LP 07 – Dynamique relativiste

13 avril 2021
Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau :

Bibliographie

✍ , $\longrightarrow$

Prérequis

- Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique
- Cinématique relativiste

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

Dans un précédent cours on a décrit la cinématique des particules relativistes. Elle repose fondamentalement sur les transformations de Lorentz. On souhaite maintenant décrire des interactions entre particules, il nous faut donc une théorie de la dynamique relativiste. Cela va nous permettre de décrire le domaine de la physique des hautes énergies.

1 Vers un PFD relativiste

1.1 Rappels et définitions

Dans le cours de cinématique relativiste on a vu la définition du quadrivecteur position :

$$X^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

On a également vu la notion de temps propre τ qui est le temps dans le référentiel de la particule. Si t est le temps dans le référentiel au repose, on a :

$$\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau \tag{2}$$

Avec :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

On peut ainsi définir le quadrivecteur vitesse :

$$U^\mu = \frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ainsi on peut définir naturellement le quadrivecteur impulsion :

$$P^\mu = mU^\mu = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m \vec{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \gamma \vec{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Intéressons nous à la grandeur que l'on a noté E. On a $E = \gamma mc^2$, si on fait un développement limité pour $v \ll c$ on trouve :

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + ... \tag{6}$$

Le second terme s'identifie facilement comme étant l'énergie cinétique de la particule ! Le premier terme correspond à la bien connue équivalence masse-énergie ! C'est l'énergie de la particule au repos, appelée énergie de masse. E représente donc bien l'énergie de la particule.

On appelle ainsi P^μ le quadrivecteur énergie-impulsion.

La pseudo-norme de ce quadrivecteur est un invariant relativiste, on a :

$$P^\mu P_\mu = m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \tag{7}$$

Ainsi on peut écrire :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{8}$$

Remarques :

- En relativité restreinte seule la conservation de l'énergie reste vraie. L'équivalence masse-énergie met en effet en défaut la conservation de la masse.
- Ordre de grandeur pour une réaction chimique : combustion de H_2 par O_2. Pour une mole de réactifs on a une énergie libérée $\Delta E = 241\,\text{kJ}$ ainsi on a $\Delta m = \Delta E/c^2$ et 1 mole d'eau pesant 18 g on a une variation relative de masse $\dfrac{\Delta m}{m} \sim 10^{-10}$. Cette variation est trop faible pour être mesurée. Ainsi dans les échelles d'énergie classiquement considérées la conservation de la masse peut être considérée comme vraie.

1.2 Quadrivecteur force

Dans le référentiel (R) galiléen comme $\vec{\mathbf{p}} = \gamma m \vec{\mathbf{v}}$, on a

$$\vec{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

On définit alors un quadrivecteur quadriforce en employant uniquement des quadrivecteurs et des scalaires relativistes (P^μ et τ) comme

$$\boxed{F^\mu = \frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau}} \tag{10}$$

Identifions les composantes de ce quadrivecteur dans le référentiel (R) d'étude. La partie spatiale vaut :

$$F^i = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma f^i \tag{11}$$

La partie temporelle vaut alors

$$F^0 = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma^4 m}{c}\vec{\mathbf{v}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

Or

$$\vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \gamma^3 m \vec{\mathbf{v}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

Donc

$$F^0 = \gamma \vec{\mathbf{f}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} \tag{14}$$

D'où

$$\boxed{F^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c}\vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \\ \gamma \vec{\mathbf{f}} \end{pmatrix}} \tag{15}$$

On remarque que la partie temporelle de la quadriforce traduit le théorème de la puissance cinétique, E est bien l'énergie du système. On vérifie aisément que la limite $v \ll c$ donne le PFD et le TPC classiques.

2 Collisions relativistes

On dit que deux particules rentrent en collision lorsquelles subissent une variation de vitesse dans une zone quasi ponctuelle de lespace et du temps. On distingue deux cas de collision :

- Collision élastique : Le nombre et la nature des particules sont conservées au cours du choc.
- Collision inélastique : L'état interne des particules est modifié. Après le choc il peut y avoir de nouvelles particules.

De façon générale, l'étude des chocs relativistes se fera à l'aide des lois de conservation : conservation de l'énergie et de l'impulsion du système.

Le cas inélastique entre dans le cadre de la relativité restreinte, l'équivalence masse-énergie permettant au système de changer de masse au cours de la collision.

On va étudier ici le cas de la collision inélastique.

On considère ainsi le cas d'une particule 1 de masse m_1, allant à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans le référentiel R du laboratoire galiléen entrant en collision avec une particule 2 de masse m_2 immobile dans ce même référentiel. On étudie le choc de ces deux particules donnant un nombre indéterminé i de particules. Le système que l'on considère est isolé, il y a donc conservation du quadrivecteur énergie-impulsion.

La question que l'on peut se poser est la suivante : y a-t-il une condition nécessaire à l'observation d'un tel choc ?

Dans le référentiel R du laboratoire on sait que l'énergie avant la collision est :

$$E = E_1 + E_2 = m_1 c^2 + E_{c1} + m_2 c^2 \tag{16}$$

Après le choc, on a :

$$E = \sum_i E_i \tag{17}$$

On va chercher l'énergie minimale E_{c1} permettant d'observer le choc. Dans le référentiel R, l'impulsion initiale est non nulle ainsi l'impulsion finale également. On peut seulement écrire :

$$\sum_i E_i > \sum_i m_i c^2 \tag{18}$$

Pour pouvoir trouver un cas d'égalité on va passer dans le référentiel du centre de masse R^* dans lequel l'impulsion initiale est nulle.

On note E^* l'énergie dans le référentiel R^*. Dans R on peut écrire :

$$P^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E_1 + m_2 c^2}{c} \\ \vec{\mathbf{p_1}} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Et dans R^* on a :

$$P^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \tag{20}$$

La conservation de la norme du quadrivecteur énergie-impulsion implique l'égalité suivante :

$$\frac{E^{*2}}{c^2} = (E_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 \tag{21}$$

Or on a :

$$E^* \geq \sum_i m_i c^2 \tag{22}$$

En utilisant ces deux équation on trouve que :

$$(E_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 \geq \sum_i \left(m_i c^2\right)^2 \tag{23}$$

Or $E_1 = m_1 c^2 + E_{c1}$ et $E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4$.

Ainsi après quelques calculs on arrive à :

$$E_{c1} \geq \frac{\left(\sum_i m_i\right)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2 m_2} c^2 \tag{24}$$

On a l'existence d'une énergie de seuil pour de tels chocs.

Faisons une estimation d'ordre de grandeur d'énergie nécessaire à un de ces chocs, par exemple pour la création d'une paire de proton anti-proton à partir de la collision de deux protons soit :

$$p + p = p + p + (p, \bar{p}) \tag{25}$$

Dans ce cas là l'énergie de seuil est de 5.63 GeV. Pour un proton cela revient à l'accélérer à 99.6 % de la vitesse de la lumière. Cela est une très haute énergie. L'étude de ces chocs requièrent donc une technologie capable d'amener des particules à de telles énergies. C'est le principe des accélérateurs de particule.

3 Accélération de particules dans un champ électromagnétique

3.1 Accélération dans un champ électrique uniforme stationnaire

On considère une particule de masse m et de charge q immobile dans (R) galiléen. Elle est soumise à un champ $\vec{\mathbf{E}}$ uniforme et stationnaire. Ainsi on ne crée pas de champ magnétique. La partie spatiale du PFD donne

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} = q\vec{\mathbf{E}} \tag{26}$$

Ce qui s'intègre en $\vec{\mathbf{p}} = qt\vec{\mathbf{E}}$. $\vec{\mathbf{v}}$ est donc colinéaire à E à tout instant, on calcule alors sa norme simplement :

$$v = \frac{qE}{m} \frac{t}{\sqrt{1 + \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 t^2}} \tag{27}$$

Aux temps courts la particules est encore non-relativiste, on retrouve $v = \frac{qE}{m}t$, le résultat classique. Quand $t \to \infty$, on $v \to c^-$. c apparaît bien comme vitesse limite. Cette vitesse limite a été vérifiée expérimentalement par Bertozzi en 1964.

3.2 Accélération dans un champ magnétique uniforme stationnaire

On considère à nouveau une particule de masse m et de charge q, cette fois-ci se déplaçant à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans le référentiel (R) galiléen. Elle est soumise à un champ $\vec{\mathbf{B}}$ uniforme et stationnaire (on ne génère pas de champ électrique) orthogonal à sa vitesse. La partie temporelle du PFD donne

$$E = \text{constante} \tag{28}$$

Donc la vitesse v est constante.
La partie spatiale du PFD donne

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{\gamma m}\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{29}$$

On reconnaît une équation de précession :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = \frac{qB}{\gamma m}\left(\vec{\mathbf{v}} \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B}\right) \tag{30}$$

On pose alors $\omega_{c,\mathrm{rel}} = \frac{qB}{\gamma m} = \frac{\omega_c}{\gamma}$. ω_c est la pulsation cyclotron classique. On retrouve bien la limite classique aux faibles vitesses. On remarque que la pulsation cyclotron relativiste dépend de la vitesse contrairement au cas classique. Il y perte d'isochronisme. On doit alors utiliser un synchro-cyclotron ou bien un synchrotron. Le synchrotron est la technique efficace pour atteindre les hautes énergies.

Conclusion

Dans cette leçon on a pu voir la forme que prenait le principe fondamental de la dynamique en relativité restreinte, et exhiber l'équivalence masse-énergie. On a vu que la limite $v \ll c$ redonnait les résultats de la théorie classique de Newton, ce qui est rassurant. Le formalisme des collisions permet par les lois de conservations de calculer des grandeurs mesurables et de prédire la possibilité de former certaines particules. Cette théorie est nécessaire pour comprendre la dynamique des particules lors de leur accélération pour atteindre les hautes énergies nécessaires à la collision

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

•

4.2 Commentaires

•