\Delta t)^2 = (2h)^2 + (v\Delta t)^2 \Rightarrow (\Delta t)^2 = \frac{(2h)^2}{c^2 - v^2} = \frac{(\Delta t')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.7)$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t' \quad (2.8)$$

En voyant cette relation on pourrait penser que le temps s'écoule plus lentement en dehors du train. Mais dans le référentiel du train, c'est le sol qui bouge à la vitesse $\vec{v}$. Donc en faisant le même raisonnement on se dit que le temps s'écoule plus lentement dans le train... En fait il n'y a pas de paradoxe : tant que les deux référentiels sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, le temps semblera toujours passer plus vite dans le référentiel extérieur. Pour pouvoir comparer l'évolution temporelle des deux référentiels il faudrait qu'ils redeviennent immobiles l'un par rapport à l'autre ce qui implique une brisure de symétrie (au moins un des référentiels doit cesser d'être inertiel pendant un moment).

Ce que l'on vient de voir est directement relié à ce qui est appelé paradoxe des jumeaux.

Ce phénomène de dilatation du temps est vérifié expérimentalement, notamment en 1963 (Frisch et Smith) qui étudièrent le temps de vie des muons émis dans la haute atmosphère. Ils constatèrent un temps de vie mesuré dans le référentiel du laboratoire plus grand que celui prédit par la physique non relativiste car les muons sont ultra-relativistes ($v \sim 0.995c$). Le facteur entre les temps de vie correspondait au facteur de Lorentz γ .

2.3 Contraction des distances

Si on manque de temps on peut sauter la démonstration.

Cette fois ci on suppose que l'observateur se situe à l'arrière du train, lance un photon vers l'avant ou il rebondit sur un miroir. Le photon est réceptionné à l'emplacement initial. On note A, B, C les événements de lancer, rebond et réception du photon.

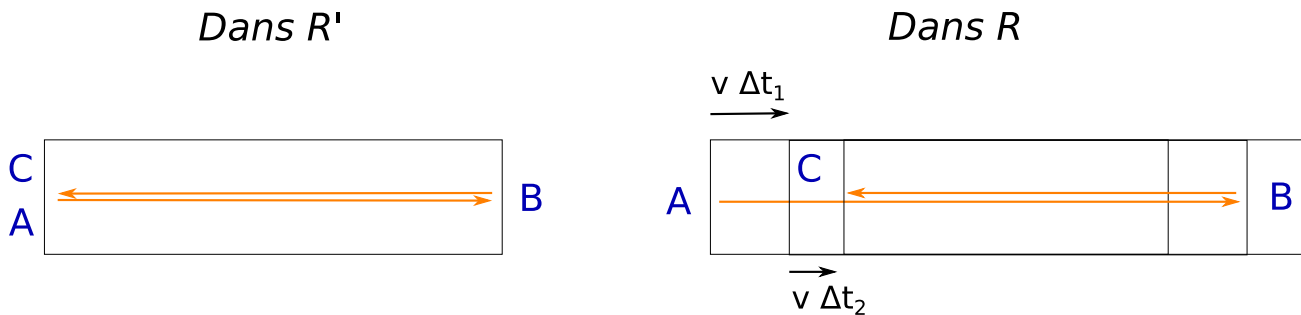


FIG. 4 : Dilatation des distances

- Dans R' :

$$2L' = 2c\Delta t' \quad (2.9)$$

- Dans R' :

$$L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1 \quad (2.10)$$

$$L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2 \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \gamma^2 \frac{2L}{c} \quad (2.12)$$

Or on a $\Delta t = \gamma\Delta t'$ donc finalement on a :

$$L' = \gamma L \Rightarrow L = \frac{1}{\gamma} L' < L' \quad (2.13)$$

Ainsi un objet en mouvement paraît contracté vu de l'extérieur.

Remarque :

On parle de *dilatation* du temps et de *contraction* des longueurs car on se place du point de vue de l'observateur dans le train.

Maintenant qu'on s'est familiarisés avec les conséquences contre-intuitives de la relativité, on va faire un pas de plus dans le formalisme utilisé afin de décrire plus facilement les phénomènes.



3 Autour du boost de Lorentz

3.1 Boost de Lorentz

On considère un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}$ suivant l'axe x . En mécanique classique, on peut exprimer la transformation des coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned}x &= vt + x' \\ t &= t'.\end{aligned}$$

Suivant les considérations précédentes, on peut lier les coordonnées dans chacun des référentiels :

$$\begin{aligned}x &= vt + \frac{1}{\gamma}x' \\ \text{donc } x' &= -vt' + \frac{1}{\gamma}x.\end{aligned}$$

En effet, $\mathcal{R}$ voit $\mathcal{R}'$ partir à $\vec{v}$ tandis que $\mathcal{R}'$ voit $\mathcal{R}$ partir à $-\vec{v}$. Chaque référentiel voit l'autre contracté, comme expliqué précédemment, d'où le facteur $\frac{1}{\gamma}$.

On peut également écrire :

$$\begin{aligned}ct' &= \gamma ct - \beta\gamma x \\ x' &= -\beta\gamma ct + \gamma x.\end{aligned}$$

On peut résumer ça sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

C'est ce qu'on appelle un *boost de Lorentz*, qui se substitue au boost de Galilée, on pose :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

On peut alors remarquer que :

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Le boost de Lorentz est l'outil mathématique pour traduire la relation entre les coordonnées dans deux référentiels. On a fait aucune hypothèse sur ces référentiels, cette relation est valable pour tout référentiel et le boost de Lorentz est universel. La forme de l'inverse est logique car elle consiste à remplacer $\vec{v}$ par $-\vec{v}$. On retrouve bien le boost de Galilée quand $\beta \ll 1$.

▮ On peut maintenant chercher la loi de composition des vitesses relativiste.



3.2 Composition des vitesses

On considère un objet se déplaçant à $\vec{u}' = \frac{x'}{t'}$ dans $\mathcal{R}'$, cherchons l'expression de sa vitesse dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{t} \\ &= c \frac{x}{ct} \\ &= c \frac{\beta ct' + x'}{ct' + \beta x'} \\ \boxed{u} &= \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \end{aligned}$$

Remarques

- On retrouve bien la composition classique des vitesses vue en introduction lorsque $\beta \ll 1$.
- Si $u' = c$, on retrouve alors $u = c$ donc la vitesse de la lumière est bien indépendante du référentiel. (C'est un postulat, ça a intérêt à être vrai)
- On peut faire un retour sur l'expérience de Fizeau.
- Si $u' < c$ alors $u < c$. La vitesse de la lumière apparaît comme vitesse limite.

3.3 Invariance

On peut également montrer que lors d'une transformation de Lorentz, une grandeur est conservée, il s'agit du *carré relativiste* :

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 \quad (3.4)$$

Cet intervalle d'espace-temps est conservé au cours d'une transformation de Lorentz :

$$\Delta s^2 = (\gamma c\Delta t' + \beta\gamma\Delta x')^2 - (\beta\gamma\Delta t' + \gamma\Delta x')^2 = \Delta s'^2 \quad (3.5)$$

Remarques

- Comme le boost de Lorentz représente la transformation des vitesses pour deux référentiels quelconque, le carré relativiste est invariant par changement de référentiel.
- Cette invariance est liée à l'invariance de l'équation de d'Alembert électromagnétique, on aurait pu à partir de cette invariance déduire les postulats de départ
- Pour un photon, $\Delta s = 0$, ce qui se traduit par des droites à 45° sur le diagramme de Minkowski. On peut parler un peu de ce diagramme et du cône de lumière

Si on a du temps on peut parler d'effet Doppler relativiste ou le paradoxe du train dans le tunnel.

Conclusion

La théorie de la relativité restreinte a confirmé les lois de Maxwell tout en montrant que la cinématique galiléenne n'est qu'une limite à faible vitesse des lois fondamentales de la physique.

La relativité prévoit de nombreux phénomènes contre-intuitifs qui ont pourtant été démontré expérimentalement de façon éclatante. Il s'agit aujourd'hui d'un cadre théorique de base en physique fondamentale.

La dilatation des temps assure que l'intégrale du temps propre entre deux événements est maximale pour une horloge immobile, une propriété qui nous sera fort utile pour formuler un principe variationnel pour la dynamique relativiste, qui fera l'objet d'une prochaine leçon ou nous adapterons les lois de Newton à la relativité restreinte.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-