Précession dans les domaines macroscopiques et microscopiques

13 avril 2021
Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L3

Bibliographie

✍ , ⟶

Prérequis

- Théorème du moment cinétique
- Électromagnétisme dans le vide
- Mécanique du solide

Expériences

- précession d'une toupie
- Précession d'un gyroscope déséquilibré

Table des matières

1 Dynamique de la toupie axysimétrique **2**
1.1 Les angles d'Euler . . . 2
1.2 Équation du mouvement . . . 3
1.3 Approximation gyroscopique . . . 4

2 Précession de Larmor et résonance magnétique **5**
2.1 Rapport gyromagnétique et précession de Larmor . . . 5
2.2 Résonance magnétique . . . 6

3 Questions et commentaires **7**
3.1 Questions . . . 7
3.2 Commentaires . . . 7

Introduction

Le mouvement de précession est un mouvement qui apparaît quand un mouvement de rotation propre subit un moment, il apparaît à de nombreuses échelles, précession de l'axe de rotation de la Terre, précession d'une toupie ou d'un gyroscope et précession du spin nucléaire. On va dans cette leçon décrire ces mouvements et illustrer leurs applications.

1 Dynamique de la toupie axysimétrique

On va essayer dans cette partie de comprendre la stabilité et les caractéristiques du mouvement de la toupie.

1.1 Les angles d'Euler

On va chercher à déterminer le vecteur rotation de la toupie dans sa base propre (base dans laquelle le tenseur d'inertie de la toupie est diagonal).

Les angles d'Euler sont définis sur la figure 1. Le référentiel R est celui du laboratoire, supposé galiléen centré en O.

On va trouver ce vecteur rotation en trois étapes :

- On effectue une rotation d'axe $(O, \vec{\mathbf{z}})$ d'angle $\Psi(t)$. On transforme alors $\vec{\mathbf{x}}$ en $\vec{\mathbf{u}}$. Le vecteur vitesse angulaire correspondant est :
$$\vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{z}} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{z}} \tag{1}$$
- On effectue une rotation d'axe $(O, \vec{\mathbf{u}})$ d'angle $\theta(t)$. On transforme ainsi $\vec{\mathbf{z}}$ en $\vec{\mathbf{z'}}$. Le vecteur correspondant est :
$$\vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{u}} \tag{2}$$
- On effectue une rotation d'axe $(O, \vec{\mathbf{z'}})$, d'angle $\phi(t)$. On transforme ainsi $\vec{\mathbf{u}}$ en $\vec{\mathbf{x'}}$. Le vecteur correspondant est :
$$\vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{z'}} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{z'}} \tag{3}$$

  Dans le référentiel (O, x', y', z') la toupie est au repos. Par un jeu de trois rotation on est passés du référentiel du laboratoire à un référentiel dans lequel la toupie est au repos. La vitesse angulaire de la toupie dans R est :
$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{z}} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{u}} + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{z'}} \tag{4}$$

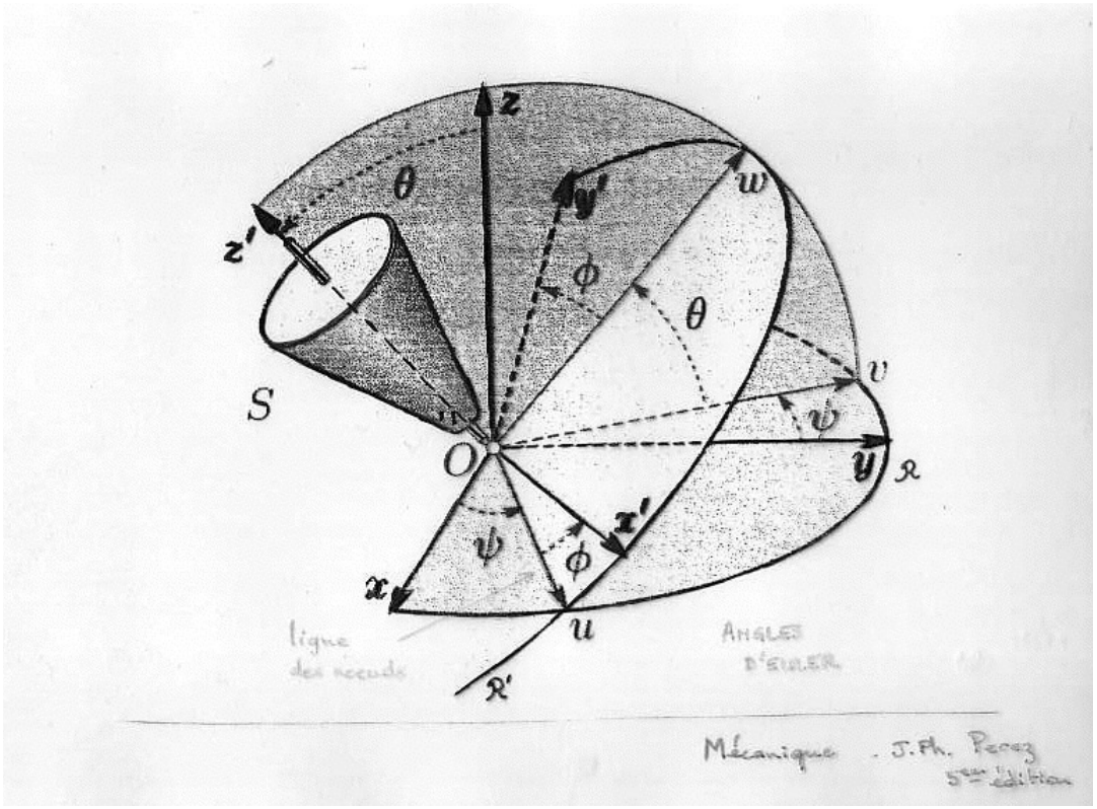

FIGURE 1 – Définition des angles d'Euler

Remarque : $\dot{\Psi}$ est appelé *vitesse de précession*, $\dot{\theta}$ est appelé *vitesse de nutation*, $\dot{\phi}$ est appelé *vitesse de rotation propre*.

Les axes principaux de la toupie sont $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ et $\vec{\mathbf{z}'}$. Il faut donc réexprimer $\vec{\mathbf{z}}$ dans cette base.

$$\vec{\mathbf{z}} = \cos(\theta)\vec{\mathbf{z}'} + \sin(\theta)\vec{\mathbf{w}} \tag{5}$$

On a donc :

$$\boxed{\vec{\mathbf{\Omega}} = \dot{\theta}\vec{\mathbf{u}} + \dot{\Psi}\sin\theta\vec{\mathbf{w}} + \left(\dot{\phi} + \dot{\Psi}\cos\theta\right)\vec{\mathbf{z}'}} \tag{6}$$

↓ *On a maintenant presque tous les ingrédients pour déterminer l'équation du mouvement*

1.2 Équation du mouvement

Il est facile d'exprimer le moment cinétique de la toupie dans R par rapport à O dans sa base propre (u, w, z') :

$$\vec{\sigma}_{R/O} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega_u \\ \Omega_w \\ \Omega_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I\Omega_u \\ I\Omega_w \\ J\Omega_{z'} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Dans la base (u, w, z') le moment du poids sur la toupie est :

$$\vec{\mathcal{M}}_{P/O} = a\vec{\mathbf{z}'} \wedge m\vec{\mathbf{g}} = mga\sin\theta\vec{\mathbf{u}} \tag{8}$$

Hypothèse : on néglige les frottements solides au niveau du point de contact ainsi que les frottements fluides.

L'équation du mouvement de la toupie dans R supposé galiléen nous est donnée par *le théorème du moment cinétique* :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{R/O}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_{P/O} \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(I\dot{\theta}(t)\vec{\mathbf{u}}(t) + I\dot{\Psi}(t)\sin\theta(t)\vec{\mathbf{w}}(t) + J\big(\dot{\phi}(t) + \dot{\Psi}(t)\cos\theta(t)\big)\vec{\mathbf{z}'}(t)\Big) = mga\sin\theta(t)\vec{\mathbf{u}}(t) \tag{10}$$

↓ *Cette équation est très dure à résoudre, on va donc faire des hypothèses supplémentaires pour simplifier le calcul.*

1.3 Approximation gyroscopique

Expérimentalement on a vu que la vitesse de rotation propre de la toupie est très grande devant les vitesses de précession et de nutation.

L'approximation gyroscopique est la suivante :

$$|\sigma_{z'}| \gg |\sigma_u|, |\sigma_w| \tag{11}$$

On va voir si cette approximation est justifiée dans notre cas :

$$|\sigma_{z'}| \gg |\sigma_u| \iff \left|J\left(\dot\phi + \dot\Psi\cos\theta\right)\right| \gg \left|I\dot\Psi\sin\theta\right| \iff \left|\frac{\dot\phi}{\dot\Psi}\right| \gg \frac{I}{J} \tag{12}$$

Si a est la hauteur de la toupie et R son rayon, $\dfrac{I}{J} \sim \dfrac{ma^2}{mR^2} \sim \dfrac{(10.10^{-2})^2}{(3.10^{-2})^2} \sim 10$. Ici la géométrie de la toupie rend l'approximation gyroscopique équivalente à $\dot\phi \gg \dot\Psi$.

On tire sur 1 m de fil en environ une seconde, le rayon de la toupie sur l'axe est d'environ 5 cm ainsi $\dot\phi \simeq 200\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. La vitesse de précession est d'environ 2 tours par seconde soit environ $6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

On a bien $\dot\phi \gg \dot\Psi$, le même raisonnement nous conduit à dire que $|\sigma_{z'}| \gg |\sigma_w| \iff \dot\phi \gg \dot\theta$ ce qui est également vrai.

L'approximation gyroscopique est donc bien vérifiée dans le cas de la toupie.

Remarque : Il est important de se souvenir que l'approximation gyroscopique est une condition sur les composantes du moment cinétique et non sur les vitesse de rotation.

L'équation du mouvement était :

$$\frac{\mathrm{d}\vec\sigma_{R/O}}{\mathrm{d}t} = a\vec{\mathbf{z'}} \wedge m\vec{\mathbf{g}} \tag{13}$$

Or maintenant $\vec\sigma_{R/O} = \sigma_{R/O}\vec{\mathbf{z'}}$ ainsi on peut écrire $a\vec{\mathbf{z'}} = \vec\sigma_{R/O}\dfrac{a}{\sigma_{R/O}}$, on a ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}\vec\sigma_{R/O}}{\mathrm{d}t} = \vec\sigma_{R/O}\frac{a}{\sigma_{R/O}} \wedge m\vec{\mathbf{g}} = -\frac{am}{\sigma_{R/O}}\vec{\mathbf{g}} \wedge \vec\sigma_{R/O} \tag{14}$$

Et de plus, en notant $\omega = \dot\phi$ on a $\sigma_{R/O} \simeq J\omega$, ainsi en introduisant la notation $\vec{\mathbf{\Omega_p}} \equiv -\dfrac{hm}{J\omega}\vec{\mathbf{g}}$ l'équation devient :

$$\frac{\mathrm{d}\vec\sigma_{R/O}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{\Omega_p}} \wedge \vec\sigma_{R/O} \tag{15}$$

On reconnaît une équation de précession à la pulsation Ω_p. On peut revenir à posteriori sur l'approximation gyroscopique en vérifiant $\omega \gg \Omega_p$.

Caractéristiques du mouvement :

- **Conservation de la norme du moment cinétique** : on multiplie scalairement l'équation de précession par le vecteur moment cinétique :
$$\vec\sigma_{R/O} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec\sigma_{R/O}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{16}$$
- **Conservation de la projection du moment cinétique selon l'axe de rotation propre :** De la même façon que précédemment, on multiplie scalairement pat $\vec{\mathbf{z'}}$ et comme le moment cinétique est selon cet axe, on aboutit à :
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{z'}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{17}$$
- **Nature du mouvement :** avec une norme constante et une projection constante sur l'axe propre de rotation, le vecteur moment cinétique décrit un cône de sommet O, d'axe Oz', il **précesse** donc.

On a vu un cas macroscopique de précession. On va maintenant retrouver une équation similaire dans le domaine microscopique.

2 Précession de Larmor et résonance magnétique

Le phénomène de précession dans le domaine microscopique peut se manifester à léchelle delélectron et du proton. Cest dans ce cadre que nous allons létudier et nous verrons quil est le phénomène clé pour un type de spectroscopie très utile en chimie notamment.

2.1 Rapport gyromagnétique et précession de Larmor

Pour simplifier, gardons une approche semi-classique du phénomène avec un électron. Ce dernier,en orbite circulaire (de centre O de rayon R) au point P autour dun noyau que l'on suppose fixe peut être assimilé à une boucle de courant (ou spire) et donc à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mu}$. On applique un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{\mathbf{B}} = B\vec{\mathbf{e_z}}$ à cet électron.

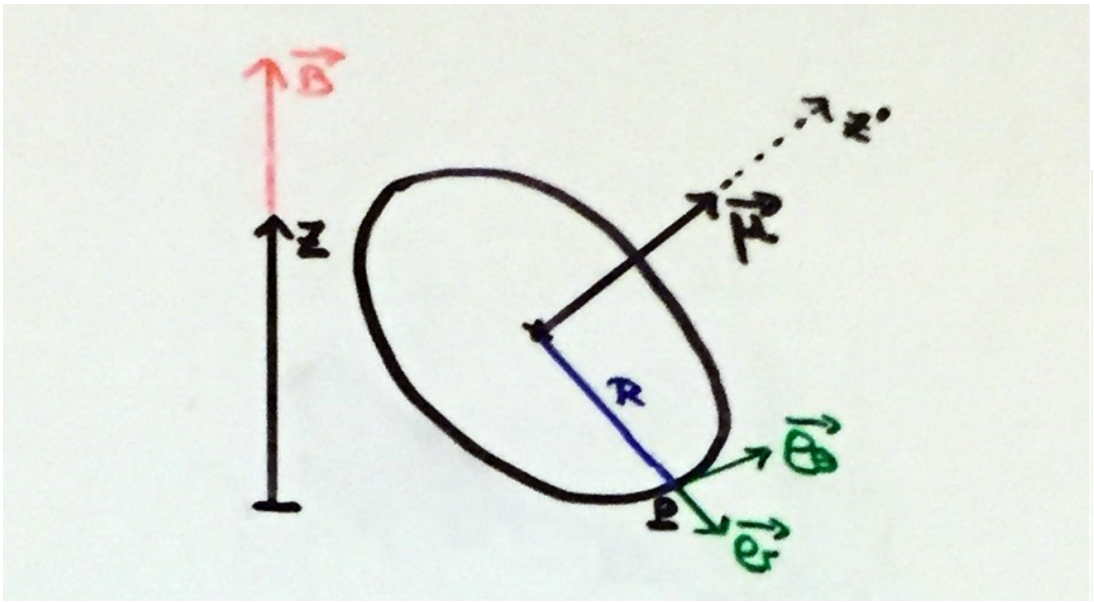

FIGURE 2 – Schéma de la situation étudiée

Le théorème du moment cinétique en O dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen appliqué à l'électron donne :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\mu} \wedge \vec{\mathbf{B}} \tag{18}$$

On remarque que si on arrive à exprimer $\vec{\mu}$ en fonction de $\vec{\sigma}_O$ on devrait pouvoir se ramener à une équation de précession.

Le moment magnétique de la spire est donné par :

$$\vec{\mu} = IS\vec{\mathbf{e_{z'}}} \tag{19}$$

Où I est le courant traversant la spire et S sa surface. Si l'électron parcourt la spire à une vitesse v on a $I = \dfrac{-e}{T} = \dfrac{-ev}{2\pi R}$. Sachant que $S = \pi R^2$ on obtient :

$$\vec{\mu} = -\frac{evR}{2}\vec{\mathbf{e_{z'}}} \tag{20}$$

De plus, le moment cinétique de l'électron est :

$$\vec{\sigma}_O = R\vec{\mathbf{e_r}} \wedge mv\vec{\mathbf{e}_\theta} = Rmv\vec{\mathbf{e_{z'}}} \tag{21}$$

On remarque ainsi la relation suivante :

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{\sigma}_O = -\gamma\vec{\sigma}_O \tag{22}$$

On a introduit la notation $\gamma = -\frac{e}{2m}$ que l'on appelle *rapport gyromagnétique de l'électron*. Cette relation a un sens physique très fort, en effet elle relie les propriétés électromagnétiques de l'électron à son aspect de point matériel.

Le théorème du moment cinétique devient alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{p} \wedge \vec{\sigma}_O \tag{23}$$

Où l'on a introduit la grandeur $\vec{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{p} = \frac{e}{2m}\vec{\mathbf{B}}$ pulsation de précession. On retrouve une équation de précession parfaitement analogue à celle que l'on a trouvé pour la toupie ! On a donc les mêmes caractéristiques, à savoir que le moment cinétique est de norme et de projection sur l'axe de rotation propre constantes.

2.2 Résonance magnétique

On applique maintenant un champ magnétique de la forme :

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}_1 = B_0\vec{\mathbf{e_z}} + B_1(\cos(\omega t)\vec{\mathbf{e_x}} + \sin(\omega t)\vec{\mathbf{e_y}}) \tag{24}$$

qui est donc la somme du champ magnétique précédent et d'un champ variable tournant dans le plan xOy.

Le système étudié reste le même électron. On fera appel au référentiel R' tournant à la pulsation $\vec{\omega} = \omega\vec{\mathbf{e_z}}$ par rapport au référentiel R. Il faut noter que R' n'est pas galiléen.

Le TMC appliqué en O dans R donne :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t}\right)_R = -\gamma\left(\vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}_1\right) \wedge \vec{\sigma}_O \tag{25}$$

Or, dans le référentiel tournant :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t}\right)_R = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_O \tag{26}$$

On peut donc réécrire un TMC *dans le référentiel tournant* sous la forme :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t}\right)_{R'} = -\left(\gamma\vec{\mathbf{B}}_0 + \gamma\vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\omega}\right) \wedge \vec{\sigma}_O \tag{27}$$

En posant $\vec{\omega}_0 = -\gamma\vec{\mathbf{B}}_0$, $\vec{\omega}_1 = -\gamma\vec{\mathbf{B}}_1$ on peut poser :

$$\boxed{\vec{\mathbf{\Omega}}'_\mathbf{p} = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}} \tag{28}$$

et le théorème du moment cinétique peut se réécrire comme une équation de précession :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t}\right)_{R'} = \vec{\mathbf{\Omega}}'_\mathbf{p} \wedge \vec{\sigma}_O} \tag{29}$$

On retrouve la même équation que précédemment. On pourrait donc se demander pourquoi on a rajouté un champ magnétique tournant si au final l'équation est la même. Il y a tout de même un avantage expérimental important à l'application d'un tel champ. En effet si $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0$, on a $\vec{\mathbf{\Omega}}'_\mathbf{p} = \vec{\omega}_1$ et la précession se fait autour du champ magnétique variable, comme si la partie stationnaire n'existait plus. On appelle cette condition *la condition de résonance*.

Expérimentalement, cela permet de remonter à γ. En effet dans le cas de résonance on a donc $\gamma = -\frac{\omega}{B_0}$. En ordre de grandeur, si le champ magnétique est de l'ordre du mT, la fréquence recherchée sera de l'ordre du MHz. En réalité il est préférable de travailler avec des champ magnétiques intenses pour réduire l'incertitude sur γ car en effet :

$$\mathrm{d}\gamma = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\omega^2}{B_0^2} + \frac{\omega^2}{B_0^4}\mathrm{d}B_0^2} \tag{30}$$

$$\mathrm{d}\gamma = \frac{1}{B_0}\sqrt{\mathrm{d}\omega^2 + \frac{\omega^2}{B_0^2}\mathrm{d}B_0^2} \tag{31}$$

L'incertitude sur γ est inversement proportionnelle à l'amplitude du champ statique appliqué.

L'approche que l'on a mené ici n'est pas quantique. Si on faisait une approche quantique pour le proton par exemple on verrait que son facteur gyromagnétique dépend de son environnement. C'est ce qui est mesuré par spectroscopie par résonance magnétique nucléaire (RMN).

Conclusion

On a pu, au cours de cette leçon, décrire les mouvements de précession d'une toupie axisymétrique et la précession de Larmor d'un spin nucléaire. Bien qu'ayant lieu à des échelles très distinctes ce deux mouvements ont des descriptions analogues. Le mouvement de précession se caractérise par la conservation de la norme du moment cinétique de sa projection selon l'axe de rotation propre et une vitesse de précession généralement lente devant la vitesse de rotation propre et qui dépende explicitement du forçage. Une importante application de la précession du spin nucléaire est la RMN.

3 Questions et commentaires

3.1 Questions

-

3.2 Commentaires

-