LP 23 – Aspects analogiques et numériques du traitement du signal. Étude spectrale

21 avril 2021
Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L3

Bibliographie

✍ , $\longrightarrow$

Prérequis

- Électrocinétique
- Optique ondulatoire
- Effet Doppler
- Séries de Fourier

Expériences

- Diagramme de Bode du RC par la réponse impulsionnelle
- Détermination d'une vitesse par effet Doppler

Table des matières

Introduction

La problématique de traitement du signal est omniprésente en physique expérimentale. Que ce soit pour transmettre et recevoir de l'information ou bien extraire une grandeur physique d'une expérience, il est nécessaire de traiter le signal brut produit par le système physique. Aujourd'hui le traitement du signal peut se faire par deux voies complémentaires : la voie analogique et la voie numérique. On va voir que pour les caractériser et les manipuler, leur spectre est un élément clef.

1 Contenu spectral et acquisition numérique d'un signal

1.1 Formalisme de Fourier

Les séries de Fourier, que vous connaissez, permettent une étude des signaux périodiques ou périodisables. On décompose un signal sur la base des fonctions trigonométriques, on fait apparaître le spectre du signal comme caractéristique du signal. Rappelons les formules de décompositions en séries de Fourier

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right)\\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\,\mathrm{d}t\\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On peut alors représenter des signaux usuels et leur représentation spectrale. Remarquons que l'information contenue dans le spectre est équivalente à celle contenue dans le signal.

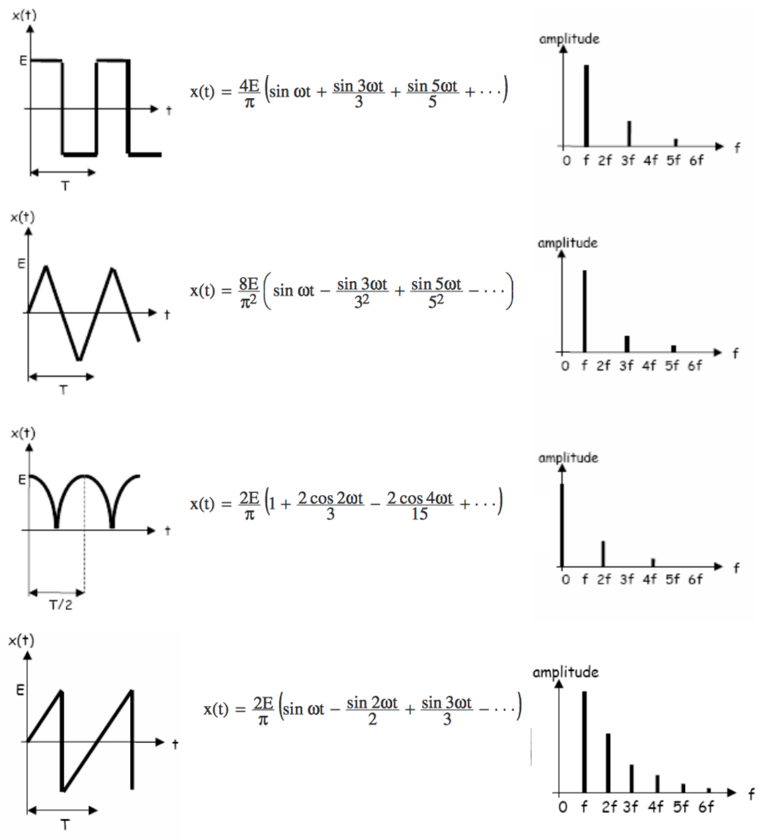

Fig. 1 : Signaux usuels et leur spectre

La décomposition en série de Fourier ne s'appliquant qu'aux signaux périodiques il faut la généraliser pour des signaux non périodiques grâce à la notion de transformée de Fourier. Pour un signal intégrable $f(t)$ on définit sa transformée de Fourier $\tilde{f}(\nu)$:

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\{-2i\pi\nu t\} \, \mathrm{d}t \tag{1}$$

Propriétés mathématiques Pour un signal périodique, les notions de série et de transformées de Fourier se confondent . Ainsi un signal périodique a une transformée de Fourier discrète, et de manière symétrique un signal discret a une transformée de Fourier périodique.

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier et inversement.

La transformée de Fourier d'un sinus est la somme de deux delta de Dirac à $-\nu$ et ν.

Si l'on souhaite étudier le spectre du signal se pose alors la question du calcul de la transformée de Fourier. Faut il le faire analogiquement, avant acquisition, ou numériquement et dans ce cas là il faut acquérir le signal.

1.2 Acquisition d'un signal

La mémoire des système informatiques étant finie, et leur temps de réponse également, il faut nécessairement échantillonner un signal avant de pouvoir l'acquérir, c'est-à-dire choisir des instants discrets auxquels on acquiert le signal mesuré. Le temps de réponse limite la fréquence d'échantillonage que l'on peut choisir, la question qui se pose est alors comment choisir sa fréquence d'échantillonage.

Pour pouvoir reconstruire le signal à partir du signal échantillonné, il faut prendre des points assez rapprochés pour pouvoir rendre compte des variations du signal. Une fois la fréquence d'échantillonage fixée les fréquences supérieures ne pourront pas être prises en compte.

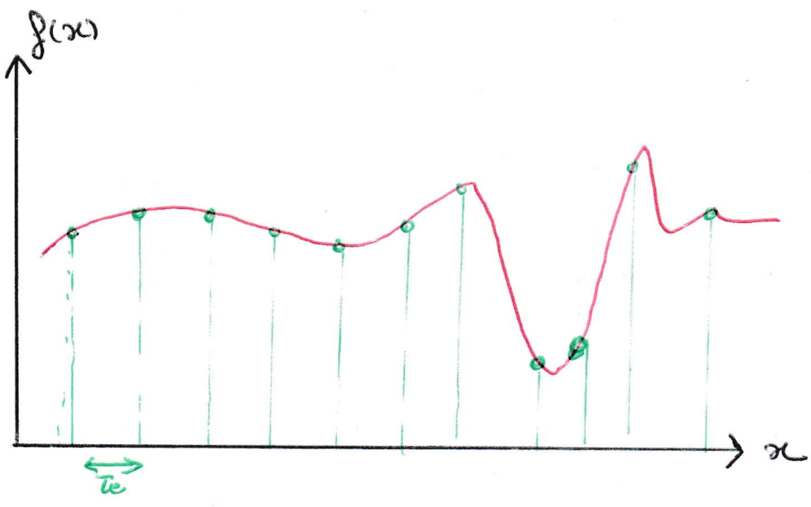

Fig. 2 : Échantillonage insuffisant d'un signal

Supposons que le signal sà acquérir possède des composantes spectrales uniquement jusqu'à une fréquence $f_{\max}$. Le signal d'acquisition p est un créneau de largeur τ et de fréquence T de tel sorte que le signal acquis S est $S = s \times p$. p est périodique, on le décompose en série de Fourier :

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t + \phi_n\right) \tag{2}$$

Le signal acquis est alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} s(t) P_n \cos(f_n t + \phi_n) \tag{3}$$

Pour chaque fréquence f_i de s le produit $s_i \cos(\omega_i t + \phi_i) P_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t + \phi_n\right)$ vaut

$$\frac{s_i P_n}{2}\left[\cos\left(\left(\frac{2\pi n}{T} + \omega_i\right) t + \phi_i + \phi_n\right) + \cos\left(\left(\frac{2\pi n}{T} - \omega_i\right) t + \phi_n - \phi_i\right)\right] \tag{4}$$

Condition de Shannon Ainsi, si $f_{\max} < f_e - f_{\max}$ on peut définir une fréquence f_c telle que les composantes de fréquence $f < f_c$ sont les composantes de s et celles supérieures sont issues du mélange de s par une composante de p d'ordre supérieur à 1. Par filtrage passe-bas de fréquence de coupure f_c on peut alors reconstituer $s(t)$ à partir de S, *il n'y a pas de perte d'information dans l'échantillonnage*

$$F_e > 2 f_{\max} \tag{5}$$

Si la condition n'est pas respectée, il y a repliement de spectre.

Numérisation - quantification Une fois échantillonné, le signal doit être quantifié car les valeurs ne peuvent être continues, car la mémoire est limitée. On utilise donc un convertisseur analogique numérique qui stocke l'information sur N bits, il y a alors un quantum $q = \frac{2 s_{\max}}{2^N}$ qui est la plus petite variation de signal que l'on peut stocker.

Ainsi en numérisant on introduit un bruit de quantification. En le modélisant par un bruit aléatoire uniforme entre $\left[-\frac{q}{2}; \frac{q}{2}\right]$ la valeur efficace de ce bruit est :

$$b_{\text{eff}}^2 = \langle b^2 \rangle = \frac{q^2}{12} \tag{6}$$

Ce bruit ne dépend pas du niveau du signal, ce qui détériore le rapport signal sur bruit à faible niveau de signal. On peut alors choisir de quantifier de façon non linéaire pour garder un rapport signal sur bruit constant sur l'étendue des valeurs que prend le signal sans devoir quantifier sur plus de bits.

2 Filtrage d'un signal

☕ **Filtrage optique : filtrage de Fourier en montage $4f$ (diffraction de Fraunhofer). On prends $f \simeq 15\,\text{cm}$ On détrame la photo de Joseph Fourier.**

Comme on vient de le voir on peut vouloir extraire une information d'un signal. Il faut bien avoir à l'esprit qu'ici on a réalisé un filtrage *spatial* et non temporel.

Pour cela on utilise un filtre qui permet de retirer la partie indésirable du signal. Ici il a servi à éliminer les hautes fréquences spatiales. On va dans cette partie étudier les filtres de manière plus formelle.

2.1 Filtre et diagramme de Bode

En toute généralité, un filtre est un système linéaire. Toutefois dans la suite nous nous intéresserons uniquement aux SLIT. En effet ils permettent l'utilisation du formalisme de Fourier et des expressions analytiques plus simples.

Définition : SLIT : Système Linéaire Invraiant dans le Temps

On va étudier ces systèmes et tout particulièrement leur influence sur un signal. On note $e(t)$ le signal d'entrée, $h(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre et $s(t)$ le signal de sortie. Par linéarité du système et définition de h, on peut écrire :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t') e(t') \mathrm{d}t' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - t') e(t') \mathrm{d}t' = (h * e)(t) \tag{7}$$

Mais sous cette forme et avec ces dépendances temporelles, l'équation est difficile à résoudre. Or on peut montrer que :

$$\text{TF}(a * b) = \text{TF}(a) \times \text{TF}(b) \tag{8}$$

En appliquant ce résultat à l'équation précédente, on obtient :

$$\tilde{s}(\omega) = \tilde{h}(\omega) \tilde{e}(\omega) \tag{9}$$

On définit alors *la fonction de transfert* du système $H(\omega)$ par :

$$H(\omega) = \tilde{h}(\omega) = \frac{\tilde{s}(\omega)}{\tilde{e}(\omega)} \tag{10}$$

La fonction de transfert nous renseigne sur la réponse en fréquence du système, sur comment les différentes composantes spectrales sont modifiées. Pour étudier le système on va ainsi étudier H. On va s'intéresser à son module et à sa phase, on trace les diagrammes de Bode ($G = 20\log(|H|)$ en décibels et $\arg(H)$ en radians en fonction de $\log(\omega)$).

Maintenant que nous avons vu ces considérations théoriques on va s'intéresser à un cas pratique : l'étude d'un filtre passe bas, le RC série que l'on voit sur la figure 3.

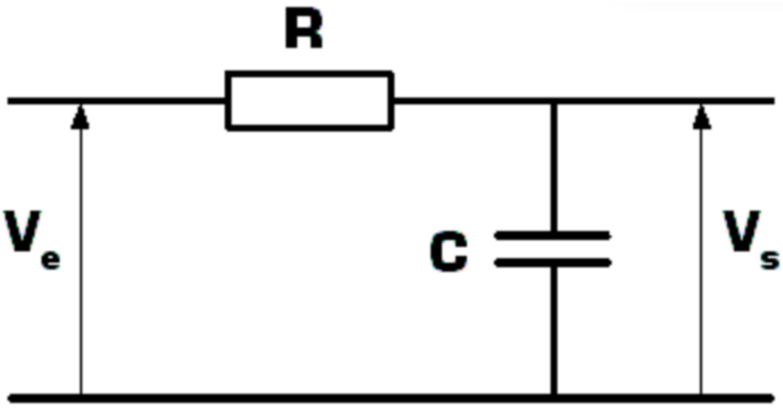

Fig. 3 : Schéma d'un circuit RC série

La fonction de transfert ici est $H(\omega) = \frac{\tilde{v_s}}{\tilde{v_e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$.

Pour obtenir expérimentalement H nous allons utiliser la méthode de la réponse indicielle. Il faut savoir que d'autres méthodes sont possibles, comme relever les points fréquence par fréquence ou encore l'utilisation de la wobbulation.

Diagramme de bode du RC

5 minutes

On cable le montage de la figure 5, on prends $R = 15\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0.1\,\mu\mathrm{F}$. On envoie un signal créneau de fréquence 1 Hz et on réalise une acquisition de 400 ms avec 1024 points, soit une fréquence d'échantillonage de 2558 Hz. On respecte bien le critère de Shannon. Une fois acquis, on dérive le signal puis on en fait la TF. ce qui donne accès à H.

Ce filtre coupe les hautes fréquences, il est qualifié de *passe-bas*. On peut voir qu'on pouvait prédire ce comportement en analysant l'expression théorique de H.

On peut notamment utiliser ce filtre comme filtre *anti-repliement*. En mettant sa fréquence de coupure au niveau du critère de Shannon pour l'échantillonnage considéré, on évite le repliement de spectre. Le spectre ne sera pas celui du signal mais ce sera bien celui du signal tronqué.

On vient de voir un type de filtre, il en existe bien d'autres.

2.2 Types de filtres et influence de l'ordre

Le filtre que l'on vient d'étudier est du premier ordre. Il existe également les filtres passe haut du premier ordre. Il faut faire attention à se souvenir que ces filtres ne sont pas parfaits : il existe toute une gamme de fréquence qui sont atténuées mais non supprimées (la pente est de -20 dB/décade et non infinie). Pour augmenter cette pente, on peut augmenter l'ordre du filtre. Cela permet d'accéder à d'autres types de filtres comme les passe bande et coupe bande du second ordre.

Les filtres du second ordre ont une pente de ± 40 dB/décade. On pourrait alors se dire qu'il suffit de prendre un filtre d'un ordre très grand pour avoir un comportement idéal. Néanmoins il est technologiquement plus compliqué de créer des filtres d'ordre grand, de plus des problématiques de résonance et d'instabilités apparaissent.

Comment par exemple mesurer précisément la différence de fréquence entre deux signaux de fréquences très proches ? On vient de voir que les filtres ne peuvent pas tout résoudre : on va utiliser une nouvelle méthode, la détection synchrone.

3 Application : détection synchrone

Ici on va s'intéresser à la détermination d'une vitesse par effet Doppler, c'est notamment le principe des radars.

Si v est la vitesse de l'émetteur vers le récepteur fixe, que l'émetteur à une fréquence f et que les ondes se déplacent à la célérité c, on peut montrer que :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{v}{c} \tag{11}$$

L'émetteur recevant un signal de fréquence $f + \Delta f$.

Le principe de la détection synchrone est de remonter à cette quantité Δf. Pour cela on multiplie le signal reçu par un signal de même fréquence que celui qui est émis.

Soit $u_e(t) = A_e \cos(2\pi f t)$ le signal émis. Le signal reçu est alors $u_r = A_r \cos(2\pi(f + \Delta f)t)$. La multiplication des signaux donne donc :

$$V(t) = A_e A_r \cos(2\pi f t)\cos(2\pi(f + \Delta f)t) \tag{12}$$

$$V(t) = \frac{A_e A_r}{2} \cos(2\pi(2f + \Delta f)t) + \cos(2\pi \Delta f t) \tag{13}$$

On remarque la somme de deux signaux, un à la fréquence Δf que l'on cherche et un a bien plus grande fréquence. Maintenant on peut utiliser un filtre passe haut pour récupérer notre grandeur d'intérêt.

Détermination d'une vitesse par effet Doppler

✍ poly divers ⏲ 7 minutes

On fait ce qui est dit dans le poly, à la différence près que l'on filtre avec le RC présenté précedemment.

On s'attend à trouver f de l'ordre du Hz.

On a ici choisi de filtrer de manière analogique (avec un RC). On aurait également pu choisir de filtrer numériquement. En effet on a dit que la réalisation technologique d'un filtre de grand ordre peut être ardue, ainsi un filtre numérique permet de s'affranchir de toutes ces considérations pratiques. Un filtre numérique est néanmoins limité par la vitesse du processeur qui l'exécute. Il s'effectue également sur un signal numérique et ainsi les problèmes d'échantillonage évoqués précédemment rentrent alors en jeu.

Les filtres numériques sont utilisés dans la plupart de l'électronique que l'on utilise quotidiennement comme une télévision où un téléphone portable.

Conclusion

On a vu dans cette leçon que l'analyse de Fourier était un outil puissant pour l'étude des signaux et nous permettait d'extraire le critère de Shannon, à respecter pour l'acquisition d'un signal. On a compris comment fonctionnait un filtre et que leur utilisation permet aussi bien d'extraire une grandeur physique que de recevoir un message modulé en amplitude.

Remarquons que l'analyse de Fourier est d'importance capitale aussi d'un point de vue théorique, ou elle s'impose dans l'étude des équations linéaires.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-