

# LP 10 – PHÉNOMÈNES INTERFACIAUX IMPLIQUANT DES FLUIDES

1<sup>er</sup> juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

## Niveau : L2

## Bibliographie

✎ *LP 10 2020*, Cléments de la Salle et Col-léaux → Merci

✎ *Capillarité*, P. Lidon → Le cours

## Prérequis

- Thermodynamique
- Dynamique des fluides
- Théorème de Bernoulli généralisé

## Expériences

🔥 trombone

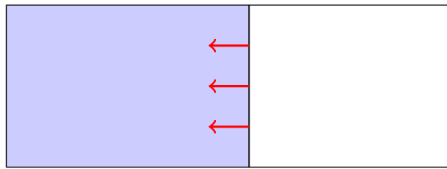
🔥 cuve à ondes

🔥 loi de Jurin

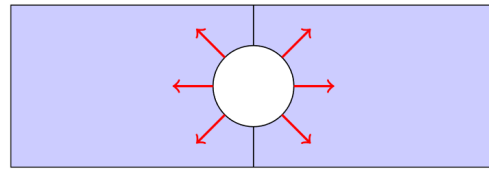
🔥 Murissement d'Oswald

## Table des matières

|          |                                             |          |
|----------|---------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>La tension superficielle</b>             | <b>2</b> |
| 1.1      | Observations . . . . .                      | 2        |
| 1.2      | Approche énergétique . . . . .              | 3        |
| 1.3      | Origine microscopique . . . . .             | 3        |
| <b>2</b> | <b>Interface fluide-fluide</b>              | <b>4</b> |
| 2.1      | La loi de Laplace . . . . .                 | 4        |
| 2.2      | Compétition gravité - capillarité . . . . . | 6        |
| <b>3</b> | <b>Interfaces triples</b>                   | <b>6</b> |
| 3.1      | Loi de Young Dupré . . . . .                | 6        |
| 3.2      | Loi de Jurin . . . . .                      | 8        |
| <b>4</b> | <b>Questions et commentaires</b>            | <b>9</b> |
| 4.1      | Questions . . . . .                         | 9        |
| 4.2      | Commentaires . . . . .                      | 9        |



(a) Sur un cadre contenant une tige mobile, on crée un film de savon. Quand on perce le film d'un côté du rail, ce dernier se déplace vers le film restant.



(b) Sur un cadre contenant un fil formant une boucle, on réalise un film de savon. Quand on perce le film au centre de la boucle, celle-ci s'étire et prend une forme circulaire.

FIG. 1 : Schéma des manip

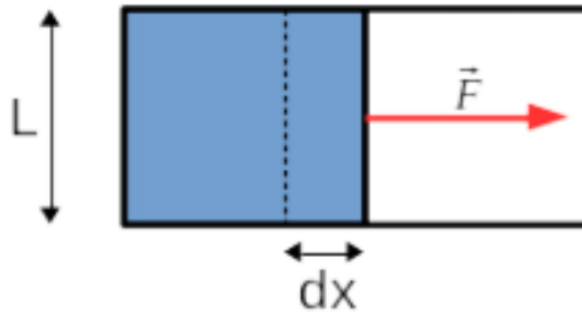


FIG. 2 : Schéma et notations utilisées pour l'introduction de la tension de surface

## Introduction

Au cours des dernières leçons de mécanique des fluides, on a étudié l'écoulement des fluides à l'aide de leurs propriétés. On a utilisé les conditions aux limites comme outil, aujourd'hui on va se pencher sur les interfaces entre deux fluides ou entre un fluide et un solide. Elles exhibent des comportements particuliers.

### Trombone qui flotte

On fait flotter un trombone ou une punaise sur de l'eau et on essaie sur de l'éthanol.

## 1 La tension superficielle

### 1.1 Observations

#### Le fil qui se tend

On présente une des deux manips en live de la [Figure 1](#). On peut aussi présenter cette [vidéo](#).

Quand on place un barreau sur la surface dont seul un côté contient du film, il est mis en mouvement par une force. On va quantifier cela, on schématise cette situation par la [Figure 2](#).

Pour empêcher ce mouvement de la barre métallique, il faut appliquer une force dans le sens opposé. On conçoit que la force à fournir est d'autant plus importante que la tige est longue ( $L$  grand). On peut même montrer que cette force croît linéairement avec  $L$  de sorte qu'il existe un coefficient  $\gamma$  appelé *tension de surface* qui lie la force  $F$  exercée sur la tige par le fluide et la longueur  $L$  :

$$F = \gamma L \quad (1.1)$$

On peut donc voir la tension de surface comme une *force linéique*, s'exprimant en  $\text{N m}^{-1}$ .

**Ordres de grandeur** On remarque qu'en général ce sont de « faibles forces », au sens qu'on peut très facilement lutter contre l'avancée de la tige, il est donc logique que ces valeurs ne dépassent pas quelques  $\text{N m}^{-1}$ . On en présente dans la [Table 1](#).

L'eau est un cas exceptionnel de haute tension de surface. Pour se suspendre à une barre tirée par de l'eau il faudrait 1 km de longueur ( $mg = \gamma L$ ).

| Fluide   | $\gamma(\text{mN m}^{-1})$ à 20 °C |
|----------|------------------------------------|
| eau pure | 72                                 |
| éthanol  | 22                                 |

TAB. 1 : Ordres de grandeur de tension de surface par rapport à l'air

**Terme « tension »** On parle de tension mais il ne faut pas faire trop l'analogie avec un ressort. La force ne dépend pas de la position de la tige et la longueur qui est multipliée par  $\gamma$  pour donner la force est *orthogonale* à cette force.

## 1.2 Approche énergétique

On peut alors associer à cette force une énergie appelée *énergie de surface*. En effet, le travail de cette force lors d'un déplacement  $dx$  est

$$\delta W = F dx = \gamma dA. \quad (1.2)$$

On a noté  $A$  l'aire de l'interface. On peut donc voir la tension de surface également comme une énergie surfacique ! Étirer l'interface de  $dA$  coûte une certaine énergie de surface  $\gamma dA$ . On comprend alors qu'il est difficile de faire des bulles avec de l'eau pure : faire une bulle c'est étirer la surface, il vaut mieux une faible tension de surface pour que ça coûte moins cher énergétiquement. En rajoutant du savon, ça marche mieux car on baisse la tension de surface.

### Ajouter du liquide vaisselle

Le trombone se la coule douce à flotter, on rajoute une goutte de liquide vaisselle, et bam il se met à couler. Incroyable !

On peut alors ajouter un terme à l'énergie interne du système :

$$dU = TdS - pdV + \mu dN + \gamma dA. \quad (1.3)$$

Cela amène à une définition thermodynamique de la tension de surface :

**Définition** On définit la tension de surface par rapport aux potentiels thermodynamiques :

$$\gamma = \left. \frac{\partial U}{\partial A} \right|_{S,V,N} = \left. \frac{\partial F}{\partial A} \right|_{T,V,N} = \left. \frac{\partial G}{\partial A} \right|_{T,p,N}. \quad (1.4)$$

On utilise généralement la définition avec  $G$  puisqu'on en pratique il est plus facile de contrôler  $T$  et  $p$ . On remarque que la minimisation du potentiel thermodynamique conduit à une minimisation de l'aire de l'interface.

## 1.3 Origine microscopique

Les molécules se stabilisent entre elles par différents types d'interactions. Les molécules à l'interface sont moins stabilisées car proches de moins de molécules, comme illustré en [Figure 3](#).

Il faut donc que le nombre de molécules à l'interface soit le plus faible possible et donc on retrouve l'idée de minimisation de l'aire de contact.

On a alors un moyen d'estimer la tension de surface en fonction de l'interface étudiée :

- On note  $a$  la taille d'une molécule
- On note  $U$  l'énergie d'interaction entre molécules, définie de sorte que toutes ces interactions sont brisées au passage en phase gazeuse  $U \sim k_B T_{\text{eb}}$

En déplaçant une molécule de l'intérieur à la surface, on augmente l'aire de l'interface de  $a^2$  et son énergie de  $U$  d'où une estimation  $\gamma \sim k_B T_{\text{eb}}/a^2$

Évidemment, c'est un petit modèle tout simple avec les mains, faut pas lui faire dire plus que ce qu'il ne signifie.

**|** Maintenant qu'on a défini la tension de surface on va pouvoir étudier l'interface entre deux fluides.

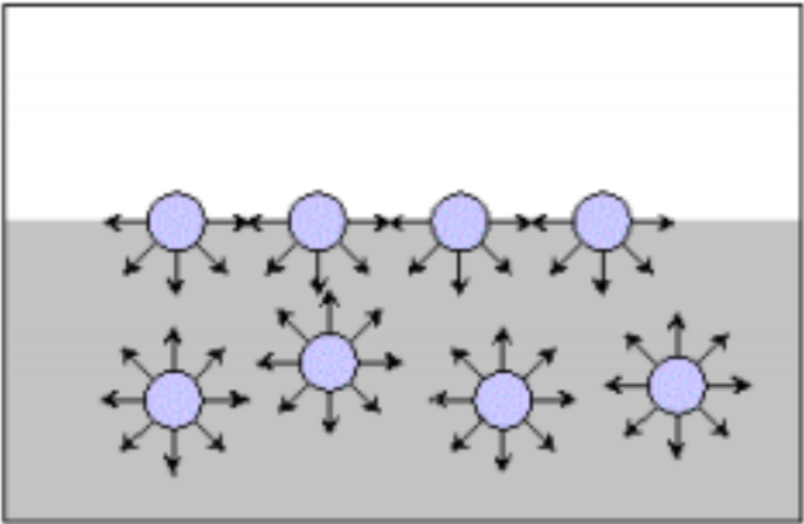


FIG. 3 : Représentation de la stabilisation de molécules à l’interface

| Liquide                | $U(\text{meV})$      | $a(\text{nm})$ | $\gamma(\text{mN m}^{-1})$ |
|------------------------|----------------------|----------------|----------------------------|
| Huile, éthanol         | 40 (VdW)             | 0.3            | 20                         |
| Eau                    | liaisons H           | 0.1            | 70                         |
| Sels fondus            | liaisons ioniques    | 0.1            | 120                        |
| Mercure, étain liquide | liaisons métalliques | 0.1            | 500                        |

TAB. 2 : Application à différents composés



## 2 Interface fluide-fluide

### 2.1 La loi de Laplace

La tension de surface caractérise le coût en énergie pour modifier l’aire d’une interface. Or, donner une courbure à une interface modifie sa surface : c’est ce que l’on va étudier dans ce paragraphe.

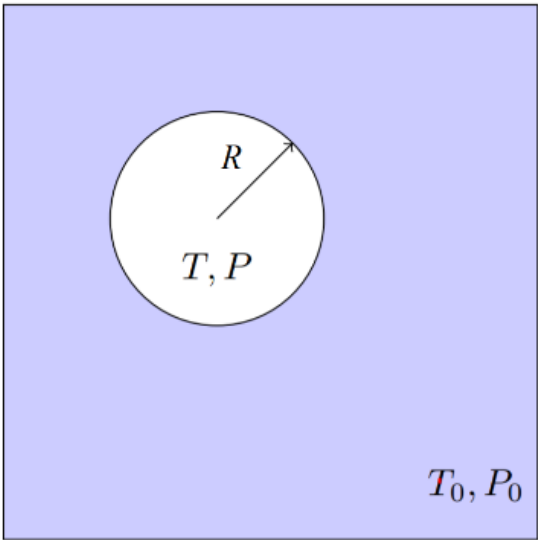


FIG. 4 : Bulle sphérique dans un réservoir de liquide à  $(T_0, P_0)$  constants.

On considère un système composé d’une bulle sphérique de gaz de rayon  $r$  entourée d’un liquide se comportant comme un thermostat, i.e. le liquide est à  $T_0, P_0$  constants. Le système complet est considéré fermé.

On a choisi la bulle sphérique car on sait que c'est la forme minimisant la surface à volume donné, il s'agit donc de la forme d'équilibre de la goutte. On cherche maintenant quelle est la pression à l'équilibre à l'intérieur de cette bulle de rayon  $r$ .

Le potentiel thermodynamique adapté à la description du système est donc l'enthalpie libre du système  $G^* = U - P_0V + T_0S$ . En notant  $A$  l'aire de la bulle, on peut écrire la condition d'équilibre on écrit la différentielle  $dG^*$  :

$$dG^* = dU + P_0dV - T_0dS \quad (2.1)$$

$$dG^* = TdS - pdV + \gamma dA + P_0dV - T_0dS \quad (2.2)$$

On peut faire apparaître le rayon  $r$  de la bulle comme variable :  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  et  $A = 4\pi r^2$  d'où  $dV = 4\pi r^2 dr$  et  $dA = 8\pi r dr$ , ainsi :

$$dG^* = (T - T_0)dS - 4P\pi r^2 dr + \gamma 8\pi r dr + P_0 4\pi r^2 dr \quad (2.3)$$

$$dG^* = (T - T_0)dS + 4\pi r^2 dr \left( P_0 - P + \frac{2\gamma}{r} \right) \quad (2.4)$$

À l'équilibre on a  $dG^* = 0$  ce qui se traduit par :

- $T = T_0$  équilibre thermique
- $P = P_0 + \frac{2\gamma}{r}$  équilibre mécanique

La deuxième équation indique que la courbure de l'interface se traduit par une surpression à l'intérieur de la bulle. Cette surpression est donnée par la *loi de Laplace* pour une sphère :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{r} \quad (2.5)$$

#### Généralisation :

Le calcul que nous avons mené se restreint au cas particulier d'une interface sphérique. Pour une interface quelconque, celle-ci peut être définie par deux rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  (le choix de  $R_1$  et  $R_2$  n'est pas unique mais  $C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  reste le même). Dans ce cas là, la loi de Laplace s'écrit :

$$\Delta P = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.6)$$

Quelques cas particuliers :

- Interface plane :  $R_1, R_2 \rightarrow 0$  donc  $\Delta P \rightarrow 0$  : on retrouve la continuité de la pression pour une interface plane.
- Interface sphérique :  $R_1 = R_2 = r$  on retrouve le cas traité.
- Cas particulier d'une bulle de savon de rayon  $r$ . Elle est constituée d'une fine couche de savon donc en réalité constituée de deux interfaces distinctes eau/air ce qui donne la loi de Laplace :

$$\Delta P = \frac{4\gamma}{r} \quad (2.7)$$

#### Mûrissement d'Oswald

Si on a la foi on peut tenter cette manip qui montre que la petite bulle se vide dans la grosse. Attention elle est assez capricieuse.

**I** Regardons maintenant un cas dynamique.



## 2.2 Compétition gravité - capillarité

On va s'intéresser ici aux ondes se propageant à la surface d'un fluide dites ondes gravito-capillaires. Nous ferons les hypothèses suivantes :

- Problème bidimensionnel
- Écoulement parfait
- Écoulement irrotationnel, on peut donc définir  $\phi = \nabla \vec{v}$
- Onde de faible amplitude
- CL : discontinuité de la pression à l'interface donnée par Laplace, composante verticale de la vitesse nulle au fond et composante normale de la vitesse à l'interface égale à la composante normale de la vitesse du fluide.

En utilisant le théorème de Bernoulli généralisé, on obtient :

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = \vec{0} \quad (2.8)$$

L'onde étant de faible amplitude on considère que la vitesse du fluide est un terme d'ordre 1 et donc que  $v^2$  est d'ordre 2. En utilisant les conditions aux limites on peut obtenir une équation vérifiée par  $\phi$  en  $z = h$  :

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial^2 x \partial z} \right] (x, z = h, t) = 0 \quad (2.9)$$

On cherche ensuite une forme propagative, et en utilisant les équations précédemment trouvées on trouve la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\gamma k}{\rho} \right) \tanh(kh) \quad (2.10)$$

En définissant  $l_c = \frac{\gamma}{\rho g}$  la longueur capillaire et en se plaçant dans la limite des eaux profondes ( $kh \gg 1 \implies \tanh kh \sim 1$ ) on obtient :

$$\omega^2 = kh \left( gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \quad (2.11)$$

On va vérifier cela expérimentalement !

### Ondes gravito-capillaires

Tout est dans le poly de TP a priori. Selon les Cléments, la cuve de Montrouge marche mieux que le dispositif de Lyon, et utiliser de l'éthanol. Bien penser à s'assurer que personne n'est épileptique et se souvenir de faire le réglage fin au GBF. On n'oublie pas de faire le grandissement !

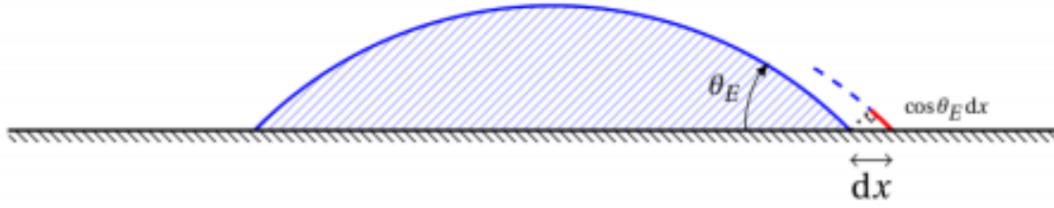
## 3 Interfaces triples

### 3.1 Loi de Young Dupré

Dans cette partie on va étudier le *mouillage*, il s'agit de l'étude d'un étalement de liquide sur un substrat (liquide ou solide) dans un environnement gazeux. Il y a trois phases qui rentrent en jeu, en compétition, donc trois interfaces, donc trois tensions de surface  $\gamma_{LG}, \gamma_{LS}, \gamma_{SG}$ . L'intersection des trois phases est appelée *interface triple*. On peut typiquement obtenir des gouttes comme présenté en [Figure 5](#).

Pour savoir si le mouillage est efficace, on peut utiliser l'angle  $\theta$  que fait la goutte avec le solide.

- $\theta < \frac{\pi}{2}$  Le liquide s'étale plus en un film, cas limite pour  $\theta = 0$ . La goutte cherche à maximiser la surface liquide-solide.
- $\theta > \frac{\pi}{2}$  Le liquide est peu mouillant et la goutte prend plutôt l'allure d'une goutte quasi-sphérique en diminuant au maximum la surface de contact liquide-solide

FIG. 5 : Déplacement de la ligne triple de  $dx$ 

Une autre manière de quantifier le mouillage est de comparer l'énergie surfacique du substrat sec  $E_{\text{sec}}$  et du substrat mouillé  $E_{\text{mouillé}}$ . On définit pour cela le paramètre d'étalement  $S$

$$S = E_{\text{sec}} - E_{\text{mouillé}} = \gamma_{\text{SG}} - (\gamma_{\text{SL}} + \gamma_{\text{LG}}). \quad (3.1)$$

On distingue alors deux cas :

- $S > 0$  L'énergie surfacique est abaissée en recouvrant le substrat avec le liquide, le liquide s'étale complètement en un film dont l'épaisseur résulte de la compétition entre la capillarité et les forces d'interaction entre les particules de fluide. On parle de *mouillage total*.
- $S < 0$  Le liquide ne s'étale pas entièrement mais forme une calotte sphérique, faisant un angle de contact avec le substrat. On est dans une situation de mouillage partiel.

On distingue alors un liquide plutôt mouillant, pour lequel  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$  et un liquide plutôt non-mouillant pour lequel  $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ .

Il faut encore déterminer  $\theta$  ! On comprend qu'il va dépendre du matériau et des fluides à travers les différentes tensions de surface.

**Approche énergétique** En imaginant un tel déplacement, on augmente les surfaces des interfaces. Prenons par exemple une goutte dont l'interface avec le solide est sphérique de rayon  $r$ . Augmenter ce rayon de  $dr$  aura comme conséquence

$$\begin{aligned} dA_{\text{SL}} &= 2\pi r dr \\ dA_{\text{SG}} &= -2\pi r dr \\ dA_{\text{LG}} &= 2\pi r dr \cos \theta \end{aligned}$$

La condition d'équilibre s'écrit

$$dU = 2\pi r dr (\gamma_{\text{SL}} - \gamma_{\text{SG}} + \gamma_{\text{LG}} \cos \theta) = 0 \quad (3.2)$$

On obtient alors la loi de Young-Dupré :

$$\boxed{\cos \theta = \frac{\gamma_{\text{SG}} - \gamma_{\text{SL}}}{\gamma_{\text{LG}}}}. \quad (3.3)$$

Cette loi traduit la compétition entre toutes ces énergies de surface. Par exemple si l'interface solide liquide est très stabilisante,  $\gamma_{\text{SL}} < \gamma_{\text{SG}}$ , on trouve  $\cos \theta > 0$  donc  $\theta < \frac{\pi}{2}$ , le liquide préfère augmenter le contact avec le solide. Même raisonnement pour  $\gamma_{\text{SL}} > \gamma_{\text{SG}}$ .

**Approche par les forces** C'est le même raisonnement mais en projetant sur l'axe horizontal, comme dans la Figure 6.

L'analyse par les forces permet de voir qu'il y a un problème en projetant sur l'axe vertical, il doit y avoir une force qui compense la traction de la goutte vers le haut. En fait le solide se déforme légèrement jusqu'à ce que le rappel élastique compense la traction de la goutte, voir Figure 7. La déformation est évidemment très faible.

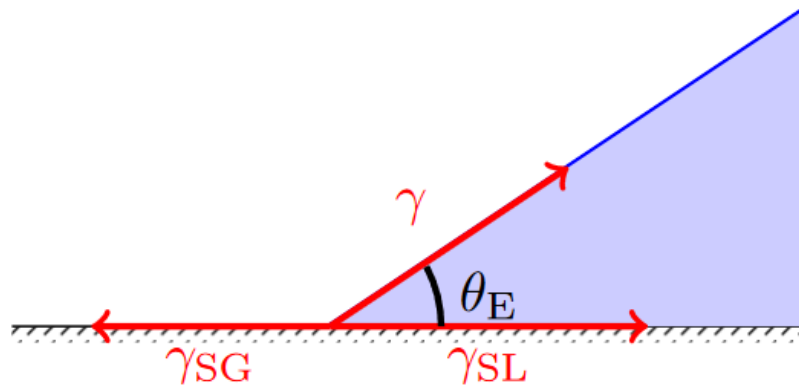


FIG. 6 : Forces s'exerçant sur la ligne triple

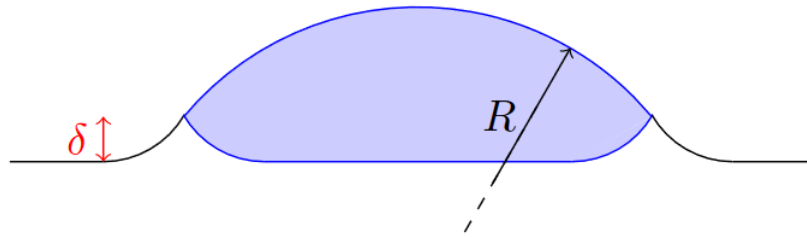


FIG. 7 : Déformation du solide sous la ligne triple

### 3.2 Loi de Jurin

On pourrait résumer les calculs menés précédemment à l'étude des affinités relatives d'un liquide avec un solide ou un gaz. Une des conséquences observables c'est la montée capillaire.



#### Capillaires

On utilise les tubes faits pour ça. Utiliser un colorant peut rendre le truc plus visuel !

Encore une fois il y a plusieurs manières de le faire : équilibre des forces, des énergies ou des pressions. Faisons la démo avec la loi de Laplace ça nous permet de réutiliser la loi qu'on a démontré plus tôt.

D'une part, en négligeant la taille du ménisque et en utilisant la loi de l'hydrostatique :

$$P(h) = P_0 - \rho gh \quad (3.4)$$

Et d'autre part le rayon de courbure  $R$  du ménisque se déduit de l'angle de mouillage  $R = r \cos \theta$  (avec  $r$  le rayon du capillaire) donc la loi de Laplace donne :

$$P(h) = P_0 - \frac{2\gamma_{LG}}{R} \quad (3.5)$$

Ainsi on obtient :

$$h = \frac{2\gamma_{LG} \cos \theta}{\rho gr} \quad (3.6)$$

C'est la *loi de Jurin*. Si on a le temps (ce qui est peu probable) elle se vérifie bien expérimentalement, cf. le poly de TP.

### Conclusion

On a vu dans cette leçon les origines de la notion de tension de surface de façon empirique puis à travers un modèle microscopique. On a vu ensuite les lois régissant les interfaces avec un fluide : la loi de Laplace, la loi de Young Dupré et la loi de Jurin. On a également étudié le cas dynamique des ondes gravito-capillaires.

Industriellement la tension de surface présente un grand intérêt. En effet un fabricant de pare brise ou de poêles va chercher à minimiser le mouillage en s'inspirant par exemple de la nature, les feuilles de nénuphar présentent des micro structures ce qui a inspiré certaines surfaces super hydrophobes. D'autres types de surface sont également développées

comme les *surfaces imprégnées* qui présentent un film d'huile permettant d'excellentes propriétés hydrophobes comme le montre

### Ketchup (plastic)

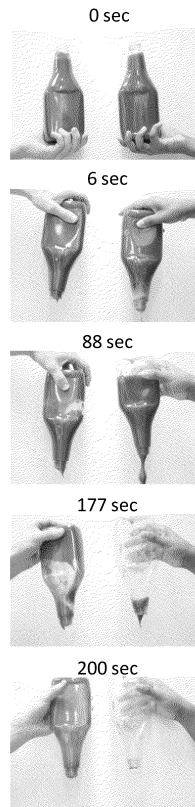


FIG. 14

FIG. 8 : Éjection de Ketchup d'une bouteille en plastique. La bouteille de droite est recouverte d'un léger film d'huile qui facilite son éjection. [Source](#)

## 4 Questions et commentaires

### 4.1 Questions

- 

### 4.2 Commentaires

-