LP27 Propagation guidée des ondes

6 juin 2021
Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L3

Bibliographie

✍ *Poly d'onde*, ⟶

Prérequis

- Électromagnétisme dans le vide
- Ondes électromagnétiques dans un plasma, dans un métal
- Optique géométrique

Expériences

- Haut parleur et guide en PVC
- fibre optique ou fontaine de Colladon

Table des matières

1 Guide d'onde entre deux plaques conductrices **2**
1.1 Présentation et mise en équation . . . 2
1.2 Base des solutions . . . 2
1.3 Mode TE . . . 2
1.3.1 Champ électrique . . . 2
1.3.2 Modes, relation de dispersion et pulsation de coupure . . . 3
1.3.3 Vitesses de phase et de groupe, dispersion . . . 3
1.3.4 Aspect énergétique . . . 4
1.4 Cas réel : mode TEM et guide d'onde rectangulaire . . . 4

2 Câble coaxial **5**
2.1 Présentation et mode TEM . . . 5
2.2 Modèle électrocinétique et propagation . . . 5
2.3 Cas réel : adaptation d'impédance t pertes dans le câble . . . 5

3 Fibre optique **6**
3.1 Présentation et approche géométrique . . . 6
3.2 Approche interférentielle . . . 7
3.3 Fibre à gradient d'indice . . . 8

4 Questions et commentaires **9**
4.1 Questions . . . 9
4.2 Commentaires . . . 9

Introduction

On a vu dans un cours précédent que l'on pouvait émettre de l'information de façon libre à l'aide d'antennes. Cette propagation d'information se fait avec une diminution de la puissance surfacique en $1/r^2$. Pour pouvoir transmettre un signal sur de longues distances et quand même être capable de le détecter à l'arrivée il faut donc trouver un moyen de réduire l'atténuation avec la distance. Cette atténuation provenait du fait que le signal couvrait plus de surface avec la distance et que l'énergie se conserve. Confiner les ondes dans un guide est donc une idée pour limiter cette atténuation. Cette problématique est fondamentale dans les télécommunications dont un exemple quotidien est l'Internet. On va étudier dans cette leçon les guides électromagnétiques.

1 Guide d'onde entre deux plaques conductrices

1.1 Présentation et mise en équation

Nous allons étudier une onde électromagnétique se déplaçant dans le vide mais confinée entre deux plans conducteurs infinis supposés parfaits situés en $x = 0$ et $x = a$.La direction de propagation se fait suivant l'axe $\widehat{\mathbf{e}}_z$. Cette propagation est régie par l'équation de d'Alembert :

$$\Delta\vec{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \vec{\mathbf{0}} \tag{1}$$

La présence des plaques imposent des conditions aux limites. Comme on l'a vu dans un chapitre précédent, une onde électromagnétique se réfléchit totalement sur un métal parfait. Ainsi à la surface du conducteur, la composante tangentielle du champ électrique et normale du champ magnétique sont nulles, on peut le résumer par :

$$\begin{cases} E_y(x=0,y,z) = E_y(x,a,y,z) = 0 \\ E_z(x=0,y,z) = E_z(x,a,y,z) = 0 \\ B_x(x=0,y,z) = B_x(x,a,y,z) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

On étudiera le cas d'une onde monochromatique progressive incidente selon les z croissants, que l'on écrira sous la forme générale :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E_0}}(x,y,z)\exp(i(\omega t - k_z z)) \tag{3}$$

Le système est invariant par translation selon y et z. On a donc :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E_0}}(x)\exp(i(\omega t - k_z z)) \tag{4}$$

On injecte donc le champ dans l'équation de d'Alembert ce qui nous donne :

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathbf{E_0}}}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\vec{\mathbf{E_0}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{5}$$

1.2 Base des solutions

En écrivant l'équation de Maxwell-Faraday on peut montrer que les champs E_y, B_x et B_z sont couplés ainsi que E_x, E_z et B_y, et que les couplages sont indépendants. On peut donc étudier séparément les modes dits TE (pour Transverse Électrique) où le champ électrique est transverse à la direction de propagation (mais à priori pas $\vec{\mathbf{B}}$) et TM. Les modes TE et TM forment une base de solutions de la propagation des ondes dans un guide d'onde uniaxe. Par la suite nous allons étudier le mode TE.

1.3 Mode TE

1.3.1 Champ électrique

Vu que l'on étudie le mode TE le champ électrique peut s'écrire :

$$\vec{\mathbf{E}} = E_0(x)\exp(i(\omega t - k_z z))\widehat{\mathbf{e}_\mathbf{y}} \tag{6}$$

L'équation de propagation est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_0}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)E_0 = 0 \tag{7}$$

Les conditions aux limites s'écrivent dans notre cas $E_0(0) = E_0(a) = 0$. Il faut discuter du signe de $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$.

- $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 < 0 \implies E_0(x) = A\exp(Kx) + B\exp(-Kx)$ et elle doit s'annuler deux fois donc le champ est nul.
- $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = 0 \implies E_0(x) = ax + b$ or la solution doit s'annuler deux fois, ainsi le champ est nul également.
- $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 > 0 \implies E_0(x) = A\exp(iKx) + B\exp(-iKx)$ on va voir ce que les conditions aux limites impliquent.

On a donc :

$$E_0(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B \tag{8}$$

$$E_0(a) = 0 \implies A(\exp(iKa) - \exp(-iKa)) = 0 \implies \sin(Ka) = 0 \implies K = \frac{p\pi}{a}, p \in \mathbb{N} \tag{9}$$

On a ainsi :

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} = E_{0p}\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - k_z z)\widehat{\mathbf{e}_\mathbf{y}}, p \in \mathbb{N}} \tag{10}$$

On peut représenter la forme de $E_0(x)$ au tableau pour quelques p pour discuter de ce que l'on vient de trouver.

1.3.2 Modes, relation de dispersion et pulsation de coupure

Prenons un peu de recul sur le résultat que l'on vient de trouver. La présence de conditions aux limites a modifié la forme du champ : la propagation guidée d'une onde électromagnétique par les deux plans impose une quantification des solutions.

On a une famille discrète de solutions, appelés *modes*. Pour chaque entier p non nul correspond un mode TE_p tel que :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \tag{11}$$

À chaque mode correspond une pulsation de coupure : en effet on a propagation du mode ssi $k_z > 0$ soit $\omega > \frac{p\pi c}{a} = \omega_{c,p}$. La condition en terme de fréquence ou de longueur d'onde est la suivante :

$$\boxed{f > f_{c,p} = \frac{pc}{2a} \text{ ou } \lambda < \lambda_{c,p} = \frac{2a}{p}} \tag{12}$$

Le guide d'onde est un passe-haut. En effet sa relation de dispersion ressemble à celle trouvée dans le cas d'un plasma, qui est également un milieu passe-haut. Si la pulsation de l'onde incidente ne dépasse pas celle de coupure, l'onde ne se propage pas dans le guide (onde évanescente).

Remarque : une application numérique donne pour $a = 3\,\mathrm{cm}$ et $p = 1$ on trouve $f_{c,1} = 5\,\mathrm{GHz}$ ce qui correspond à une longueur d'onde de 6 cm (ondes centimétriques).

1.3.3 Vitesses de phase et de groupe, dispersion

La vitese de phase de l'onde est donnée par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k_z)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,p}}{\omega}\right)^2}} \tag{13}$$

La vitesse de phase est donnée par :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,p}}{\omega}\right)^2} \tag{14}$$

La vitesse de phase dépend de ω ainsi le milieu est *dispersif*. C'est la vitesse de groupe qui est la vitesse de propagation de l'énergie.

On trace sur la figure 1 les vitesses de phase et de groupes de différents modes en fonction de ω.

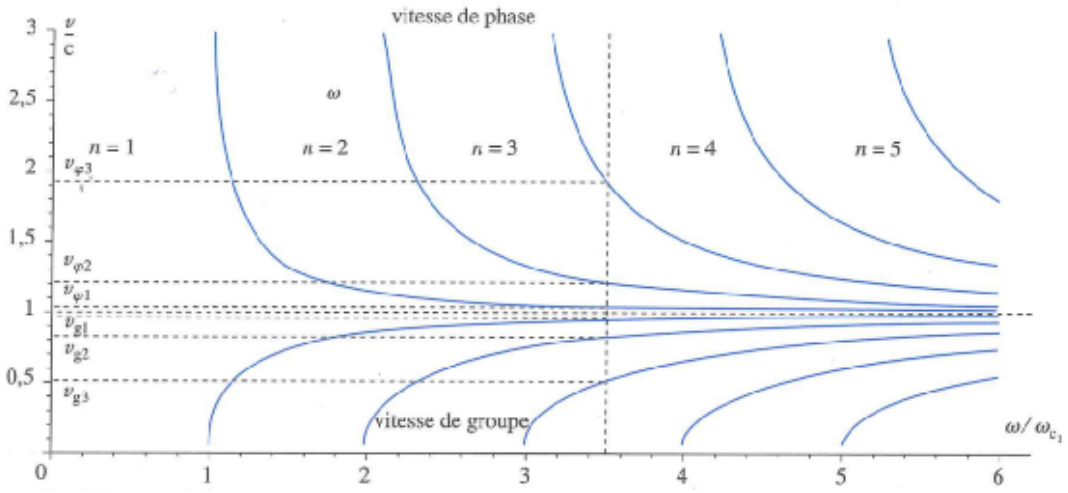

FIG. 1 : Vitesses de phase et de groupe de modes TE dans le guide d'onde

Pour une valeur de ω donnée il existe plusieurs modes de propagation possibles (ici trois) correspondant à des valeurs de k_z différentes et donc à des vitesses différentes, ceci induit de la *dispersion intermodale.* qui est due aux *conditions aux limites.* Si l'on envoie un signal sur deux modes chacun des modes arrivera en bout de guide à un temps différent ce qui rend difficile la trasmission de signaux sur plusieurs modes.

1.3.4 Aspect énergétique

On peut calculer le champ magnétique, on trouve :

$$\vec{\mathbf{B}} = -\frac{E_{0p}k_z}{\omega}\left(\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - k_z z)\widehat{\mathbf{e_x}} + \frac{p\pi}{k_z a}\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - k_z z)\widehat{\mathbf{e_z}}\right) \tag{15}$$

Le vecteur de Poynting vaut $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}$. On peut calculer sa valeur moyenne :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_{0p}k_z}{2\mu_0\omega}\sin^2\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\widehat{\mathbf{e_z}} \tag{16}$$

L'énergie se propage bien selon $\widehat{\mathbf{e_z}}$, sans atténuation.

1.4 Cas réel : mode TEM et guide d'onde rectangulaire

L'idéal serait d'avoir une relation de dispersion de la forme $k_z = \dfrac{\omega}{c}$ et donc de n'avoir aucune dispersion et propagation à la vitesse c. Cette propagation se fait pour un mode particulier appelé mode TEM (pour transverse électromagnétique). Dans ce mode le champ est sous la forme :

$$\vec{\mathbf{E}} = E_0\exp(i(\omega t - k_z z))\widehat{\mathbf{e_y}}, \vec{\mathbf{B}} = B_0\exp(i(\omega t - k_z z))\widehat{\mathbf{e_x}} \tag{17}$$

Ce mode est particulièrement intéressant car il y a possibilité de transmission d'information sans dispersion. Seul le mode TEM peut satisfaire ces conditions. On parle alors de guide monomode car seul le mode à $p = 0$ se propage.

Qu'en est il en réalité ? Un guide tel qu'on l'a décrit ici est impossible à réaliser en pratique. La géométrie réalisable la plus proche est celle des guides d'ondes rectangulaires creux. On rajoute deux plaques conductrices en $y = 0$ et $y = b$. La propagation guidée y est toujours possible mais les modes TEM dans cette géométrie ne sont plus possibles. Ils sont utilisés dans les micro ondes et certains équipements radars.

> *Le cable coaxial que l'on utilise souvent en TP est un guide d'onde cylindrique dans lequel on a inséré un autre conducteur. Il permet la propagation de modes TEM qui sont ceux que l'on observe dans le cable.*

2 Câble coaxial

2.1 Présentation et mode TEM

Un câble coaxial est constitué d'une âme conductrice, souvent en cuivre, entourée d'un diélectrique isolant (polyéthylène) de permittivité relative ε_r, de rayon intérieur a et extérieur b. Une enveloppe métallique enveloppe en aluminium enveloppe le diélectrique, le tout étant protégé par une gaine en PVC pour protéger le câble du milieu environnant. L'intérêt du cable coaxial parrapport à un cable électrique simple est qu'il a moins de pertes à haute fréquences, qu'il guide mieux l'énergie et que les champs extérieurs n'ont quasiment aucune influence sur son comportement. Ces câbles permettent la propagation du mode TEM comme expliqué précédemment, ce que nous allons étudier.

L'étude en coordonnées cylindrique est possible mais les calculs sont beaucoup plus compliquées même si la méthode reste la même. Ici aussi il y a quantification et présence de fréquences de coupures pour les modes TE et TM. Ces fréquences de coupure peuvent s'exprimer ainsi :

$$f_{c,TE} = \frac{c}{\pi(b-a)}, f_{c,TM} = \frac{c}{\pi(b+a)} \tag{18}$$

La fréquence de coupure la plus basse est celle du mode TM et est d'environ 9.5 GHz pour un câble utilisé en TP. En pratique on utilise des ondes de fréquences maximales de quelques MHz, on peut donc bien considérer le câble coaxial comme un guide monomode dans cette gamme de fréquences.

On peut présenter le câble coaxial avec un modèle unidimensionnel électrocinétique.

2.2 Modèle électrocinétique et propagation

On suppose la ligne sans perte et on considère la propagation du mode TEM, on se place donc à relativement basse fréquence donc dans l'ARQS.

On va étudier le câble en étudiant la propagation de la tension U et du courant$i$. La tension est reliée à la circulation du champ électrique tandis que le courant provient de la discontinuité du champ magnétique à la surface de l'isolant.

On peut alors montrer que le câble se modélise par une inductance linéique Λ et une capacité linéique Γ, ce modèle est dit à constantes réparties. On a :

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right), \Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{19}$$

On prends un bout de câble infinitésimal compris entre x et $x+\mathrm{d}x$, qui se modélise par une inductance dans l'âme et une capacité entre l'âme et la gaine. En faisant une loi des noeuds et une loi des mailles, on obitent l'équation suivante pour U (et la même pour i) :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \Gamma\Lambda\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{20}$$

On obtient une équation de d'Alembert, l'onde se propage donc dans le cable à la vitesse $c = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$.

Ordre de grandeur : On trouve, avec $\varepsilon_r \simeq 2.25$, $c \simeq 2\times10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

2.3 Cas réel : adaptation d'impédance t pertes dans le câble

Dans la pratique la transmission d'information se fait entre un émetteur et un récepteur. On modélise le récepteur par une impédance de sortie Z. L'impédance caractéristique du câble est

$$Z_c = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}. \tag{21}$$

En ajoutant l'impédance en fin de câble il peut y avoir transmission ou réflexion de l'onde. Le coefficient de réflexion en amplitude ρ vaut :

$$\rho = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} \tag{22}$$

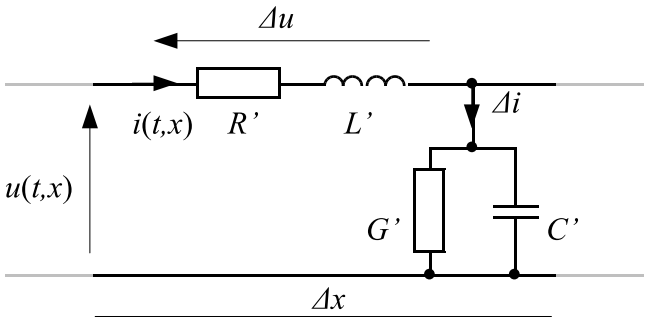

Fig. 2 : Modèle des constantes réparties avec pertes

Quand le câble est en court-circuit ou ouvert, la réflexion est totale. Quand $Z = Z_c$ toute la puissance est transmise : $\rho = 0$, il y a *adaptation d'impédance*.

On peut également modéliser les pertes dans les câbles, elles sont dues à l'effet Joule dans les conducteurs et aux pertes de charges dans l'isolant

On obtient alors comme équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \Gamma\Lambda\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = rgU + (r\Gamma+)\frac{\partial U}{\partial t} \tag{23}$$

En vérifiant la condition de Heaviside $r\Gamma = g\Lambda$ on peut avoir propagation sans absorption mais avec atténuation. Cette atténuation est la deuxième caractéristique électrique du câble coaxial.

Ordre de grandeur de l'atténuation : L'amplitude du signal en entrée est notée ϕ_e et en sortie ϕ_s, on définit alors l'atténuation en décibel par unité de distance par la formule $A = \frac{1}{L(\text{km})} 20 \log\left(\frac{\phi_s}{\phi_e}\right)$. Pour un câble coaxial cette valeur est d'environ 5 dB/km.

En conclusion le câble coaxial est un mode de propagation d'information efficace pour les signaux de basse fréquence et pour des distances de l'ordre de la centaine de mètres.

On va maintenant s'intéresser à un mode de propagation efficace à longue distance : la fibre optique.

3 Fibre optique

3.1 Présentation et approche géométrique

Guidage optique par un jet d'eau

On remplit un vase de Mariotte d'eau (suffisamment pour avoir un bon débit) et on ouvre le robinet qui crée un filet d'eau par réflexion totale à l'interface entre l'eau et l'air qui ont des indices optiques différents.

L'intérêt pour la fibre optique est apparu grâce à l'invention du laser qui donne la possibilité de transmettre un signal sur de longues distances avec des pertes limitées. On passe de $20\,\text{dB}\,\text{km}^{-1}$ en 1970 à $0.2\,\text{dB}\,\text{km}^{-1}$ en 1979. On utilise du verre en silice, de grande pureté car les impuretés sont responsables de l'atténuation dans les fibres optiques.

On va étudier la fibre à saut d'indice, le modèle le plus simple. Elle est composée d'un cœur cylindrique, formé d'un matériau transparent d'indice n_1 et de diamètre a. Ce cœur est entouré d'une gaine transparente d'indice n_2 avec $n_1 > n_2$ pour pouvoir avoir de la réflexion totale et guider les rayons lumineux. Un rayon avec un angle θ est réfléchi successivement sur chaque bord du cœur et est guidé dans la fibre.

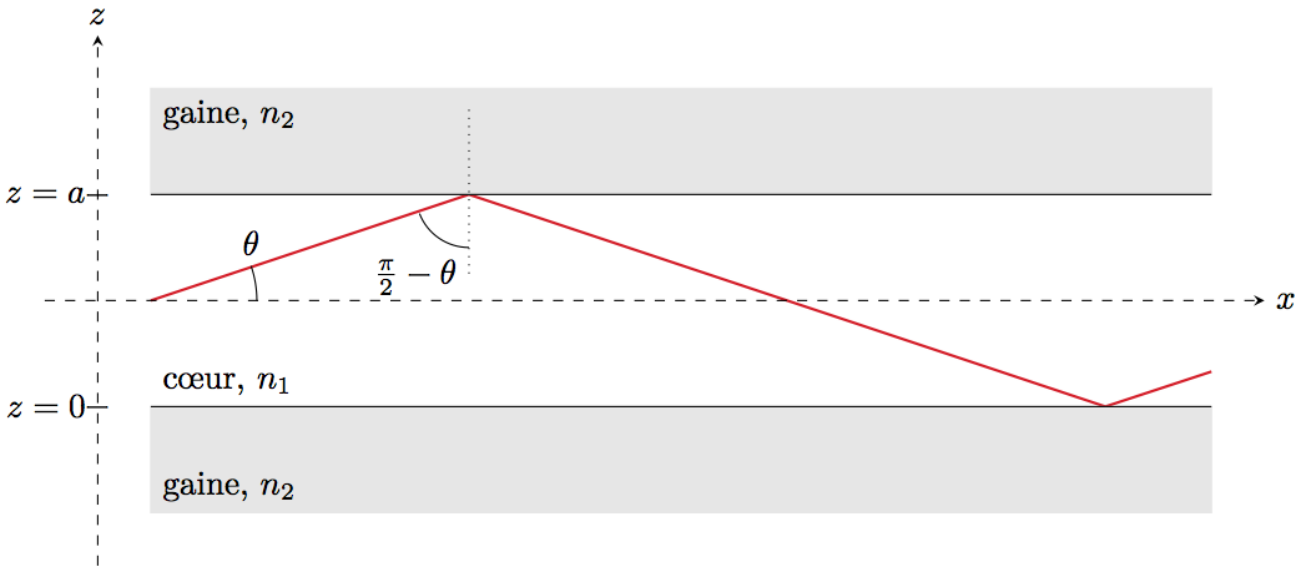

FIG. 3 : Schéma d'une fibre à saut d'indice.

Pour avoir une réflexion totale on doit donc avoir

$$\cos(\theta) > \frac{n_2}{n_1} \tag{24}$$

Ce sont les conditions aux limites qui permettent le guidage du rayon lumineux mais cette approche purement géométrique ne suffit pas pour décrire le comportement de la propagation guidée.

3.2 Approche interférentielle

On va appliquer un raisonnement d'interférences constructives entre des ondes planes qui est un raisonnement avec les mains. Il est justifié par des calculs bien plus lourds et permet de trouver rapidement la condition de propagation. Il ne faut pas lui faire dire plus que la condition de propagation. Notamment il ne dit rien de ce qui se passe si on force en entrée une onde qui ne peut se propager dans la fibre.

On associe à chaque rayon une onde plane et on considère que le rayon qui se propage sans atténuation est issue d'interférences constructives. On considère une onde incidente émise par une source S_0. Après une première réflexion l'onde réfléchie semble provenir de S_1 symétrique de S_0 par rapport à l'interface, après deux réflexions elle semble provenir de S_2 symétrique de S_1 par rapport à la seconde interface. On considère l'onde comme une superposition de deux ondes planes issues de S_0 et S_2. Ces deux ondes sont séparées de $2a$ la différence de phase entre ces deux ondes planes est alors

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_1 a \sin(\theta). \tag{25}$$

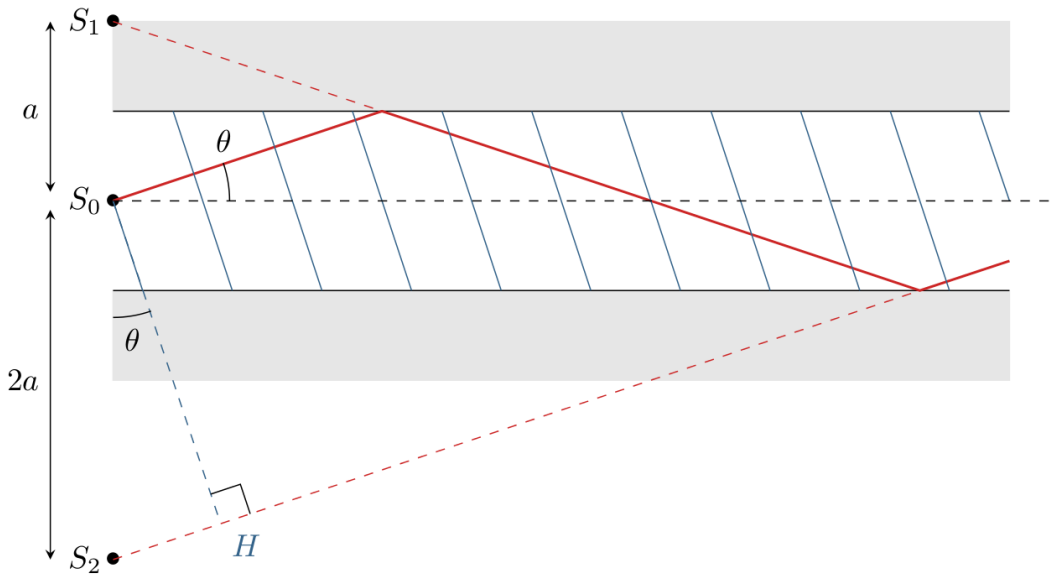

FIG. 4 : Modèle interférentiel de la propagation

On obtient

$$\sin(\theta_p) = \frac{p\lambda}{2an_1}, p \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Seuls certains angles d'incidences θ_p peuvent se propager dans la fibre, ce sont les *modes de la fibre*. Le vecteur d'onde selon z qui caractérise la propagation est alors

$$k_z^p = n_1 \frac{\omega}{c} \cos(\theta_p) = \sqrt{\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2} \tag{27}$$

Cette relation de dispersion est analogue à celle du guide d'onde rectangulaire, c'est une relation de Klein-Gordon.

En combinant les propriétés de l'onde propagée on a une condition sur l'ordre maximal d'un mode que peut emprunter une onde de longueur d'onde λ.

$$p < p_{\max} = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1} \frac{2a}{\lambda} \tag{28}$$

Ordre de grandeur : si on veut un guide monomode, on veut $p_{\max} = 2$ On a alors

$$(n_1 - n_2)(n_1 + n_2) = \frac{2^2\lambda^2 n_1^2}{4a^2} \tag{29}$$

Ce qui donne pour $n_1 \simeq n_2 \sim 1.5 \times 10^{-2}, \lambda \sim 1\,\mu\text{m}, a \simeq 10\,\mu\text{m}$ une différence d'indice $n_1 - n_2 \sim 10^{-2}$. Les indices doivent être très proches !.

Dans ce cas le guide est monomode et la dispersion est uniquement intramodale, due à la loi de Cauchy et le fait que les trains d'ondes ne sont pas monochromatiques et donc s'élargissent avec la propagation.

3.3 Fibre à gradient d'indice

On peut réaliser une fibre à gradient radial d'indice qui courbe les rayons selon l'équation éikonale. La fibre est alors multimode mais les différents modes parcourent le même chemin optique et il n'y a donc pas de dispersion intermodale.

Les fibres optiques sont largement employées pour les télécommunications entre les continents. On utilise des répétiteurs pour que le signal puisse traverser les milliers de kilomètre malgré l'atténuation non nulle.

Conclusion

Dans cette leçon on a pu décrire le principe d'un guide d'onde qui permet de propager sur de longues distances de l'information transportée par une onde. Les guides d'ondes contraignent la forme de l'onde par leurs conditions aux limites. Les ondes se propagent dans les guides par des modes propres au guide d'onde. Les conditions aux limites peuvent introduire une dispersion supplémentaire à celle du aux milieu : la dispersion intermodale. On a réduit l'étude aux guides d'ondes électromagnétiques mais on peut penser aux guides d'ondes acoustiques (stéthoscope, stratification océanique, entre fond et surface libre).

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-