LP 25 – Ondes acoustiques

6 juin 2021
Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L2

Bibliographie

✍ *LP 25 2021*, **Cléments de la Salle et Colléaux** ⟶ Les gars surs

Prérequis

- Ondes EM dans le vide

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

1 Mécanismes de propagation

1.1 Mise en évidence du phénomène

Vibreur sous cloche
Il faut mettre un micro à l'intérieur de la cloche à vide et observer à l'oscillo comme dans cette vidéo YouTube.

La propagation se fait dans un milieu matériel. Une onde mécanique est donc différente d'une onde électromagnétique.

On définit les variables d'intérêt $(p_1, \rho_1, \vec{\mathbf{v}}_1)$ telles que :

$$\begin{cases} p(\vec{\mathbf{r}},t) = p_0 + p_1(\vec{\mathbf{r}},t) \\ \rho(\vec{\mathbf{r}},t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{\mathbf{r}},t) \\ \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{v}}_1(\vec{\mathbf{r}},t) \end{cases} \tag{1.1}$$

1.2 Hypothèses et mise en équation

On se place dans *l'approximation acoustique*.

1. Les variables $(p_1, \rho_1, \vec{\mathbf{v}}_1)$ sont négligeables devant les grandeurs à l'équilibre et sont de moyenne temporelle nulle. Pour la vitesse, $\|\vec{\mathbf{v}}\| \ll c$, avec c la vitesse du son dans le milieu que l'on va mettre en évidence.
2. On considère l'écoulement comme parfait.
3. On néglige la pesanteur.

Vérification des hypothèses

1. Après les calculs on verra que c'est effectivement le cas
2. On veut évolution adiabatique. Il faut comparer le temps caractéristique qu'il faut à la chaleur pour être diffusée sur une longueur d'ondeλ et le temps qu'il faut à l'onde pour voyager sur λ.

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\lambda^2/D}{1/f} = \frac{c^2/(f^2D)}{1/f} = \frac{c^2}{fD} \tag{1.2}$$

   Pour l'air, $D = 10^{-5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $c = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $f = 20\,\mathrm{kHz}$. donc $\tau/T = 6\times10^5$.

3. Pour négliger la pesanteur, on pourra vérifier qu'on a bien $\left\|\rho_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}_1}{\partial t}\right\| \gg \|\rho_1 \vec{\mathbf{g}}\|$.

On part de l'équation d'Euler pour un écoulement parfait en négligeant la pesanteur $\vec{\mathbf{g}}$:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{v}}\right) = -\boldsymbol{\nabla} p. \tag{1.3}$$

Au premier ordre elle devient

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}_1}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} p_1}. \tag{1.4}$$

L'évolution étant isentropique, on peut définir le coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_S = \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right|_S \simeq \frac{1}{\rho_0}\frac{\rho_1}{p_0} \tag{1.5}$$

de sorte à avoir

$$\boxed{\rho_1 = \rho_0 \chi_S p_1}. \tag{1.6}$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \vec{\mathbf{v}}) = 0. \tag{1.7}$$

Au premier ordre elle devient :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 \tag{1.8}$$

On remplace ρ_1 par p_1 grâce à la compression isentropique.

$$\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1. \tag{1.9}$$

L'équation d'Euler linéarisée assure alors que

$$\boxed{\nabla^2 p_1 - \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0}. \tag{1.10}$$

On obtient une équation de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$.

Remarques

- $\vec{\mathbf{v}}_1$ et p_1 vérifient la même équation
- Pour un gaz parfait lors d'une transformation isentropique :

$$\begin{aligned}
pV^\gamma = \text{cst} &\implies V^\gamma \, \mathrm{d}p + \gamma p V^{\gamma-1} \, \mathrm{d}V = 0 \\
&\implies \chi_S = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}\bigg|_S = \frac{1}{\gamma p_0} \\
p = \frac{\rho R T}{M} &\implies \chi_S = \frac{M}{\gamma \rho_0 R T} \\
&\implies c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}
\end{aligned}$$

  Avec $\gamma = 1.4$, $R = 8{,}314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$, $T = 20\,°\mathrm{C}$, $M = 29 \times 10^{-3}\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ on a $c = 343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Dans les solides $\chi_S \sim 1/E$ donc $c \sim \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$, avec $E = 20 \times 10^9\,\mathrm{GPa}$ et $\rho_0 = 2 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ dans le béton donc $c = 3100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Dans l'eau, $c = 1500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

1.3 Solutions de l'équation de d'Alembert

On a déjà fait les calculs pour les ondes électromagnétiques.
Pour des ondes planes :

$$\begin{aligned}
p_1(x,t) &= f(t - x/c) + g(t + x/c) \\
\vec{\mathbf{v}}_1(x,t) &= \frac{1}{\rho_0 c}(f(t - x/c) - g(t + x/c))\widehat{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

Pour des ondes sphériques :

$$\begin{aligned}
p_1(r,t) &= \frac{1}{r} f(t - r/c) \\
\vec{\mathbf{v}}_1(r,t) &= -\left(\frac{1}{\rho_0 r^2} f(t - r/c) + \frac{1}{\rho_0 r c} f'(t - r/c)\right)\widehat{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

Les ondes sont longitudinales et il n'y a pas de dispersion car d'Alembert assure que $\omega = ck$.

Dans l'étude des ondes électromagnétique on a pu définir le vecteur de Poynting pour caractériser le transport d'énergie, comment le transposer à l'acoustique ?

2 Aspects énergétiques

2.1 Expression de $\vec{\Pi}$

Bilan local d'énergie :

$$\iiint_V \frac{\partial e}{\partial t}\mathrm{d}\tau = \oiint_{S_V} \vec{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} = \iiint_V \mathbf{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{\Pi}}\mathrm{d}\tau \implies = -\mathbf{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{\Pi}} \tag{2.1}$$

On a fait ça en analogie avec l'électromagnétisme, mais ici quelles sont les expressions de l'énergie volumique e et du vecteur densité d'énergie $\vec{\mathbf{\Pi}}$.

Prenons une surface $\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}$ orientée, centrée en M, soumise à surpression p_1. On a :

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}} = p_1(M,t)\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} \tag{2.2}$$

Ainsi la puissance élémentaire $\mathrm{d}P$ exercée par cette surpression est :

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 \equiv \vec{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} \tag{2.3}$$

On identifie donc :

$$\boxed{\vec{\mathbf{\Pi}} = p_1(M,t)\vec{\mathbf{v}}_1(M,t)} \tag{2.4}$$

On peut donc en revenir à notre bilan d'énergie :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\mathbf{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{\Pi}} = -\mathbf{\nabla} \cdot (p_1(M,t)\vec{\mathbf{v}}_1(M,t)) = -p_1\mathbf{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 - \mathbf{\nabla}p_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = p_1\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right) + \left(\rho_0\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}_1}{\partial t} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1\right) \quad \text{avec} \quad \rho_1 = \rho_0\chi_S p_1 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \chi_S p_1\frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}_1}{\partial t} \tag{2.7}$$

En prenant une constante d'intégration nulle (pas d'énergie sans onde) on en tire :

> L'énergie acoustique volumique s'exprime en deux termes :
>
> $$e(M,t) = \frac{1}{2}\chi_S p_1^2(M,t) + \frac{1}{2}\rho_0\vec{\mathbf{v}}_1^2(M,t) = e_p + e_c \tag{2.8}$$
>
> Le second terme correspond à l'énergie cinétique volumique, le premier au travail des forces de pression.

Remarque :

Dans le cas d'une OPPM on a :

$$p_1 = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \implies \vec{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\rho_0 c}f\left(t - \frac{x}{c}\right)\widehat{\mathbf{e}}_x \tag{2.9}$$

On a alors :

$$e_c = \frac{1}{2}\rho_0\vec{\mathbf{v}}_1^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_0 c^2}f^2\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{et} \quad e_p = \frac{1}{2}\chi_S p_1^2 \tag{2.10}$$

Or on a $c^2 = \frac{1}{\rho_0\chi_S}$, on obtient :

$$e_p = e_c \implies e = 2e_c = \frac{1}{\rho_0 c^2}f^2\left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{2.11}$$

De plus $\vec{\mathbf{\Pi}} = p_1\vec{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\rho_0 c}f^2\left(t - \frac{x}{c}\right)\widehat{\mathbf{e}}_x$ ainsi :

$$\vec{\mathbf{\Pi}} = ec\widehat{\mathbf{e}}_x \tag{2.12}$$

Notons c_e la vitesse de propagation de l'énergie. Soit une surface orientée $\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}$, l'énergie E contenue dans le volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}S\mathrm{d}tc_e$ est $E = e(\mathrm{d}S\mathrm{d}tc_e)$. Or $E = \vec{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}\mathrm{d}t$ il vient $c = c_e$. L'énergie se déplace à la vitesse de l'onde.

2.2 Notion d'intensité sonore

L'intensité acoustique I est définie comme $I = \left\langle \vec{\mathbf{\Pi}} \right\rangle_t$

OdG :

Sensibilité humaine à $4000\,\mathrm{Hz}$ entre 1×10^{-12} (seuil d'audition) et $1\,\mathrm{W/m^2}$ (seuil de douleur). À quels p_1 et $\vec{\mathbf{v}}_1$ cela correspond il ?
Pour une OPPH dans l'air : $\vec{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{\rho_0 c} p_1^2 \cos^2(\omega(t - \frac{x}{c}))\widehat{\mathbf{e}}_x$ et ainsi :

$$\left\langle \vec{\mathbf{\Pi}} \cdot \widehat{\mathbf{e}}_x \right\rangle_t = \frac{p_1^2}{2\rho_0 c} \tag{2.13}$$

Application numérique et retour sur les hypothèses :

Pour $I = 1\,\mathrm{W/m^2}$ avec $c = 340\,\mathrm{m/s}$ et $\rho_0 = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$ on trouve :

- $p_1 = 30\,\mathrm{Pa}$ ce qui correspond à une pression hydrostatique à une profondeur de $3\,\mathrm{mm}$. C'est cette surpression (qui paraît faible) qui fait mal aux tympans ! On a bien $p_1 \ll 1\,\mathrm{atm}$ ce qui confirme nos hypothèses.
- $|\vec{\mathbf{v}}_1| = 7 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s} \ll c$ ce qui confirme nos approximations.

(pour les appli num pour le seuil d'audition c'est les mêmes valeurs avec un facteur 1×10^{-6}).
I est audible sur 12 ordres de grandeurs ainsi on utilise généralement une échelle logarithmique :

$$I_{\mathrm{dB}} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{avec} \quad I_0 = 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2} \tag{2.14}$$

Petit problème, cf leçon des Cléments, une estimation du nombre de Reynolds donne 1×10^{-7} ce qui fait que la viscosité n'est pas du tout négligeable. Mais bon ça reste un modèle qui marche plutôt bien (cf. calcul de la vitesse du son dans l'air).

Application : modèle de la sphère pulsante On considère une sphère dont la membrane vibre en $R(t) = R_0 + a_0 \cos(\omega t + \phi)$. On va donc supposer cette sphère source d'ondes sphériques :

$$p_1(r,t) = \frac{1}{r} p_{1,m} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \tag{2.15}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \frac{p_{1,m}}{\rho_0 r c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\widehat{\mathbf{e}}_r + \frac{p_{1,m}}{\rho_0 r^2 \omega} \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\widehat{\mathbf{e}}_r \tag{2.16}$$

On suppose que l'on se place loin de la source donc on ne garde que le terme de champ lointain pour calculer la puissance :

$$\left\langle \vec{\mathbf{\Pi}} \right\rangle = \frac{p_{1,m}^2}{2\rho_0 c r^2} \widehat{\mathbf{e}}_r \tag{2.17}$$

Et on peut lier $p_{1,m}$ aux caractéristiques de la source avec la condition aux limites de non décollement (en ne gardant cette fois ci que le terme de champ proche) donne :

$$p_{1,m} = a_0 \rho_0 R_0^2 \omega^2 \tag{2.18}$$

Ainsi en intégrant $\vec{\mathbf{\Pi}}$ sur une sphère de rayon r on obtient la puissance rayonnée :

$$P = \frac{\pi a_0^2 \rho_0 R_0^4 \omega^4}{c} \tag{2.19}$$

Ainsi pour avoir une enceinte pouvant produire des basses de forte amplitude il faut un gros rayon !

> *Mais jusqu'ici on a tout décrit dans un seul milieu. Pourtant quand on est chez nous on sent que l'on est (plus ou moins) isolés acoustiquement de nos voisins et de l'extérieur. Comment évolue l'onde sonore au passage d'une interface ? On peut s'attendre comme en électromagnétisme à avoir des phénomènes de réflexion/transmission.*

3 Propriétés d'onde : réflexion et transmission

3.1 Impédance

Considérons que les grandeurs couplées sont p_1 et $\vec{\mathbf{v}}_1$ et plaçons nous dans le cas d'une OPP se propageant selon

$$p_1 = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \implies \vec{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\rho_0 c} f\left(t - \frac{x}{c}\right)\widehat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\rho_0 c} p_1 \widehat{\mathbf{x}}. \tag{3.1}$$

Le milieu peut être caractérisé par une constante appelée *impédance* :

$$Z = \frac{p_1}{\|\vec{\mathbf{v}}_1\|} = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} \tag{3.2}$$

Analogie C'est comme dans un câble coaxial.

$$\begin{aligned}
\text{Ondes acoustiques} &\iff \text{Câble coaxial}\\
\vec{\mathbf{v}}_1 &\iff i\\
p_1 &\iff u\\
\rho_0 &\iff \Gamma\\
\chi_S &\iff \Lambda\\
c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} &\iff c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}\\
Z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} &\iff Z = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}
\end{aligned}$$

3.2 Conditions aux limites

Lorsqu'une onde passe d'un milieu d'impédance Z_1 à un milieu d'impédance Z_2, $\vec{\mathbf{v}}_1$ et p_1 doivent vérifier des relations de continuité, en effet :

- Il ne peut pas y avoir de décollement de matière donc la vitesse doit être la même de chaque côté de l'interface
- Si on considère une tranche de fluide à l'interface, de section S et d'épaisseur $\mathrm{d}x$. Le PFD assure que la somme des forces extérieure est nulle donc $p_{\text{avant}} S - p_{\text{après}} S = 0$ d'où la continuité de p.

3.3 OPP en incidence normale sur un dioptre plan

On considère le cas d'une onde plane progressive en incidence normale sur un dipotre plan. On fait un schéma. L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise.

L'onde incidente, se propageant selon les x croissants s'écrit

$$p_i(x,t) = f(t - x/c_1) \tag{3.3}$$
$$\vec{\mathbf{v}}_i(x,t) = \frac{1}{Z_1} f(t - x/c_1)\widehat{\mathbf{x}} \tag{3.4}$$

L'onde réfléchie se propage selon les x décroissants :

$$p_r(x,t) = r f(t + x/c_1) \tag{3.5}$$
$$\vec{\mathbf{v}}_r(x,t) = -r\frac{1}{Z_1} f(t + x/c_1)\widehat{\mathbf{x}} \tag{3.6}$$

L'onde transmise se propage selon les x croissants :

$$p_t(x,t) = tf(t - x/c_2) \tag{3.7}$$
$$\vec{\mathbf{v}}_t(x,t) = t\frac{1}{Z_2}f(t - x/c_2)\widehat{\mathbf{x}} \tag{3.8}$$

On a définit les coefficients de réflexion et de transmission (en pression).

$$r = \frac{p_r}{p_i} = -\frac{v_r}{v_i} \tag{3.9}$$
$$t = \frac{p_t}{p_i} = \frac{Z_2}{Z_1}\frac{v_t}{v_i} \tag{3.10}$$

Les relations de passage donnent en $x = 0$

$$f(t) + rf(t) = tf(t) \implies 1 + r = t \tag{3.11}$$
$$\frac{1}{Z_1}f(t) - \frac{r}{Z_1}f(t) = \frac{t}{Z_2}f(t) \implies \frac{1}{Z_1} - \frac{r}{Z_1} = \frac{t}{Z_2} = \frac{1+r}{Z_2} \tag{3.12}$$

On obtient les mêmes expressions qu'en optique

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{3.13}$$

Les coefficients en énergie sont définis à partir des vecteurs de Poynting :

$$R = \frac{\left\|\vec{\mathbf{\Pi}}_r\right\|}{\left\|\vec{\mathbf{\Pi}}_i\right\|} \qquad T = \frac{\left\|\vec{\mathbf{\Pi}}_t\right\|}{\left\|\vec{\mathbf{\Pi}}_i\right\|} \tag{3.14}$$
$$R = r^2 = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \qquad T = \frac{Z_1}{Z_2}t^2 = 4\frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \tag{3.15}$$

Lorsque $Z_1 = Z_2$, il n'y a pas de réflexion c'est l'adaptation d'impédance, utilisée en échographie. Lorsque les impédances sont très éloignées (corps massif), on n'a pas de transmission. Un simple vitrage air-verre-air a une transmission de $T_1 = 2{,}5\,\mathrm{e} - 8$ donc une atténuation de 76 dB tandis qu'un double vitrage a une transmission $T_2 = T_1^2$ donc une atténuation de 152 dB.

Conclusion

Dans cette leçon on a décrit le comportement des ondes acoustiques et pu faire l'analogie entre de telles ondes et les ondes électromagnétiques.

Les ondes acoustiques ont également un intérêt métrologique de premier plan dans la thermométrie acoustique.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

•

4.2 Commentaires

•