

Ondes en physique

Préparation à l'agrégation de l'ENS de Lyon 2020-2021



Jérémy Ferrand

Bibliographie et épreuves

Bibliographie classique

- H Prépa - Ondes, J.M. Brébec.
- Dunod - Tout en un PC-PC*, M.N. Sanz.
- La physique par la pratique, B. Portelli.
- Optique physique, R Taillet.
- Ondes électromagnétique dans le vide et les conducteurs, C. Garing.
- Vibration, propagation, diffusion. M.Soutif.
- Ondes mécaniques et diffusion, C. Garing.
- Cap Prépa - PSI-PSI* - V. Renvoizé
- BUP 649 - Propagation des ondes : vitesse de phase, vitesse de groupe. B. Lahaye.

Épreuves d'agrégation lié aux ondes

- Épreuve A 1998 : Ondes sonores dans les fluides.
- Épreuve A 1999 : Ondes de surface dans un liquide.
- Épreuve A 2003 : Propagation guidée.
- Épreuve A 2004 : Ondes dans les fluides.
- Épreuve A 2005 : Ondes en mécanique quantique.
- Épreuve A 2007 : Ondes électromagnétique.
- Épreuve A 2008 : Ondes dans un câble coaxial.
- Épreuve A 2009 : Ondes des instruments de musique.
- Épreuve A 2013 : Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait.
- Épreuve A 2014 : Acoustique sous-marine.
- Épreuve C 2007 : Ondes électromagnétiques dans les plasmas.
- Épreuve C 2014 : diffraction de Bragg, description matricielle de la propagation dans un matériau multi-couche.

Remarques

Ce cours pour la première année, s'inspire du cours de 2015 de E.Thibierge ainsi que ceux de 2016 à 2018 de P.Maurer et J.Y.Chastaing que je remercie pour leur précédent travail. Ce cours sera voué à évoluer dans les futures années.

Table des matières

1	Description et mise en équation d'ondes	7
1.1	Qu'est-ce qu'une onde	7
1.1.1	Exemples de propagation d'onde	7
1.1.2	Caractérisation d'un phénomène ondulatoire	13
1.1.3	Équation de propagation	14
1.2	Plusieurs types d'onde	14
1.2.1	Ondes planes	14
1.2.2	Ondes sphériques	16
1.3	Relation de structure et indépendance propagative	16
1.3.1	Cas de deux grandeurs couplées scalaires	17
1.3.2	Cas où une grandeur couplée est vectorielle	18
1.3.3	Cas où les deux grandeurs couplées sont vectorielles	18
2	Propagation libre et non-dispersive	19
2.1	Interface entre deux milieux	19
2.1.1	Réflexion en bout de ligne fermée par une impédance terminale	19
2.1.2	Réflexion et transmission	22
2.2	Paquets d'ondes	23
2.2.1	L'onde plane progressive harmonique : la brique élémentaire	23
2.2.2	Paquet d'ondes à une dimension	25
2.2.3	Propagation d'un paquet d'onde	27
2.3	Ondes stationnaires	29
2.3.1	Définition et propriétés	30
2.3.2	Oscillations libres de la corde de Melde	31
2.3.3	Oscillations forcées d'une corde de Melde	33
2.3.4	Remarques finales sur la corde de Melde	35
3	Propagation dans un milieu complexe	37
3.1	Des équations de propagation plus aussi simples	37
3.1.1	Chaîne de pendules couplés	37
3.1.2	Équation des télégraphistes	39
3.2	Solutions et caractéristiques de telles équations	40
3.2.1	Onde plane pseudo-progressive harmonique	40
3.2.2	Relation de dispersion	40
3.2.3	Dispersion et absorption	41
3.2.4	Cas particulier de l'équation de Klein-Gordon	41
3.2.5	Dispersion, atténuation ou les deux ?	43
3.3	Propagation d'un paquet d'onde en présence de dispersion	47
3.3.1	Premier ordre : glissement de phase	47
3.3.2	Second ordre : propagation de l'enveloppe	48

3.3.3	La vitesse de groupe : limites	53
3.3.4	Compensation de la dispersion par des non-linéarités	54
4	Influence des conditions aux limites	55
4.1	Un exemple simple : la fibre optique	55
4.2	Approche géométrique	55
4.3	Approche interférentielle : modes de propagation	56
4.3.1	Dispersion lors de la propagation dans la fibre optique	58
4.3.2	Synthèse de la propagation guidée	58
4.4	Modes TE et TM dans un câble coaxial	59
4.4.1	Propagation du mode TEM dans le câble coaxial	62
4.5	Guide d'ondes acoustiques : instruments à vent	65
4.5.1	Modes propres de la cavité	65
4.5.2	Propagation dans une cavité de longueur finie. Impédance.	67
4.6	Ondes à une interface : ondes gravito-capillaires	69

Chapitre 1

Description et mise en équation d'ondes

Ce premier chapitre permet de faire le point sur l'ensemble des phénomènes ondulatoires qu'un étudiant peut voir au cours de sa scolarité. Le tout est d'unifier la propagation des ondes pour tous les domaines de la physique où elles apparaissent. Ceci va consister principalement en des rappels mais avec des thématiques assez différentes.

1.1 Qu'est-ce qu'une onde

1.1.1 Exemples de propagation d'onde

Afin de poser le problème et définir ce qu'est une équation d'onde, commençons par prendre une liste d'exemples dans divers domaines de la physique où des ondes apparaissent. Ces domaines sont très différents avec des équations de bases et des concepts différents mais nous allons aboutir à des équations similaires.

Modèle électrocinétique du câble coaxial

Un câble coaxial se compose comme son nom l'indique de deux conducteurs cylindriques de même axe, l'âme et la gaine, séparés par un isolant. Il est possible d'effectuer le calcul de propagation des ondes électromagnétiques le long du câble mais cela ne nous intéresse pas pour ce paragraphe. Parmi les ondes qui se propagent, certaines (le mode Transverse Électrique Magnétique - TEM) peuvent être décrites par un modèle de type électrocinétique. Dans ce cadre, le câble vérifie localement des équations identiques à celles obtenues dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires de l'électromagnétisme, ce qui permet une étude électrocinétique. Nous insistons bien que ce modèle électrocinétique que l'on va décrire ici, à constantes réparties, décrit uniquement le mode TEM.

Comme représenté sur la FIGURE 1.1, une portion de câble de taille mésoscopique de longueur dx se modélise par un circuit LC (en négligeant la dissipation) constitué :

- d'une bobine, d'inductance Λdx , qui modélise les phénomènes d'induction ayant lieu entre l'âme et la gaine qui sont parcourues par des courants dépendant du temps,
- d'un condensateur de capacité Γdx , qui modélise les phénomènes capacitifs ayant lieu entre deux conducteurs qui se font face.

On peut alors appliquer la loi des mailles à ce circuit et remplacer la tension aux bornes de la bobine par la formule d'électrocinétique pour trouver :

$$u(x + dx, t) + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) - u(x, t) = 0 \quad (1.1)$$

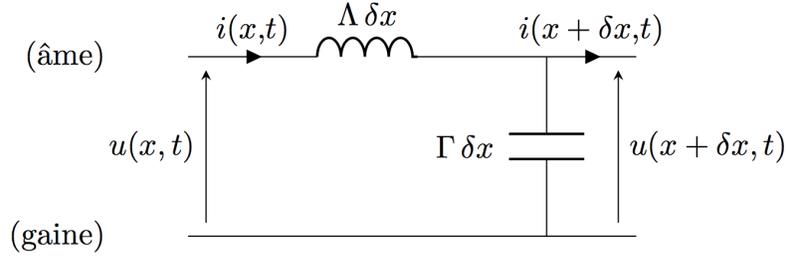


FIGURE 1.1 – Modèle à constantes réparties du câble coaxial

Dans la limite où dx est petit, on peut effectuer un développement limité et dire que $u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dx$. Ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \quad (1.2)$$

On peut alors appliquer la loi des nœuds et remplacer l'expression du courant dans le condensateur par les lois de l'électrocinétique :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx, t) \quad (1.3)$$

Et de même dans la limite des petits dx on a :

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (1.4)$$

On obtient alors deux équations différentielles couplées. Il est alors possible de les découpler facilement en dérivant¹ l'une par rapport à x et l'autre par rapport à t et on obtient alors l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}}} \quad (1.5)$$

Ordres de grandeur : On a $\Gamma \sim 100$ pF/m et $\Lambda \sim 0.15$ μ H/m soit une vitesse $c \sim 3.10^8$ m/s.

Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$(1.10)$$

En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday on a :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} = -\frac{\partial (\nabla \wedge \mathbf{B})}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

1. Les dérivées par rapport au temps et à la position commutent toujours en physique.

Et donc on tombe sur la même équation que précédemment mais à 3 dimensions :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1.12)$$

La valeur de μ_0 est fixée par la force exercée entre deux fils parcourus par les mêmes courants et ϵ_0 est fixé par la valeur de la vitesse de la lumière avec la relation $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$.

Ondes sonores dans un solide élastique

Les ondes sonores ont besoin d'un support matériel pour se propager. Il peut être solide ou fluide et les approches peuvent être différentes. Regardons ce qui se passe dans le cas d'un solide. Dans le cas de la propagation d'ondes de compression dans un solide, les déformations sont suffisamment faibles pour que la loi de Hooke soit valable. Celle-ci est la théorie linéaire de la déformation des solides et affirme que si on tire avec une force F à une extrémité d'un solide de section S , l'allongement relatif vaut :

$$\epsilon = \frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad (1.13)$$

où E est un coefficient phénoménologique (comme pour la loi de Fourier ou de Fick) appelé module d'Young du solide.

Cherchons alors une équation aux dérivées partielles caractérisant la propagation d'une compression au sein du solide. On note $\chi(x, t)$ le champ des déformations longitudinales. Considérons alors une tranche mésoscopique de solide de section S et de longueur au repos dx . L'allongement de l'élément solide vaut alors :

$$\delta \ell = (x + dx + \chi(x + dx, t)) - (x + \chi(x, t) - dx) = \chi(x + dx, t) - \chi(x, t) \quad (1.14)$$

Connaissant alors l'allongement du solide, estimons la force exercée par la partie à droite en $x + dx$ sur la partie gauche en x à l'abscisse x à l'instant t . Le solide est toujours considéré comme un milieu continu et obéit donc à la loi de Hooke, ainsi :

$$\mathbf{F}(x, t) = ES \frac{\chi(x + dx, t) - \chi(x, t)}{dx} \mathbf{e}_x \quad (1.15)$$

Le sens du vecteur s'obtient simplement en disant que le solide est allongé si on tire dessus. Ainsi dans la limite des faibles dx alors on obtient :

$$\mathbf{F}(x, t) = ES \frac{\partial \chi}{\partial x}(x, t) \mathbf{e}_x \quad (1.16)$$

Appliquons désormais le principe fondamental de la dynamique au morceau de solide. En notant ρ la masse volumique du solide et x_G la position de son centre de masse dont on ne connaît pas *a priori* sa position on a :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(x_G, t) = -F(x, t) + F(x + dx, t) \quad (1.17)$$

et donc dans la limite des faibles dx on a :

$$\rho S \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(x_G, t) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \quad (1.18)$$

Et donc on obtient en combinant les deux équations :

$$\rho S \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \quad (1.19)$$

et donc de la même forme que précédemment :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (1.20)$$

Ordres de grandeur : Pour le fer on a $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$ et $E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ce qui donne une vitesse du son de l'ordre de $c = 5000 \text{ m/s}$.

Ondes dans les fluides

On se place dans un fluide au repos de pression uniforme P_0 et de masse volumique uniforme ρ_0 soumis à de perturbations de vitesse, de densité et de pression : \mathbf{v}_1 , ρ_1 et p_1 .

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_1(x, t) \quad (1.21)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1(x, t) \quad (1.22)$$

$$p(x, t) = p_0 + p_1(x, t) \quad (1.23)$$

Nous travaillerons dans le cadre de l'*approximation acoustique* (perturbations infinitésimales) afin de pouvoir linéariser les équations. La propagation d'ondes sonores étant faiblement amortie, nous négligerons tous les phénomènes dissipatifs (conduction thermique, viscosité). L'écoulement sera donc supposé parfait c'est-à-dire adiabatique réversible, donc **isentropique**.

L'équation d'Euler se réécrit sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (1.24)$$

$$(\rho_0 + \rho_1) \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \right) = -\nabla(p_0 + p_1) + \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (1.25)$$

soit, en négligeant les forces extérieures comme le poids et en ne gardant que les termes du premier ordre (les termes d'ordre 0 correspondent à l'équilibre) :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 \quad (1.26)$$

L'équation de conservation de la masse donne :

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho_1) \mathbf{v}_1) = 0, \quad (1.27)$$

Soit en ne gardant que les termes du premier ordre :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (1.28)$$

L'évolution du fluide étant isentropique, on utilise le coefficient de compressibilité isentropique, défini par :

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{dV}{dP} \right|_S = \frac{1}{\rho} \left. \frac{d\rho}{dP} \right|_S \simeq \frac{1}{\rho} \frac{\rho - \rho_0}{p - p_0} \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{p_1} \quad (1.29)$$

Et donc on obtient la relation :

$$\rho_1 = \rho_0 \chi_S p_1 \quad (1.30)$$

On a :

$$d\rho = \rho \chi_S dP \quad (1.31)$$

Nous avons alors un problème couplant 5 inconnues et 5 équations différentielles. En combinant les équations différentielles, on vérifie que la surpression (et les autres inconnues) vérifient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \Delta p_1 = 0 \quad (1.32)$$

qui est toujours de la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_S}}} \quad (1.33)$$

La célérité peut se réécrire :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad \text{en utilisant la loi de Laplace } P\rho^{-\gamma} = \text{cste}. \quad (1.34)$$

Dans le cas d'un gaz parfait la célérité vaut

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{\mathcal{M}}} \quad (1.35)$$

Ordres de grandeur : La masse molaire de l'air est $\mathcal{M} = 29$ g/mol et $\gamma = 1.40$. À 300 K, on obtient une célérité de $c = 340$ m/s.

Corde vibrante

Considérons une corde possédant une masse linéique μ . Cette corde est maintenue tendue à l'horizontale et on néglige la pesanteur qui modifie peu la forme de la corde. On étudie le mouvement de la corde que dans le plan vertical et on suppose que le mouvement reste à deux dimensions. L'axe Ox est l'axe horizontal et Oy l'axe vertical vers le haut. On note alors :

- $\psi(x, t)$ le déplacement transversal de la corde de l'abscisse x à la date t ;
- $\alpha(x, t)$ l'angle de la tangente à cette corde avec l'horizontale en x à la date t .

Par définition on a sur une tranche de corde dx :

$$\tan \alpha(x, t) = \frac{\psi(x + dx) - \psi(x)}{dx} \quad (1.36)$$

Or on supposera que l'angle α est suffisamment petit (faibles déformations) et quand dx tend vers 0 on a :

$$\alpha(x, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) \quad (1.37)$$

On repère un point sur la corde par l'abscisse curviligne ds et on a :

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\psi^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2} \simeq dx \quad (1.38)$$

car les perturbations verticales sont suffisamment faibles. Ainsi l'abscisse curviligne peut être confondue avec l'abscisse horizontale à un terme d'ordre 2 près.

Notons $T(x, t)$ la tension de la corde existant en x à la date t , et étudions le système de forces s'exerçant sur un élément de corde de longueur dx . Nous supposons que la corde est sans raideur c'est-à-dire qu'elle n'oppose aucune résistance à sa torsion. Dans ces conditions, les diverses forces sont tangentes à la corde. Appelons $\mathbf{F}(x, t)$ la force exercée à l'instant t par la partie de corde d'abscisse inférieure à x sur la partie d'abscisse supérieure à x .

Si on considère un élément de corde de longueur dx , situé entre x et $x + dx$ sur cet élément de corde :

- la partie de corde d'abscisse inférieure à x exerce sur cet élément la force :

$$\mathbf{F}_1 = +\mathbf{F}(x, t) = T(x, t)\mathbf{u}_1 \quad (1.39)$$

- la partie de corde d'abscisse supérieure à $x + dx$ exerce sur cet élément la force :

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}(x + dx, t) = T(x + dx, t)\mathbf{u}_2 \quad (1.40)$$

\mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont des vecteurs unitaires tangents à la corde respectivement en x et $x + dx$ à la date t .

Compte tenu de l'approximation des faibles perturbations ($\cos \alpha \simeq 1$ et $\sin \alpha \simeq \alpha$), \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 ont pour composantes :

- sur (Ox) :

$$F_{1x} \simeq -T(x, t) \quad \text{et} \quad F_{2x} \simeq +T(x + dx, t); \quad (1.41)$$

- sur (Oy) :

$$F_{1y} = +F_y(x, t) \simeq -T(x, t)\alpha(x, t) \quad (1.42)$$

et

$$F_{2y} = -F_y(x + dx, t) \simeq T(x + dx, t)\alpha(x + dx, t) \quad (1.43)$$

Les mouvements d'un élément de corde de longueur dx sont transverses. L'application de la relation fondamentale de la dynamique, à l'élément de corde de longueur dx , donne en projection sur (Ox) :

$$T(x + dx, t) - T(x, t) = 0 \quad \text{soit} \quad T(x + dx, t) = T(x, t) = T_0(t) \quad (1.44)$$

À une date t , la tension T de la corde est donc uniforme le long de celle-ci. La longueur de la corde ne variant par (à l'ordre 1), la tension T s'identifie à la valeur T_0 caractérisant la tension de la corde immobile :

$$T(x, t) = T_0 \quad (1.45)$$

Nous en déduisons :

$$F_{1y} = +F_y(x, t) = -T_0\alpha(x, t) \quad (1.46)$$

$$F_{2y} = -F_y(x + dx, t) = T_0\alpha(x + dx, t) \quad (1.47)$$

Écrivons la relation fondamentale de la dynamique pour l'élément de longueur dx (de masse μdx) en projection sur l'axe (Oy) :

$$\mu dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F_{2y} + F_{1y} = -F_y(x + dx, t) + F_y(x, t) = -\frac{\partial F_y}{\partial x} dx = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \quad (1.48)$$

d'où :

$$\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (1.49)$$

qui est toujours de la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}} \quad (1.50)$$

Ordres de grandeur :

- pour une corde de guitare : masse linéique $\mu = 3$ g/m, tension $T_0 = 103$ N et donc $c = 185$ m/s ;
- pour une corde de piano : masse volumique $\rho = 7800$ kg/m³, tension $T_0 = 850$ N, diamètre $\phi = 1.2$ mm donc $c = 310$ m/s.

1.1.2 Caractérisation d'un phénomène ondulatoire

On a pu voir qu'une onde est physiquement une perturbation d'une grandeur physique d'un système qui est au repos et qui se propage dans une ou plusieurs directions. Mais comment peut-on le définir ?

Définition d'une onde :

Une onde est un champ, scalaire ou vectoriel, défini dans un domaine \mathcal{D} de l'espace, dont les dépendances spatiales et temporelles sont couplées par des équations aux dérivées partielles, appelés équations d'onde.

La propagation d'une onde dans un milieu n'entraîne jamais de transport macroscopique de matière. Cela ne veut cependant pas dire qu'il est impossible d'avoir simultanément une onde et du transport : on peut penser par exemple à des ondes acoustiques se propageant dans un fluide en écoulement. Dans ce cas, l'onde n'est pas à l'origine du phénomène de transport. En pratique, les variations temporelles d'une grandeur couplée entraînent les variations spatiales de l'autre, et réciproquement. Formellement, les champs obéissent à des équations couplées, qui sont en général symétriques. Pour identifier les bonnes grandeurs couplées, il faut se concentrer sur les aspects énergétiques. Le carré des grandeurs couplées est associé à un stockage d'énergie.

Dans tous les exemples que nous avons développé nous avons mis en évidence que les grandeurs obéissent toute à la même équation de propagation. De plus, il est également possible d'écrire à chaque fois un système d'équations couplés entre deux grandeurs à identifier. La TABLE 1.1 réunie pour l'ensemble des types d'onde rencontré la célérité trouvée, l'énergie de l'onde associée et la puissance. L'énergie est toujours de la même forme à savoir la somme de deux termes où les grandeurs couplés apparaissent au carré. De même, la puissance est toujours le produit des deux grandeurs couplés (à une constante près parfois). L'équation de propagation est alors obtenue par découplage des équations et l'équation de propagation est la même pour les deux grandeurs.

Type d'onde	Célérité	Energie	Puissance
OEM dans le vide	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$	$\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}$	$\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$
Mécanique dans un solide	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\frac{1}{2}\rho \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2E} \left(\frac{F}{S}\right)^2$	$\frac{F}{S} \frac{d\xi}{dt}$
Electrocinétique	$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$	$\frac{1}{2}\Gamma u^2 + \frac{1}{2}\Lambda i^2$	ui
Acoustique	$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$	$\frac{1}{2}\rho_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_S p_1^2$	$p_1 v_1$
Corde de Melde	$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$	$\frac{1}{2}\mu \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0 F^2$	$\left(\frac{d\psi}{dt}\right) F$

TABLE 1.1 – Récapitulatif des ondes rencontrées respectant la même équation de propagation avec les grandeurs associées : célérité, énergie et puissance.

Insistons sur le fait qu'en dehors du couplage entre deux champs, qui est la caractéristique fondamentale des phénomènes ondulatoires, ces derniers recouvrent par ailleurs des situations très diverses :

- La propagation peut être à une, deux ou trois dimensions, dans un milieu lui-même à une, deux ou trois dimensions ;
- La propagation peut ou non entraîner un transport macroscopique d'énergie ;

- Les champs peuvent être scalaires ou vectoriels ;
- La perturbation peut être orientée différemment par rapport à la direction de propagation. On distingue :
 - ★ les ondes longitudinales, où la perturbation est colinéaire à la direction de propagation (c'est le cas des ondes acoustiques) ;
 - ★ les ondes transverses, où la perturbation est orthogonale à la direction de propagation (c'est le cas des ondes électromagnétiques dans le vide illimité) ;
 - ★ mais il existe aussi des cas plus complexes, comme nous le verrons plus tard sur le guidage.

1.1.3 Équation de propagation

L'équation de propagation que nous avons établi pour chaque onde est la suivante :

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (1.51)$$

avec A une grandeur scalaire ou vectoriel et c une grandeur homogène à une vitesse qui s'identifiera à la vitesse de l'onde. Cette équation est appelé *équation de d'Alembert* ou *équation d'onde*. Pour autant cette équation ne décrit pas la propagation de l'ensemble des ondes mais uniquement une partie des ondes qui sont non atténuées et non dispersives. Nous verrons plus tard des équations de propagation différentes donnant des propriétés de propagation différentes.

1.2 Plusieurs types d'onde

L'équation de d'Alembert peut se résoudre en toute généralité à l'aide d'une fonction de Green, mais sa forme n'est ni simple ni aisément exploitable. En revanche, dans certains cas de bonne géométrie, il existe une écriture simple et générale des solutions.

Nous allons présenter deux familles d'ondes qui ont des formes différentes et plus précisément des surfaces d'ondes différentes. Une **surface d'onde** d'une onde est une surface continue de l'espace dont tous les points sont dans le même état vibratoire, c'est-à-dire que le champ A y prend la même valeur. Prenons le cas des ondes planes et des ondes sphériques qui permet de décrire la grande majorité des phénomènes ondulatoires.

1.2.1 Ondes planes

Une onde est dite plane si ses surfaces d'onde sont des plans parallèles. Ces plans sont appelés plans d'onde. On leur associe un vecteur normal \mathbf{n} qui définit la direction de propagation. Ainsi, formellement, la dépendance spatiale du champ associé à une onde plane ne dépend que de la projection du vecteur position sur la direction \mathbf{n} , qui peut se réécrire comme une unique coordonnée cartésienne dans un repère bien choisi, et ce quelle que soit la dimension de l'espace dans lequel l'onde se propage. *Une onde plane est une onde à une dimension spatiale cartésienne.*

Par extension, toute onde ne dépendant que d'une coordonnée cartésienne, y compris dans un milieu 1D ou 2D, est appelée onde plane. C'est le cas par exemple des ondes le long d'une corde vibrante. De façon générale, l'équation de d'Alembert pour une onde plane s'écrit :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (1.52)$$

Cherchons des solutions de cette équation se propageant avec la célérité c , c'est-à-dire telles que

$$A(x', t') = A(x, t) \quad \Leftrightarrow \quad (x' - x) = \pm c(t' - t) \quad (1.53)$$

Le signe est laissé libre pour permettre des solutions se propageant dans les deux sens, vers les x croissants ou décroissants. Cette condition se reformule sous la forme :

$$x' \pm ct' = c \pm ct \quad (1.54)$$

On en déduit donc que les variables $u = x - ct$ et $v = x + ct$ sont des variables privilégiées du problème.

Une onde plane ne dépendant que de la variable $x - ct$ ou de la variable $x + ct$ est dite progressive. Une telle onde se propage à la célérité c , dans le sens des x croissants si elle dépend de $x - ct$ et dans le sens des x décroissants si elle dépend de $x + ct$. Toutes les ondes planes ne sont pas des ondes planes progressives, et leurs dépendances spatiales et temporelles sont couplées de façon plus complexe.

Réécrivons l'équation d'onde en termes des variables privilégiées u et v . Cela donnera accès facilement à la solution générale de cette équation. *Pour que cette réécriture soit valide, il est important de noter que ces deux variables sont indépendantes, on passe de la représentation en (x, t) à celle en (u, v) de façon univoque dans les deux sens. C'est donc un bon changement de variables.* Considérons donc :

$$A = A(u, v) = A(u(x, t), v(x, t)) \quad (1.55)$$

et exprimons les dérivées partielles par rapport à x et t intervenant dans l'équation de d'Alembert en termes des dérivées partielles par rapport à u et à v :

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial A}{\partial u} \right|_v \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial A}{\partial v} \right|_u \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial A}{\partial u} \right|_v \times (-c) + \left. \frac{\partial A}{\partial v} \right|_u \times c \quad (1.56)$$

puis :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -c \frac{\partial}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial A}{\partial u} \right|_v \right) + c \frac{\partial}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial A}{\partial v} \right|_u \right) \quad (1.57)$$

$$= -c \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 A}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.58)$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} \right)} \quad (1.59)$$

Un calcul analogue donne pour la dérivée spatiale donne :

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 A}{\partial v^2}} \quad (1.60)$$

Ainsi, l'équation de d'Alembert se réécrit sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial u \partial v} = 0} \quad (1.61)$$

Pour résoudre cette équation, il suffit d'intégrer celle-ci successivement par rapport aux deux variables. L'intégration sur u (à v fixé) donne :

$$\frac{\partial A}{\partial v} = G(v) \quad (1.62)$$

où G est une fonction de v uniquement, c'est-à-dire à une constante près par rapport à u . L'intégration par rapport à v (à u fixé) donne ensuite :

$$A(u, v) = g(v) + f(u) \quad (1.63)$$

où $G(v) = g'(v)$ et f une fonction de u seulement. Ainsi :

Toute onde plane, solution de l'équation de d'Alembert à une dimension, peut s'écrire de façon générale sous la forme d'une superposition de deux ondes planes progressives :

$$A(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) + \xi\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (1.64)$$

f et φ sont des ondes planes progressives se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants, alors que g et ξ sont des ondes planes progressives se propageant à la célérité c dans le sens des x décroissants. Mathématiquement, f , g , φ et ξ sont des fonctions quelconques deux fois dérivables.

La décomposition en $f + g$ est pratique pour travailler en fonction de x à t fixé, alors que la décomposition en $\varphi + \xi$ est plus appropriée pour travailler en fonction de t à x donné.

1.2.2 Ondes sphériques

Une onde est dite sphérique si ses surfaces d'onde sont des sphères concentriques. Le centre des sphères est appelé foyer de l'onde sphérique. Formellement, le champ associé à une onde sphérique ne dépend spatialement que de $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r = r$, qui n'est autre que le rayon des coordonnées sphériques. Parler de "direction de propagation" d'une onde sphérique n'a aucun sens. Cela ne pourrait en avoir que localement... ce qui revient à assimiler l'onde sphérique à une onde plane. Cette approximation locale en onde quasi-plane est très utilisée dans le cadre de l'optique ondulatoire.

Dans le cas d'une onde sphérique, $A = A(r, t)$, le laplacien tridimensionnel s'écrit de façon simple. Pour une onde sphérique, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r^2}(rA) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (1.65)$$

qui n'est autre que l'équation de d'Alembert des ondes planes pour la variable rA . Les résultats du paragraphe précédent mènent alors directement à la conclusion :

Toute onde sphérique, solution de l'équation de d'Alembert à symétrie sphérique, peut s'écrire de façon générale sous la forme d'une superposition de deux ondes sphériques progressives :

$$A(r, t) = \frac{1}{r} [f(r - ct) + g(r + ct)] = \frac{1}{r} \left[\varphi\left(t - \frac{r}{c}\right) + \xi\left(t + \frac{r}{c}\right) \right] \quad (1.66)$$

f et φ sont des ondes sphériques divergentes, alors que g et ξ sont des ondes sphériques convergentes. Le préfacteur $1/r$ est associé à la conservation de l'énergie au cours de la propagation, puisque l'onde sphérique s'étale dans l'espace.

Dans la suite de ce chapitre, seul le cas des ondes planes sera considéré, et nous illustrerons plusieurs de leurs propriétés. Nous verrons que par linéarité les ondes planes suffisent en fait à décrire une onde quelconque.

1.3 Relation de structure et indépendance propogative

Nous avons présenté certaines solutions de l'équation de d'Alembert pour un seul champ. Néanmoins, les exemples ont montré l'importance du couplage entre deux champs pour qu'un phénomène ondulatoire puisse exister, et on s'attend à ce que les deux grandeurs couplées soient reliées l'une à l'autre. Cherchons donc ladite relation entre les grandeurs couplées. On appelle **relation de structure** d'une onde l'équation qui relie les grandeurs couplées l'une à l'autre. Les équations couplées telles qu'elles ont été introduites

via les exemples ne sont pas la relation de structure, qui implique directement les grandeurs couplées et non pas leurs dérivées. En revanche, ce sont bien sûr les équations couplées qui permettent d'obtenir la relation de structure.

1.3.1 Cas de deux grandeurs couplées scalaires

Commençons par le cas le plus simple où les deux grandeurs couplées sont scalaires et prenons l'exemple du câble coaxial avec le modèle des constantes réparties. Si on envoie une onde plane progressive de la forme :

$$i(x, t) = f(x - ct) \quad (1.67)$$

Cherchons alors la tension $u(x, t)$ pour une telle onde. Injectons cette solution dans l'équation de couplage issue de la loi des mailles :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = \Lambda c f'(x - ct) \quad (1.68)$$

L'intégration par rapport à l'espace donne :

$$u(x, t) = \Lambda c f(x - ct) + \phi(t) \quad (1.69)$$

où $\phi(t)$ est une fonction du temps seulement. Le fait que u et f soient des solutions de l'équation de d'Alembert impose par linéarité de l'équation que $\phi(t)$ d'être solution également. Comme ϕ ne dépend que du temps, l'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0 \quad (1.70)$$

Par conséquent, $\phi(t)$ est une fonction affine. Si la pente est non-nulle, cela conduit à une divergence non physique en $t \rightarrow \pm\infty$. La seule possibilité est donc que ϕ soit une fonction constante, ne décrivant pas une onde. On ne prendra donc pas en compte cette fonction par la suite. *La constante en question n'est pas forcément nulle pour autant : dans le cas des ondes acoustiques dans les fluides, le champ de surpression $p_1(x, t)$ s'ajoute à la pression p_0 préexistant dans le fluide au repos.*

Ainsi on a :

$$u(x, t) = Zi(x, t) \quad \text{avec} \quad Z = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \quad (1.71)$$

C'est la relation de structure de l'onde plane progressive se déplaçant dans le sens des x croissants dans le câble coaxial. Si on avait considéré une onde plane progressive se déplaçant dans le sens des x décroissants, soit $i(x, t) = g(x + ct)$, le calcul aurait conduit à :

$$u(x, t) = -Zi(x, t) \quad (1.72)$$

*La relation de structure d'une onde plane progressive scalaire est une relation de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité Z est appelé **impédance propagative** du milieu. L'impédance ne dépend que du milieu de propagation et en aucun cas du type d'onde qu'on veut propager à l'intérieur. Dans le cas d'une propagation dispersive, l'impédance propagative peut aussi dépendre de la fréquence, mais seulement au travers de la fonction de réponse du milieu.*

Ordres de grandeur : Pour le câble coaxial considéré au début du chapitre, on trouve $Z = 50 \Omega$, ce qui ne correspond pas à la résistance du câble. Cette valeur est en revanche intimement liée à celle de l'impédance de sortie d'un GBF, qui vaut aussi 50Ω afin de permettre la bonne transmission du signal entre le GBF et le câble.

Nous venons de traiter un cas particulier d'une propagation d'une onde mais dans le cas général nous avons encore :

$$i(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.73)$$

$$u(x, t) = Z[f(x - ct) - g(x + ct)] \quad (1.74)$$

Les grandeurs couplées ne sont donc proportionnelles que dans le cas d'une onde plane progressive, mais même dans le cas général d'une onde plane le seul paramètre intervenant dans la relation de structure est l'impédance propagative. Ainsi, **la célérité et l'impédance d'un milieu caractérisent intégralement le couplage entre grandeurs couplées**. En effet, ce dernier est donné par deux équations aux dérivées partielles, les équations couplées, faisant intervenir deux constantes de couplage.

1.3.2 Cas où une grandeur couplée est vectorielle

Dans le cas où l'un des champs est vectoriel, la relation de structure est vectorielle également. Outre l'impédance propagative, elle peut faire intervenir le vecteur unitaire \mathbf{n} donnant la direction de propagation.

Reprenons le cas de l'onde acoustique. Les grandeurs couplées sont la surpression acoustique $p_1(x, t)$, qui est *la cause*, et la vitesse acoustique $v_1(x, t)$, qui est *l'effet*. Ces deux grandeurs sont couplées par la masse volumique du fluide au repos, ρ_0 , et par le coefficient de compressibilité isentropique du fluide au repos χ_S . La relation de structure d'une onde plane progressive s'écrit :

$$p_1 \mathbf{n} = Z \mathbf{v}_1 \quad (1.75)$$

où l'impédance Z s'écrit :

$$Z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} \quad (1.76)$$

Faire intervenir explicitement le vecteur direction de propagation permet d'écrire la même relation de structure pour une onde plane progressive allant dans le sens croissant ou décroissant. En d'autres termes, cela permet de déterminer laquelle des deux relations définit $+Z$ et laquelle définit $-Z$.

1.3.3 Cas où les deux grandeurs couplées sont vectorielles

Reprenons le cas de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. On analyse usuellement les ondes électromagnétiques en stipulant que \mathbf{E} en est la cause et \mathbf{H} (et non \mathbf{B} comme on le stipule habituellement). On montre à partir des équations de Maxwell que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} d'une onde plane progressive vérifient :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \quad (1.77)$$

Pour faire apparaître l'impédance propagative, il faut écrire différemment cette relation en la multipliant vectoriellement par \mathbf{n} :

$$(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) \wedge \mathbf{n} = c \mathbf{B} \wedge \mathbf{n} \quad (1.78)$$

$$\mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n} = \mu_0 c \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} \quad (1.79)$$

$$(1.80)$$

Or comme une onde électromagnétique est transverse dans le vide :

$$\boxed{\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{H} \wedge \mathbf{n}} \quad (1.81)$$

L'impédance électromagnétique du vide est alors définie par :

$$\boxed{Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \, \Omega} \quad (1.82)$$

Chapitre 2

Propagation libre et non-dispersive

2.1 Interface entre deux milieux

Pour le moment, nous n'avons pas encore tenu compte des limites éventuelles des milieux de propagation : extensions finies ou discontinuités de milieux. Celles-ci imposent des conditions aux limites auxquelles les ondes doivent satisfaire.

Lorsqu'une ligne de propagation est fermée sur une impédance terminale ou bien reliée à une ligne de caractéristiques différentes, la traduction des conditions aux limites permet de déterminer les caractéristiques des ondes réfléchi et transmise qui en résultent.

2.1.1 Réflexion en bout de ligne fermée par une impédance terminale

Expérience de la corde

Prenons une corde accrochée à une extrémité à un mur et imposons une secousse à l'autre bout avec un coup de poignet. Nous pouvons voir dans un premier temps la déformation créée se déplacer vers le mur : une onde de type f qui se propage à la vitesse c dans le sens des x croissants. Lorsque celle-ci arrive sur le mur, elle ne disparaît pas purement et simplement, absorbée par cette terminaison, mais nous observons au contraire une secousse (d'orientation inversée par rapport à l'onde incidente) qui revient vers nous : l'onde f incidente a donnée naissance, au niveau de la terminaison, à une onde de type g .

Le phénomène observé est général et nous le retrouverons pour toutes les ondes dont nous étudierons la propagation. Le renvoi d'un écho par une paroi rocheuse, de lumière par un miroir, sont des exemples de réflexion d'ondes sonores et lumineuses (électromagnétiques).

Détaillons alors l'exemple de la ligne électrique en étudiant la réflexion d'une onde électrique à l'extrémité d'une ligne, en gardant à l'esprit la généralité des phénomènes observés.

Impédance terminale, condition à la limite

Considérons le câble coaxial défini précédemment dans le modèle électrocinétique. Au bout du câble coaxial, il est possible de mettre une impédance (en pratique une résistance) en bout de ligne. Deux cas limites peuvent être distingués :

- en plaçant un fil en sortie reliant l'âme et la gaine, l'impédance en bout de ligne est nulle. Si on prend une ligne de longueur L commençant en $x = 0$ alors on a $v(x_0, t) = Z(x_0)i(x_0, t) = 0$. Ainsi, la tension est nulle en bout de ligne.
- à l'opposé si on laisse ouvert la ligne en sortie alors l'impédance de sortie est infinie. Ainsi l'intensité en sortie est nécessairement nulle $i(x_0, t) = 0$.

En général, la relation entre la tension et l'intensité aux bornes du dipôle ne peut être écrite sous la forme $v(x_0, t) = Zi(x_0, t)$. Si nous supposons que l'intensité et la différence de potentiel sont des fonctions

sinusoïdales du temps de pulsation ω nous utiliserons la notation complexe ; nous pouvons alors définir l'impédance \underline{Z} du dipôle, grandeur complexe en fonction de ω .

Nous nous placerons dans la suite de ce paragraphe en notation complexe. La condition à la limite en x_0 s'écrit alors :

$$\underline{v}(x_0, t) = \underline{Z}\underline{i}(x_0, t) \quad (2.1)$$

Un signal physique quelconque peut être décomposé en superposition de fonctions sinusoïdales. La linéarité de l'équation de d'Alembert et des relations aux dérivées partielles entre $v(x, t)$ et $i(x, t)$ assure que la réflexion d'un signal physique quelconque peut être analysée par superposition des réponses correspondant aux différentes pulsations ω contenues dans l'onde incidente. **L'étude de l'onde réfléchie pour une onde incidente progressive sinusoïdale de pulsation ω donnée est donc fondamentale.**

Détermination de l'onde réfléchie

Considérons une onde progressive se propageant suivant les x croissants, pour laquelle $v_i(x, t) = Z_c i_i(x, t)$ avec Z_c l'impédance caractéristique de la ligne. Si elle rencontre une terminaison d'impédance Z placée en x_0 , elle ne peut satisfaire la condition aux limites en $x = x_0$ sauf dans le cas particulier $z = Z_c$. Nous devons donc envisager comme dans l'expérience de la corde, l'existence d'une onde réfléchie.

L'onde incidente étant supposée sinusoïdale de pulsation ω nous adopterons la notation complexe. Dans la zone $x < x_0$ l'onde est alors la superposition :

- de l'onde incidente se propageant dans le sens des x croissants :

$$\begin{cases} i_i(x, t) = \underline{I}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} & = \underline{I}_i(x) e^{j\omega t} \\ v_i(x, t) = \underline{V}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} & = \underline{V}_i(x) e^{j\omega t} \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $\underline{I}_i(x) = \underline{I}_{i0} e^{-jkx}$ et $\underline{V}_i(x) = \underline{V}_{i0} e^{-jkx}$ les amplitudes des ondes incidentes et on a

$$\underline{V}_i(x) = Z_c \underline{I}_i(x) \quad (2.3)$$

- de l'onde réfléchie se propageant dans le sens des x décroissants :

$$\begin{cases} i_r(x, t) = \underline{I}_{r0} e^{j(\omega t + kx)} & = \underline{I}_r(x) e^{j\omega t} \\ v_r(x, t) = \underline{V}_{r0} e^{j(\omega t + kx)} & = \underline{V}_r(x) e^{j\omega t} \end{cases} \quad (2.4)$$

avec $\underline{I}_r(x) = \underline{I}_{r0} e^{jkx}$ et $\underline{V}_r(x) = \underline{V}_{r0} e^{jkx}$ les amplitudes des ondes incidentes et on a

$$\underline{V}_r(x) = -Z_c \underline{I}_r(x) \quad (2.5)$$

Ainsi, pour l'onde résultante on a :

$$\begin{cases} \underline{i}(x, t) = \underline{I}(x) e^{j\omega t} & = \underline{i}_i(x, t) + \underline{i}_r(x, t) = (\underline{I}_i(x) + \underline{I}_r(x)) e^{j\omega t} \\ \underline{v}(x, t) = \underline{V}(x) e^{j\omega t} & = \underline{v}_i(x, t) + \underline{v}_r(x, t) = Z_c (\underline{I}_i(x) - \underline{I}_r(x)) e^{j\omega t} \end{cases} \quad (2.6)$$

où $\underline{I}(x)$ et $\underline{V}(x)$ sont les amplitudes complexes de l'onde résultante. Nous en déduisons les relations entre les amplitudes complexes des trois ondes :

$$\begin{cases} \underline{I}(x) = \underline{I}_i(x) + \underline{I}_r(x) \\ \underline{V}(x) = Z_c (\underline{I}_i(x) - \underline{I}_r(x)) \end{cases} \quad (2.7)$$

La condition à la limite $x = x_0$, $\underline{v}(x_0, t) = \underline{Z}\underline{i}(x_0, t)$ ou en utilisant les amplitudes complexes, $\underline{V}(x_0) = \underline{Z}\underline{I}(x_0)$ conduit à la relation :

$$Z_c (\underline{I}_i(x_0) - \underline{I}_r(x_0)) = \underline{Z} (\underline{I}_i(x_0) + \underline{I}_r(x_0)) \quad (2.8)$$

ou

$$(Z_c - \underline{Z}) \underline{I}_i(x_0) = (Z_c + \underline{Z}) \underline{I}_r(x_0) \quad (2.9)$$

Coefficients de réflexion pour les amplitudes

Le coefficient de réflexion en amplitude, noté ρ est le rapport entre l'amplitude complexe de l'onde réfléchie et l'amplitude complexe de l'onde incidente au point où l'onde est réfléchie.

Nous en déduisons des relations entre l'amplitude complexe de l'intensité et de la tension obtenues au paragraphe précédent les coefficients de réflexion pour :

- l'intensité :

$$\rho_I = \frac{\underline{I}_r(x_0)}{\underline{I}_i(x_0)} = \frac{Z_c - \underline{Z}}{Z_c + \underline{Z}} \quad (2.10)$$

- la tension :

$$\rho_V = \frac{\underline{V}_r(x_0)}{\underline{V}_i(x_0)} = \frac{-Z_c \underline{I}_r(x_0)}{Z_c \underline{I}_i(x_0)} = -\rho_I \quad (2.11)$$

Coefficient de réflexion énergétique

Les ondes étudiées ici sont sinusoïdales, seules nous intéressent les puissances moyennes transférées de la gauches vers la droite pour l'onde incidente $\langle \mathcal{P}_i \rangle$ et pour l'onde réfléchie $\langle \mathcal{P}_r \rangle$.

Le coefficient de réflexion énergétique, noté R est le rapport entre la puissance moyenne transférée par l'onde incidente et la puissance moyenne transférée par l'onde réfléchie en valeur absolue, soit :

$$R = \left| \frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} \right| \quad (2.12)$$

La puissance moyenne en notation complexe vaut $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{V} \underline{I}^*)$. Et donc :

$$\langle \mathcal{P}_i \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{V}_i \underline{I}_i^*) = \frac{1}{2} Z_c |I_i|^2 = \frac{1}{2} Z_c |\underline{I}_{i0}|^2 \quad (2.13)$$

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{V}_r \underline{I}_r^*) = -\frac{1}{2} Z_c |I_r|^2 = -\frac{1}{2} Z_c |\underline{I}_{r0}|^2 \quad (2.14)$$

Nous en déduisons que :

$$R = \left| \frac{\rho_V}{\rho_I} \right|^2 = \left| \rho_I \right|^2 \quad (2.15)$$

Les puissances moyennes sont indépendantes de x . Il est donc inutile de préciser que le calcul doit être effectué au point où l'onde est réfléchie. $\langle \mathcal{P}_i \rangle$ est positive et $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ négative car le propagation de l'énergie s'effectue dans l'autre sens.

Discussion des résultats

Nous pouvons prendre des cas particulier d'impédance de sortie \underline{Z} .

- $Z = \infty$: l'extrémité de la ligne électrique est ouverte et donc :

$$\rho_I = -\rho_V = -1 \quad \text{et} \quad R = 1 \quad (2.16)$$

La réflexion est totale car toute l'énergie de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie.

- $Z = 0$: l'extrémité de la ligne est en court-circuit. On trouve :

$$\rho_I = -\rho_V = 1 \quad \text{et} \quad R = 1 \quad (2.17)$$

là encore la réflexion est totale.

- Z est imaginaire pur. Cela signifie que V et I sont en quadrature de phase. Une telle condition aux limites est facilement réalisable en électricité et ne dissipe pas d'énergie. Ici encore il y a encore réflexion totale $R = 1$.
- $Z = Z_c$: dans ce cas, l'existence d'une onde réfléchie n'est pas nécessaire pour satisfaire la condition aux limites et donc on obtient $\underline{\rho}_I = -\underline{\rho}_V = 0$ et $R = 0$.

Lorsque la ligne est fermée sur son impédance caractéristique, il n'y a pas d'onde réfléchie, la réflexion est nulle. Toute l'énergie de l'onde incidente est absorbée dans la terminaison. On dit qu'il y a **adaptation d'impédance**.

2.1.2 Réflexion et transmission

Conditions aux limites pour un changement de milieu

Considérons le cas d'une discontinuité de milieux, par exemple une jonction entre deux lignes différentes en électrocinétique. Si on considère une onde venant de la gauche de type f se propageant dans la ligne 1, arrivant sur la jonction, nous aurons la naissance d'une onde réfléchie dans la ligne 1 de type g et une onde transmise de type f vers la droite dans la ligne 2. Il n'est pas physique de considérer une onde allant vers la gauche dans la ligne 2. La jonction suffisamment petite pour la considérer comme ponctuelle.

Il est alors possible d'écrire à la jonction, en $x = x_0$ que :

- il y a continuité du courant car il n'y a pas d'accumulation de charges en l'absence de condensateur ou de résistance de fuite donc pour tout t :

$$\underline{i}_1(x_0^-, t) = \underline{i}_2(x_0^+, t) \quad \text{soit} \quad \underline{I}_1(x_0^-) = \underline{I}_2(x_0^+) \quad (2.18)$$

- Continuité de la tension en $x = x_0$ en absence de liaison avec une inductance. Donc pour tout t :

$$\underline{v}_1(x_0^-, t) = \underline{v}_2(x_0^+, t) \quad \text{soit} \quad \underline{V}_1(x_0^-) = \underline{V}_2(x_0^+) \quad (2.19)$$

Notons alors Z_{c1} et Z_{c2} les impédances caractéristiques des deux lignes, réelles et positives, ainsi que c_1 et c_2 les vitesses de propagation. Les deux conditions aux limites impliquent en $x = x_0$ que :

$$\underline{I}_1(x_0^-) = \underline{I}_i(x_0) + \underline{I}_r(x_0) \quad ; \quad \underline{I}_2(x_0^+) = \underline{I}_t(x_0) \quad (2.20)$$

d'où :

$$\underline{I}_i(x_0) + \underline{I}_r(x_0) = \underline{I}_t(x_0) \quad (2.21)$$

De plus :

$$\underline{V}_1(x_0^-) = Z_{c1}(\underline{I}_i(x_0) - \underline{I}_r(x_0)) \quad ; \quad \underline{V}_2(x_0^+) = Z_{c2}\underline{I}_t(x_0) \quad (2.22)$$

d'où :

$$Z_{c1}(\underline{I}_i(x_0) - \underline{I}_r(x_0)) = Z_{c2}\underline{I}_t(x_0) \quad (2.23)$$

Coefficients de réflexion et de transmission

Le coefficient de transmission de la ligne 1 vers la ligne 2, noté τ_{12} , est le rapport, à l'endroit où l'onde est transmise et réfléchie, entre l'amplitude de l'onde transmise $\underline{I}_t(x_0)$ ou $\underline{V}_t(x_0)$ et l'amplitude de l'onde incidente $\underline{I}_i(x_0)$ ou $\underline{V}_i(x_0)$.

Le coefficient de réflexion, noté ρ_{12} , est le rapport entre l'amplitude de l'onde réfléchie $\underline{I}_r(x_0)$ ou $\underline{V}_r(x_0)$ et l'amplitude de l'onde incidente $\underline{I}_i(x_0)$ ou $\underline{V}_i(x_0)$.

En introduisant les coefficient de réflexion et de transmission pour le courant, les deux équations précédentes conduisent à :

$$1 + \rho_{12} = \tau_{12} \quad \text{et} \quad Z_{c1}(1 - \rho_{12}) = Z_{c2}\tau_{12} \quad (2.24)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission sont de la forme :

$$\rho_{I12} = \frac{I_r(x_0)}{I_i(x_0)} = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} = -\rho_{V12} \quad (2.25)$$

$$\tau_{I12} = \frac{I_t(x_0)}{I_i(x_0)} = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}} = \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}} \tau_{V12} \quad (2.26)$$

On peut alors montrer que les coefficients en énergie vérifient :

$$R = \left| \frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} \right| = \left| \frac{-Z_{c1} \operatorname{Re}(I_r(x_0)I_r^*(x_0))}{Z_{c1} \operatorname{Re}I_i(x_0)I_i^*(x_0)} \right| = \frac{I_r(x_0)I_r^*(x_0)}{I_i(x_0)I_i^*(x_0)} = \left(\frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \right)^2 \quad (2.27)$$

$$T = \left| \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} \right| = \left| \frac{Z_{c2} I_t(x_0)I_t^*(x_0)}{Z_{c1} I_i(x_0)I_i^*(x_0)} \right| = \frac{4Z_{c1}Z_{c2}}{(Z_{c1} + Z_{c2})^2} \quad (2.28)$$

On peut alors vérifier immédiatement que nous avons $R + T = 1$ ce qu'il signifie que pour des lignes parfaites, il n'y a pas de perte d'énergie. On voit également que si on veut transmettre le maximum d'énergie (c'est-à-dire la totalité), il faut avoir $Z_{c1} = Z_{c2}$ pour avoir $R = 0$ et $T = 1$. On parle alors d'*adaptation d'impédance*.

2.2 Paquets d'ondes

Nous avons décrit certaines familles de solutions de l'équation de d'Alembert et comment les grandeurs étaient couplées notamment avec la notion d'impédance. De plus, les ondes susceptibles de se propager dans un milieu n'a pas de raison de contenir qu'une seule fréquence temporelle ou spatiale. Ainsi, nous devons introduire la notion de *paquet d'onde*.

2.2.1 L'onde plane progressive harmonique : la brique élémentaire

On définit un type d'onde bien particulier :

Une **onde plane progressive harmonique** (OPPH), ou **onde plane progressive sinusoïdale** est une onde plane progressive dont la dépendance en temps est sinusoïdale. Formellement, le champ associé s'écrit :

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \quad (2.29)$$

et à une dimension :

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (2.30)$$

avec $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ le vecteur d'onde de l'OPPH.

Remarques :

- La notion de vecteur d'onde n'a de sens que pour une OPPH. Parler du vecteur d'onde d'une onde plane ou d'une onde plane progressive (non sinusoïdale) ne veut rien dire. C'est encore pire pour une onde sphérique.
- Pour des raisons de sens physique, on choisit généralement de prendre une pulsation positive, $\omega > 0$, et k de signe quelconque. C'est alors le signe de k qui indique le sens de propagation de l'onde. Cependant choisir $k > 0$ et ω de signe quelconque conduirait aux mêmes résultats.
- Dans l'écriture de l'onde, k et ω sont des paramètres de l'OPPH qui sont donc fixés. Ce ne sont a priori pas des variables de Fourier (même si les notations sont volontairement ambiguës).

Relation de dispersion

L'équation (1.52) montre la double périodicité de l'OPPH, qui est périodique dans l'espace et dans le temps :

- la période spatiale d'une OPPH est $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, appelé **longueur d'onde**
- la période temporelle d'une OPPH est $T = \frac{2\pi}{\omega}$, appelé période.

L'équation de d'Alembert impose un couple spatio-temporelle des ondes, ce qui implique que les grandeurs ω et k ne sont pas indépendantes. La **relation de dispersion** est la relation entre la période spatiale et la période temporelle d'une onde plane progressive harmonique. Elle caractérise la propagation, par opposition au couplage.

Formellement, c'est l'équation qui relie ω et k . C'est en général une relation implicite, faisant intervenir ω^2 et k^2 en raison des dérivées secondes. Elle s'obtient en injectant l'expression d'une OPPH dans l'équation de propagation.

En appliquant cette méthode à l'équation de d'Alembert, on trouve que sa relation de dispersion est la relation bien connue :

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c^2} \quad (2.31)$$

Attention ! Cette relation n'est vrai *a priori* que pour l'équation de d'Alembert.

Cette notion n'est définie que pour les OPPH. Parler de "relation de dispersion d'un milieu" sous-entend que l'on considère la propagation d'OPPH. Parler de relation de dispersion d'une onde progressive quelconque n'a pas de sens.

Vitesse de phase

La phase de l'OPPH se factorise sous la forme :

$$\Phi = k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) + \phi \quad (2.32)$$

Par comparaison avec l'équation (1.64) décrivant une onde plane comme somme d'ondes planes progressives, $\frac{\omega}{k}$ s'interprète comme la vitesse à laquelle se propage la phase de l'OPPH. La **vitesse de phase** v_φ est la vitesse de propagation de la phase d'une onde plane progressive sinusoïdale. Mathématiquement,

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad (2.33)$$

La propagation est dite **dispersive** lorsque toutes les OPPH n'ont pas la même vitesse de phase. Formellement, cela se traduit par une dépendance de la vitesse de phase en la fréquence de l'OPPH, ce qui est équivalent à une relation de dispersion non-linéaire.

Pour l'équation de d'Alembert, d'après la relation de dispersion :

$$v_\varphi = \pm c \quad (2.34)$$

La propagation n'est pas dispersive. Remarquons que ce résultat est cohérent avec le fait qu'une OPPH est une OPP, qui doit donc se propager avec la célérité c intervenant dans l'équation de d'Alembert. Le signe de la vitesse de phase indique uniquement le sens de propagation mais n'a pas de sens physique.

Caractère non-physique et intérêt de l'OPPH

Une OPPH ne peut pas décrire une onde physique réaliste, car elle est d'extension spatiale et temporelle infinie, et possède donc une énergie infinie. C'est néanmoins un outil mathématique essentiel car grâce à l'analyse de Fourier, les OPPH constituent la **base de Fourier**, sur laquelle on peut décomposer une onde quelconque. Les OPPH forment ainsi une base des solutions de l'équation de d'Alembert.

Autrement dit, il est toujours pertinent de rechercher des solutions sous forme d'OPPH, puisque ces solutions, *a priori* particulières, donnent accès à l'ensemble des solutions par combinaison linéaire.

2.2.2 Paquet d'ondes à une dimension

Un signal réel s'écrit en tout généralité comme :

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{A}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.35)$$

Un tel signal $A(x, t)$ est donc une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux, pondérés par le coefficient complexe $\tilde{A}(k, \omega)$, qui est la transformée de Fourier de $A(x, t)$.

Notons qu'ici $A(x, t)$ est nommé *signal* et non pas *onde* : rien ne dit a priori que A défini précédemment est solution de l'équation de propagation. L'équation de d'Alembert étant linéaire, ce n'est le cas que si chacun des signaux sinusoïdaux impliqués est une OPPH, c'est-à-dire que si k et ω vérifient la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$. Ainsi, une onde (quelconque) s'écrit¹ :

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{A}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} \delta(\omega - \omega(k)) \quad (2.36)$$

La distribution de Dirac permet de procéder à l'intégration sur ω , ce qui conduit à :

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{A}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (2.37)$$

où $\hat{A}(k) = \tilde{A}(k, \omega(k))$ est une fonction de la seule variable k à valeurs complexes.

Un **paquet d'ondes** est une combinaison linéaire continue d'ondes planes progressives harmoniques dont les fréquences spatiales k et temporelles ω sont reliées par la relation de dispersion.

Il est crucial de sommer les OPPH de façon continue et non pas discrète. En effet, la TF d'une fonction à spectre discret est une fonction périodique (techniquement, un spectre discret définit une série de Fourier), qui reste d'extension spatio-temporelle infinie. *Un paquet d'ondes physique possède un spectre de Fourier continu.*

On peut proposer une lecture interférentielle de l'expression du paquet d'onde. Le paquet d'onde complet est alors issu de l'interférence d'un nombre infini d'OPPH cohérentes, chaque OPPH contribuant au paquet par l'amplitude $\hat{A}(k)$.

Inégalité d'Heisenberg

L'écriture du paquet d'onde comme une transformée de Fourier contraint son extension dans l'espace réel et l'espace de Fourier, car cela lui impose d'obéir à l'inégalité d'Heisenberg, qui stipule que

$$\Delta X_A \Delta K_A \geq \frac{1}{2} \quad (2.38)$$

Dans cette expression, ΔX_A (qui peut dépendre de t) et ΔK_A (qui lui n'en dépend pas) sont les écarts types du module carré du paquet d'onde. Par exemple, ΔK_A est défini à partir du jeu d'égalités :

$$\langle K_A \rangle = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k \left| \hat{A}(k) \right|^2, \quad \langle K_A^2 \rangle = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k^2 \left| \hat{A}(k) \right|^2 \quad (2.39)$$

$$\Delta K_A^2 = \langle K_A^2 \rangle - \langle K_A \rangle^2 \quad (2.40)$$

1. Les notations peuvent paraître ambiguës car ω est la variable de Fourier alors que $\omega(k)$ est la relation de dispersion. Il serait ici plus clair d'écrire cette dernière $\omega = f(k)$, et d'écrire l'argument de la distribution de Dirac sous la forme $\omega - f(k)$. Nous ne le ferons pas pour des raisons de lisibilité.

où I est la norme du paquet d'ondes :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{A}(k)|^2 \quad (2.41)$$

Cette intégrale est reliée à l'énergie transportée par le paquet d'ondes. L'inégalité d'Heisenberg ne contraint pas l'éventuel étalement du paquet d'onde que nous étudierons plus tard, puisqu'elle ne fixe qu'une borne inférieure à sa largeur.

Variable privilégiée

La contrainte liée à la relation de dispersion permet d'éliminer une variable de l'intégrale de Fourier, mais laisse le choix entre privilégier k ou ω . Ici, l'intégration a été faite sur les pulsations au profit des vecteurs d'onde. Privilégier ω pose en effet des problèmes d'interprétation : *quel sens physique donner aux pulsations négatives ? Comment bien distinguer le sens de propagation des OPP ?* Garder k est donc *a priori* plus simple de ce point de vue.

Ce n'est cependant pas toujours le meilleur choix. En particulier, lors d'un changement de milieu, la quantité conservée est la pulsation et non pas le vecteur d'onde. Un problème se pose également en présence d'atténuation, où le nombre d'onde k prend des valeurs complexes, comme nous le verrons plus tard. Dans ces cas là, il est préférable de privilégier la pulsation comme variable de description du paquet d'ondes.

Hermiticité et conséquences

Le champ de déplacement $A(x, t)$ est à valeurs réelles. Ainsi, sa transformée de Fourier est **hermitique** c'est-à-dire que :

$$\tilde{A}(-k, -\omega) = \tilde{A}^*(k, \omega) \quad (2.42)$$

Tant qu'aucune atténuation n'entre en jeu, k est toujours réel, et on peut considérer $\omega(k) > 0$ pour tout k sans perte d'information.

Notons que ce n'est *a priori* pas évident puisque la relation de dispersion relie ω^2 à k^2 sans fournir d'information sur le signe de ces deux grandeurs. Cela a l'avantage de rendre transparente l'interprétation en OPPH. En contrepartie, $\hat{A}(k)$ n'a pas de propriété de symétrie sous le changement de variable $k \rightarrow -k$. En ne gardant que le demi-plan de Fourier $\omega > 0$, on définit un signal analytique, qui n'est autre que la "représentation complexe" largement utilisée par les physiciens².

Malgré tout, reconstruire le paquet d'ondes réel nécessite le plan de Fourier entier, et pas seulement la moitié $\omega > 0$. La propriété d'hermiticité permet d'en tenir compte à l'aide d'une partie réelle. Ainsi, la façon la plus exacte d'écrire un paquet d'onde réel n'est pas (2.37), mais plutôt :

$$A(x, t) = 2\text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{A}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \right] \quad \text{avec} \quad \omega(k) > 0 \quad (2.43)$$

Extension à 3D

La méthode utilisée ici s'étend au cas tridimensionnel. La relation de dispersion n'apporte toujours qu'une contrainte scalaire, et s'écrit formellement :

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = \omega(k_x, k_y, k_z) \quad (2.44)$$

2. voir le W. Appel pour plus d'informations.

Elle ne permet donc de s'affranchir que d'une seule variable, disons ici la pulsation. Le paquet d'ondes met alors en jeu une intégrale triple :

$$A(\mathbf{r}, t) = 2\text{Re} \left[\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hat{A}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \right] \quad \text{avec} \quad \omega(\mathbf{k}) > 0 \quad (2.45)$$

L'intégrale triple sur les composantes de \mathbf{k} peut alors être menée dans n'importe quel système de coordonnées.

2.2.3 Propagation d'un paquet d'onde

Enveloppe et vitesse de groupe

Étudions maintenant la façon dont un tel paquet d'ondes se propage. Pour faciliter l'interprétation des équations, considérons un paquet d'ondes se propageant dans une direction bien définie. Pour cela, on le suppose tel que $\hat{A}(k)$ ne prend des valeurs non-nulles que dans l'intervalle $[k_0 - \delta k, k_0 + \delta k]$ avec $k_0 > 0$ et $\delta k \ll k_0$.

Écrivons alors un développement limité de la relation de dispersion :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \mathcal{O}((k - k_0)^2) \quad (2.46)$$

Dans le cas où la relation de dispersion est celle de l'équation de d'Alembert, $\frac{d\omega}{dk} = c$ quel que soit k_0 et le développement à l'ordre 1 est exact. Utiliser un développement limité a l'intérêt d'être la méthode générale pour traiter la propagation d'un paquet d'onde en présence de dispersion, comme nous le ferons plus tard.

Injectons ce développement dans l'expression complexe du paquet d'ondes précédent. Pour simplifier les notations, on note le paquet complexe $A(x, t)$ de la même façon que le paquet lui-même :

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{A}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (2.47)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{A}(k) e^{i \left[k_0 x + (k - k_0)x - \omega(k_0)t - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0)t \right]} \quad (2.48)$$

De plus, $\hat{A}(k)$ est a priori complexe et on peut également en développer la phase au premier ordre en $(k - k_0)$:

$$\hat{A}(k) = \left| \hat{A}(k) \right| e^{i\phi(k_0)} e^{i\phi'(k_0)(k - k_0)} \quad (2.49)$$

Ainsi, tous les termes en k_0 peuvent être sortis de l'intégrale :

$$A(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0))} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \left| \hat{A}(k) \right| e^{i\phi'(k_0)(k - k_0)} e^{i \left((k - k_0)x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0)t \right)} \quad (2.50)$$

Posons alors le changement de variable $K = k - k_0$ et on pose la nouvelle fonction $\hat{A}_e(K) = \left| \hat{A}(k_0 + K) \right| e^{i\phi'(k_0)K}$ alors :

$$A(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0))} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} \hat{A}_e(K) e^{iK \left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t \right)} \quad (2.51)$$

L'intégrale est alors la transformée de Fourier réciproque de la fonction $\hat{A}_e(K)$, prise en $x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t$. Il vient alors :

$$\boxed{A(x, t) = A_e \left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t \right) e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0))}} \quad (2.52)$$

Un paquet d'ondes est constitué du produit d'une onde porteuse modulée par une enveloppe A_e . L'onde porteuse se propage à la vitesse de phase prise au nombre d'onde central du paquet :

$$v_\varphi = \frac{\omega(k_0)}{k_0} \quad (2.53)$$

alors que l'enveloppe se propage à la vitesse de groupe prise au nombre d'onde central du paquet :

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (2.54)$$

La vitesse de groupe provient du développement de la relation de dispersion au premier ordre autour du nombre d'onde central du paquet. C'est cette vitesse que l'on associe intuitivement au déplacement d'un paquet d'ondes. On l'obtient par exemple par des mesures de temps de vol d'impulsions.

La FIGURE 2.1 montre la propagation d'un paquet d'ondes gaussien par l'équation de d'Alembert. Dans ce cas là, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales et il n'y a pas de dispersion. Ainsi, le paquet d'ondes n'est pas déformé et se déplace en bloc. De plus, le motif à l'intérieur de la porteuse (vitesse de phase) se déplace à la même vitesse que l'enveloppe (vitesse de groupe). Les points bleu et rouge permettent de visualiser cela.

Remarques :

- Il est important de remarquer qu'en général $v_\varphi \neq v_g$. L'égalité est atteinte en particulier lorsque l'équation de propagation est l'équation de d'Alembert, $v_\varphi = v_g = c$. Dans ce cas, $A(x, t)$ est bien une OPP en tant que fonction de la seule variable $x - ct$.
- Revenons sur l'introduction de l'enveloppe $\hat{A}_e(K) = \left| \hat{A}(k_0 + K) \right| e^{i\phi'(k_0)K}$. Elle traduit mathématiquement le fait que \hat{A} décrit un paquet qui avance, et est donc maximal en $k = k_0 \neq 0$, alors que \hat{A}_e décrit une enveloppe, qui est donc statique et est maximale en $K = 0$.

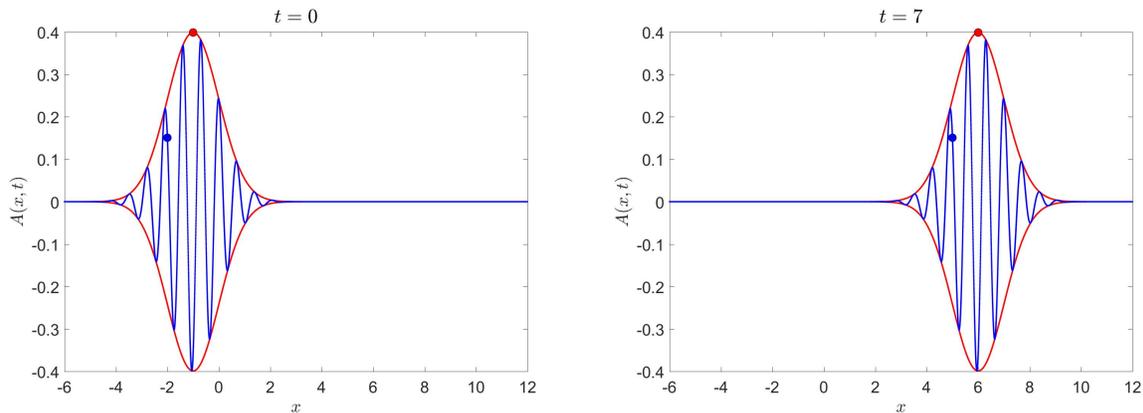


FIGURE 2.1 – Propagation d'un paquet d'onde solution de l'équation de d'Alembert. Un paquet d'onde, en bleu, se compose d'une enveloppe, en rouge, modulée par une porteuse. Ici, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales et valent 1. Ainsi le point bleu, lié à la porteuse, se déplace à la même vitesse que le point rouge, lié à l'enveloppe. Le paquet d'onde représenté est gaussien, d'écart type 1, et la porteuse a pour longueur d'onde 0.7. À $t = 0$ le centre du paquet d'onde est légèrement décalé par rapport à la position $x = 0$ imitant un décalage de phase initial.

Position du centre du paquet d'onde

Le centre du paquet d'onde est obtenu lorsque toutes les contributions définissant A_e dans l'équation (2.51) interfèrent constructivement, ou en d'autres termes lorsque chaque terme de phase pour chaque K vaut 1.

À l'instant t , cette condition est obtenue en $x_c = x_c(t)$ tel que pour tout K :

$$K[\phi'(k_0) + x_c - v_g t] = 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z} \quad (2.55)$$

Cette condition devant être vraie pour tout K , qui est une variable continue, la seule façon de la réaliser est d'avoir pour tout temps :

$$\phi'(k_0) + x_c - v_g t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_c = v_g t - \phi'(k_0) \quad (2.56)$$

On trouve comme attendu que le centre du paquet d'ondes se déplace à la vitesse de groupe. Attention à ne pas oublier la phase $\phi'(k_0)$, qui s'interprète comme la position du paquet d'ondes à $t = 0$. Ce résultat n'est pas étonnant car une modulation $e^{i\phi'(k_0)K}$ dans l'espace de Fourier se traduit par une translation dans l'espace réel.

Remarquons que le maximum trouvé ici est celui de la fonction d'enveloppe, qui n'est pas forcément un maximum du paquet d'ondes complet. En effet, la phase commune à toutes les ondes n'est pas forcément un multiple de 2π , car il reste la phase moyenne, celle de la porteuse.

Méthode de la phase stationnaire

Ce dernier résultat peut se retrouver par une méthode équivalente mais plus directe, ne nécessitant pas la décomposition porteuse-enveloppe. Revenons à l'expression définissant le paquet d'ondes :

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{A}(k)| e^{i\phi(k)} e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.57)$$

Si le paquet d'onde est suffisamment étroit spatialement, la bande Δk de nombres d'ondes y contribuant de façon significative est suffisamment large pour supposer raisonnablement que $\hat{A}(k)$ varie beaucoup plus lentement avec k que le terme de phase global $e^{i(kx - \omega t)}$.

Physiquement, cela signifie que le paquet d'onde est bien défini, très loin d'une onde quasiharmonique (pour laquelle parler de centre n'a pas vraiment de sens). L'approximation faite ici est l'opposée de l'approximation de l'enveloppe lentement variable utilisée pour décrire la cohérence en optique ondulatoire. Le centre du paquet d'onde se trouve alors en $x_c = x_c(t)$ qui est tel que toutes les composantes de Fourier y interfèrent en phase. En d'autres termes, x_c est tel que la phase globale ne dépende pas de k , ce qui se traduit mathématiquement au premier ordre par :

$$\frac{\partial}{\partial k} [kx - \omega(k)t + \phi(k)]_{x=x_c} = 0 \quad (2.58)$$

Ce qui conduit à :

$$x_c = \frac{d\omega}{dk} t - \phi'(k) \quad (2.59)$$

Cependant x_c est encore une fonction de k , ce qui n'a pas de sens. Si le milieu de propagation est suffisamment peu dispersif (ou non dispersif) à l'échelle de Δk alors il est légitime de considérer que dans cette bande de nombre d'ondes :

$$\frac{d\omega}{dk} \simeq \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (2.60)$$

De plus, si $\hat{A}(k)$ varie lentement avec k , on peut supposer que sa phase varie au pire linéairement avec K , et prendre alors $\phi'(k) \simeq \phi'(k_0)$ ce qui donne le résultat précédent.

2.3 Ondes stationnaires

Les ondes stationnaires sont un type d'ondes particulier dans la physique des ondes.

2.3.1 Définition et propriétés

Une **onde stationnaire** est une onde dont les dépendances spatiale et temporelle sont découplées. Formellement, le champ d'une onde (plane) stationnaire s'écrit :

$$A(x, t) = f(x)g(t) \quad (2.61)$$

Cherchons les ondes stationnaires solutions de l'équation de d'Alembert, en injectant la solution dedans :

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2}g''(t)f(x) = 0 \quad (2.62)$$

soit :

$$c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)} \quad (2.63)$$

Or dans cette égalité les variables temps et espace sont *séparées*, ce qui implique que chacun des termes est en fait constant. Si cette constante est positive ou nulle, on obtient une solution divergente en temps qui n'est pas physiquement possible. Par conséquent, elle est négative et on la nomme $-\omega^2$. Chaque membre donne alors lieu à une équation différentielle à une variable, du type oscillateur harmonique, d'où :

$$g(t) = g_0 \cos(\omega t + \phi_1) \quad , \quad f(x) = f_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi_2\right) \quad (2.64)$$

et donc :

$$A(x, t) = A_0 \cos(\omega t + \phi_1) \cos(kx + \phi_2) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (2.65)$$

On voit alors que k vérifie la relation de dispersion, ce qui n'est a priori pas évident. k est un nombre d'onde, mais on ne peut pas en faire un vecteur d'onde car une onde stationnaire n'a pas de direction de propagation.

Une onde stationnaire possède également une double périodicité, mais dans un sens différent de la double périodicité d'une OPPH. Elle donne lieu à des nœuds et des ventres de vibration, points où l'amplitude des oscillations est respectivement nulle et maximale.

Afin d'écrire cette onde stationnaire différemment, développons le produit des cosinus :

$$A(x, t) = \frac{1}{2}A_0 [\cos(\omega t + \phi_1 + kx + \phi_2) + \cos(\omega t + \phi_1 - kx - \phi_2)] \quad (2.66)$$

Ainsi, une onde stationnaire est la somme de deux OPPH de même amplitude, déphasées et se propageant dans des sens opposés. La pulsation ω et le nombre d'onde k intervenant dans l'onde stationnaire sont aussi ceux qui interviennent dans l'OPPH. Il est donc logique qu'ils vérifient la relation de dispersion.

Il est possible de faire le développement inverse, en partant de l'expression d'une onde progressive :

$$A(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (2.67)$$

$$= A_0 [\cos(\omega t + \phi) \cos(kx) - \sin(\omega t + \phi) \sin(-kx)] \quad (2.68)$$

$$= A_0 \left[\cos(\omega t + \phi) \cos(kx) - \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (2.69)$$

Ainsi, une OPPH s'écrit comme la somme de deux ondes stationnaires. Et comme les OPPH forment une base des solutions de l'équation de d'Alembert, alors **les ondes stationnaires forment une base des solutions de l'équation de d'Alembert, i.e. toute solution de l'équation de d'Alembert peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'ondes stationnaires.**

Dès que les conditions aux limites imposent un nœud de vibration, il est naturel de chercher une solution sous forme d'onde stationnaire, et cela assure de pouvoir reconstruire toutes les solutions par combinaison linéaire.

2.3.2 Oscillations libres de la corde de Melde

Une corde de Melde est une corde vibrante comme étudié dans le paragraphe 1.1.1 où ses deux extrémités sont fixes.

Modes propres

Les conditions aux limites imposent un ébranlement nul aux deux extrémités de la corde. Pour trouver l'ébranlement des oscillations libres d'une corde de Melde, il est donc logique de chercher des solutions parmi les ondes stationnaires, et de trouver lesquelles sont compatibles avec les conditions aux limites. Ces solutions sont les modes propres de la corde.

Un **mode** d'un système physique est une solution des équations du mouvement, compatible avec les conditions aux limites, et dont la dépendance en temps est harmonique.

Les modes qui se développent dépendent de la nature des conditions aux limites. Dans le cas de conditions aux limites imposées dans la direction de propagation, par exemple pour la corde de Melde, les modes sont des ondes stationnaires appelées modes propres. En revanche, lorsque les conditions aux limites sont transverses à la direction de propagation, ce qui est le cas des guides d'ondes, les modes ont une structure mixte et conservent une partie progressive. Dans ce dernier cas, pour mettre l'accent sur cette différence, on ne parle plus de "modes propres", mais simplement de "modes", voire de modes de propagation.

Remarques :

- La notion de mode d'un système physique est une notion extrêmement générale, qui dépasse largement le cadre de la physique des ondes. Par exemple aux modes propres d'un système d'oscillateurs couplés, aux modes propres d'un puits quantique (qu'on appelle plutôt états propres)... Un système physique possède autant de modes qu'il a de degrés de liberté : un oscillateur masse-ressort a un mode propre, un système de deux pendules couplés en a deux... *Une corde de Melde, en tant que système continu, possède donc une infinité de modes propres.*
- Les fonctions définissant les modes forment une famille de fonctions orthonormée, au sens du produit scalaire des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, d'où la dénomination de modes normaux.

Le fait d'avoir des conditions aux limites implique de façon systématique une discrétisation des modes : le système sélectionne certaines longueurs d'onde, celles qui placent les nœuds et les ventres de vibration aux bons endroits. Cette discrétisation est inattendue car on a à faire à système continu. Cherchons donc les modes propres d'une corde de Melde, en cherchant $A(x, t)$ sous la forme d'une onde stationnaire :

$$A(x, t) = A_0 \cos(\omega t + \phi_1) \cos(kx + \phi_2) \quad (2.70)$$

Les conditions aux limites s'écrivent quelque soit t :

$$A(x = 0, t) = A(x = L, t) = 0 \quad (2.71)$$

avec L la longueur de la corde entre les deux points d'accroche. Ceci se traduit par :

$$\cos(\phi_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_2 = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.72)$$

et donc :

$$\cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}^* \quad (2.73)$$

Le signe de k n'a pas d'importance et détermine simplement la phase initiale à π près. Les modes propres de la corde de Melde sont quantifiés par

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \Leftrightarrow \quad L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad n \in \mathbb{Z}^* \quad (2.74)$$

La longueur de la corde contient un nombre entier de demi longueur d'onde du mode considéré. La pulsation ω dépend également de n en raison de la relation de dispersion :

$$\omega_n = k_n c = n \frac{\pi}{L} c = n \omega_1 \quad (2.75)$$

La condition de quantification sur les longueurs d'onde est universelle pour des systèmes physiques de ce type. En revanche, avoir $\omega_n \propto n$ est seulement une propriété de l'équation de d'Alembert des ondes planes.

Ainsi, l'ébranlement de la corde dans le mode propre n est de la forme :

$$A_n(x, t) = A_{0,n} \cos(n\omega_1 t + \phi_n) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad (2.76)$$

Dans le cas général, l'ébranlement de la corde vibrante est une onde quelconque qui se décompose comme une combinaison linéaire des modes propres :

$$A(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_{0,n} \cos(n\omega_1 t + \phi_n) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad (2.77)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)] \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad (2.78)$$

Ceci n'est pas une onde stationnaire, puisque l'espace et le temps ne sont pas découplés. Ce résultat est parfaitement naturel : les ondes stationnaires forment une base des solutions, et les modes propres représentent par définition l'ensemble des ondes stationnaires qui vérifient les conditions aux limites et qui s'imposent également à toute onde existant dans le système. Les coefficients A_n et B_n s'obtiennent à partir des conditions initiales suivantes $A(x, t = 0)$ et $\frac{\partial A}{\partial t}(x, t = 0)$. Ils s'identifient aux coefficients du développement en série de Fourier des fonctions définissant les conditions initiales :

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) A(x, t = 0) dx \\ B_n = \frac{1}{n\pi c} \int_{-L}^L \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \frac{\partial A}{\partial t}(x, t = 0) dx \end{cases}$$

Pour être dans le cadre mathématique exact des séries de Fourier, il est nécessaire de prolonger les fonctions $A(x, t = 0)$ et $\frac{\partial A}{\partial t}(x, t = 0)$ sur l'ensemble des réels à savoir :

- par imparité, car le développement de Fourier ne contient que des sinus ;
- par périodicité, de période $2L$.

Comme le développement se fait sur les fonctions trigonométriques et pas sur les exponentielles complexes, des facteurs 2 apparaissent : le préfacteur de l'intégrale définissant A_n est en fait $\frac{2}{L}$ alors que celui de l'intégrale donnant B_n vaut $\frac{2}{L} \frac{L}{n\pi c}$.

Analyse énergétique

La densité linéique d'énergie d'une corde vibrante s'écrit :

$$e = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \quad (2.79)$$

Le premier terme est une énergie cinétique, alors que le second est une énergie potentielle élastique. Calculons l'énergie de la corde lorsqu'elle est dans un mode propre :

$$A_n(x, t) = A_{0,n} \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x) \quad (2.80)$$

Les deux carrés intervenant dans les densités linéiques d'énergie valent alors :

$$\left(\frac{\partial A_n}{\partial t}\right)^2 = A_{n,0}^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t + \phi_n) \sin^2(k_n x) \quad (2.81)$$

$$\left(\frac{\partial A_n}{\partial x}\right)^2 = A_{n,0}^2 k_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \cos^2(k_n x) \quad (2.82)$$

ce qui permet d'obtenir l'énergie totale comme :

$$E_n(t) = \int_0^L e_n(x, t) dx \quad (2.83)$$

Or $k_n = \frac{n\pi}{L}$ alors :

$$\int_0^L \sin^2(k_n x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[1 - \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\right] dx = \frac{L}{2} \quad (2.84)$$

puisque le cosinus est intégré sur un nombre entier de périodes. Ainsi :

$$E_n = A_{0,n}^2 \left[\frac{L}{4} \mu \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t + \phi_n) + \frac{L}{4} T_0 k_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \right] \quad (2.85)$$

Or la célérité des ondes vaut $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ et la relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = c^2 k^2$ donc :

$$\mu \omega_n^2 = T_0 k_n^2 \quad (2.86)$$

et ainsi :

$$E_n = \frac{L}{4} A_{0,n}^2 T_0 k_n^2 \quad (2.87)$$

soit :

$$E_n = \frac{n^2 T_0 \pi^2}{4L} A_{0,n}^2 \quad (2.88)$$

L'énergie ne dépend pas du temps et donc sans apport ou dissipation d'énergie, l'énergie d'un mode propre ne varie pas au cours du temps. Dans le cas général où $A(x, t)$ est une combinaison linéaire de modes propres, on montre que l'énergie totale de la corde est la somme des énergies de chacun des modes propres. La démonstration implique le caractère orthogonal de deux modes propres différents, qui forment bien des modes normaux.

L'énergie totale des oscillations libres de la corde de Melde est la somme des énergies injectées dans chaque mode par les conditions initiales, sans qu'il n'y ait de réorganisation ultérieure de l'énergie entre les modes.

2.3.3 Oscillations forcées d'une corde de Melde

Une autre façon d'étudier la corde de Melde (c'est-à-dire changer les conditions aux limites) est de fixer une extrémité et de forcer l'autre extrémité situé en $x = 0$ à osciller à une certaine pulsation ω_0 fixée. Les nouvelles conditions aux limites pour tout t :

$$A(x = 0, t) = a_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.89)$$

$$A(x = L, t) = 0 \quad (2.90)$$

Comme les conditions aux limites imposent en $x = L$ un nœud de vibration cherchons les solutions sous la forme d'ondes stationnaires :

$$A(x, t) = A_0 \cos(\omega t + \phi_1) \cos(kx + \phi_2) \quad (2.91)$$

Cette solution doit vérifier la relation de dispersion qui n'est pas modifiée par les conditions aux limites, on sait donc que $k = \frac{\omega}{c}$. La condition en $x = 0$ donne :

$$A_0 \cos(\omega t + \phi_1) \cos(\phi_2) = a_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.92)$$

et ceci pour tout temps donc on a :

$$\omega = \omega_0 \quad , \quad \phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_0 \cos(\phi_2) = a_0 \quad (2.93)$$

La pulsation de l'onde stationnaire résultante est nécessairement la pulsation de forçage que celle-ci soit un mode propre ou non. Ainsi, il est possible d'utiliser et de propager une pulsation qui ne pourrait donner d'oscillation libre. On note $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$. La condition en $x = L$ donne :

$$\cos(k_0 L + \phi_2) = 0 \quad (2.94)$$

soit :

$$k_0 L + \phi_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \phi_2 = -k_0 L + \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.95)$$

et donc :

$$\cos(k_0 x + \phi_2) = \cos \left[k_0 (x - L) + n\pi + \frac{\pi}{2} \right] = (-1)^{n+1} \sin[k_0 (x - L)] \quad (2.96)$$

Ceci est vrai pour tout x et en particulier pour $x = 0$ soit

$$\cos(\phi_2) = (-1)^n \sin(k_0 L) \quad (2.97)$$

on en déduit alors l'amplitude :

$$A_0 = \frac{a_0}{\cos \phi_2} = \frac{a_0}{(-1)^n \sin(k_0 L)} \quad (2.98)$$

En somme on a comme solution :

$$\boxed{A(x, t) = a_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\sin(k_0(L - x))}{\sin(k_0 L)}} \quad (2.99)$$

Lorsque $k_0 L = m\pi$, $m \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire lorsque la fréquence de forçage ω_0 correspond à une fréquence propre $n\omega_1$ de la corde, la corde est en résonance. D'après le calcul, l'amplitude des oscillations tendrait alors vers l'infini. Toutefois, des phénomènes dissipatifs et des non-linéarités dans le comportement de la corde qui n'ont pas été modélisés en compte ici empêchent ce phénomène non-physique. **Un système physique entre en résonance lorsqu'il est excité à une fréquence égale à l'une de ses fréquences propres.**

Il est important de bien comprendre que la résonance est une notion relative à des oscillations forcées, alors que les modes propres sont eux relatifs à des oscillations libres.

On voit ici apparaître la correspondance entre ces deux types d'oscillations, qui sont au premier abord différents. Ces résultats peuvent être interprétés en termes énergétiques. À la résonance, l'excitateur transmet de l'énergie à l'oscillateur qui est en mesure de la stocker puisque la fréquence correspond à celle d'un mode propre. L'énergie totale accumulée finit alors par diverger, ce qui donne lieu à la résonance. Hors de la résonance, le système n'est pas en mesure de conserver l'énergie. Ainsi, après un certain temps caractéristique, l'énergie est renvoyée de l'oscillateur vers l'excitateur. On retrouve alors la caractérisation énergétique de la résonance : **Il y a résonance lorsque le transfert de puissance de l'excitateur vers l'oscillateur est maximal.**

Notons qu'en pratique des phénomènes dissipatifs dans l'oscillateur font qu'un transfert net d'énergie existe toujours entre excitateur et oscillateur. La condition d'équilibre citée ci-dessus ne peut jamais être réalisée. De même, en présence de dissipation, la divergence évoquée ci-dessus devient un maximum.

2.3.4 Remarques finales sur la corde de Melde

En dépit de son apparente simplicité, la physique de la corde de Melde recèle un bon nombre de pièges. Les résultats sur les oscillations libres et ceux sur les oscillations forcées ne doivent pas être mélangés, la différence provenant des conditions aux limites imposées à la corde. En effet :

- dans le cas des oscillations libres, l'onde dépend de la donnée d'une condition initiale, c'est-à-dire $A(x, t = 0)$ à un instant t unique et en tout point x
- dans le cas des oscillations forcées, l'onde dépend de la donnée d'une condition aux limites, c'est-à-dire $A(x = 0, t)$ en un point x unique et à tout instant t .

Il est donc logique que les résultats ne soient pas directement transposables d'un cas à l'autre, mais qu'il y ait une symétrie dans le rôle joué respectivement par l'espace et le temps.

En particulier, lorsque les oscillations sont forcées sinusoidalement, l'onde est stationnaire puisqu'elle découple espace et temps. Au contraire, lorsque les oscillations sont libres, elle ne l'est pas, mais est une combinaison linéaire d'ondes stationnaires.

Attention toutefois, si jamais le forçage n'est pas harmonique, alors l'onde n'est pas stationnaire mais combinaison linéaire d'ondes stationnaires aux différentes fréquences du forçage ; et si jamais la condition initiale a la forme d'un mode propre (c'est-à-dire un sinus), alors l'onde est stationnaire. On voit ici apparaître la symétrie mentionnée précédemment, mais ce ne sont pas les cas auxquels on s'intéresse le plus souvent.

Par ailleurs, il n'y a pas de "décomposition sur la base des modes propres" ou "d'excitation de plusieurs modes" dans le cas des oscillations forcées, cela ne vaut que pour les oscillations libres. Ce résultat devient évident en remarquant qu'un mode propre est caractérisé par la donnée de sa pulsation, alors que dans le cas des oscillations forcées la pulsation est donnée par le forçage : la pulsation des oscillations de la corde ne peut donc pas correspondre à celle de plusieurs modes propres à la fois. Néanmoins, il ne faut pas croire pour autant que les deux cas n'ont rien à voir. En particulier, l'autre condition aux limites qui impose une extrémité fixe à la corde et qui permet l'existence d'ondes stationnaires est la même dans les deux situations.

Chapitre 3

Propagation dans un milieu complexe

Nous allons maintenant nous intéresser à la propagation dans un milieu dispersif et à ses conséquences, en particulier relatives à l'atténuation. Commençons par bien insister sur le titre du chapitre.

Ce chapitre traite de propagation dans un milieu dispersif, et non pas de propagation dispersive. La dispersion peut en effet être due :

- ou bien aux propriétés du milieu, dont la réponse dépend de la fréquence d'excitation, ce qui fait l'objet de ce chapitre ;
- ou bien aux conditions aux limites transverses à la propagation, ce qui sera traité dans le chapitre suivant sur le guidage.

Insistons également sur la différence entre atténuation et absorption :

Une onde est **atténuée** lorsque son amplitude, et donc sa densité locale d'énergie, décroissent au cours de la propagation.

Une onde est **absorbée** lorsqu'elle cède de l'énergie au milieu dans lequel elle se propage.

Bien évidemment, l'absorption entraîne l'atténuation, mais il peut y avoir atténuation sans absorption. Le premier exemple est celui d'une onde sphérique : son amplitude décroît en $\frac{1}{r}$ au cours de la propagation, elle est donc atténuée, mais sans pour autant être absorbée. La cause de l'atténuation est un simple étalement dans l'espace. Nous verrons dans ce chapitre une autre cause d'atténuation, sans étalement ni absorption.

3.1 Des équations de propagation plus aussi simples

Le but de ce paragraphe est d'établir des équations de propagation qui ne sont plus de la forme de l'équation de d'Alembert.

3.1.1 Chaîne de pendules couplés

Modélisation

Considérons une chaîne de pendule couplés : chaque pendule est une barre homogène de masse m et de longueur L ; il oscille dans le plan Oyz autour de l'axe Ox . Le pendule n est repéré par l'abscisse $x_n = nd$ et son mouvement est repéré par l'angle θ_n . L'espacement entre les points de fixation des pendules est constant et vaut d . Chaque pendule est relié par son premier voisin via un fil de torsion de constante C , confondu avec l'axe Ox . Nous prenons également en compte le frottement de l'air, de type frottement fluide de la forme $-\alpha\dot{\theta}_n$. On rappelle que le moment de chaque pendule par rapport à son extrémité vaut $J = \frac{1}{3}mL^2$

Mise en équation

Chaque pendule est soumise à son propre poids, aux actions des fils de torsion de par et d'autre et aux frottements fluides. Écrivons alors le théorème du moment cinétique au point O_n point d'accroche du pendule n , projeté sur l'axe Ox . Le pendule n est soumis à son poids $m\mathbf{g}$ qui s'applique sur son centre de gravité G_n , de moment $\mathbf{O}_n\mathbf{G}_n \wedge m\mathbf{g} = -\frac{1}{2}Lmg \sin(\theta_n)\mathbf{e}_x$. Le couple de rappel exercé par le fil de torsion compris entre O_{n-1} et O_n est $-C(\theta_n - \theta_{n-1})\mathbf{e}_x$; le fil de torsion compris entre O_n et O_{n+1} exerce le couple de rappel $-C(\theta_n - \theta_{n+1})\mathbf{e}_x$. La projection selon \mathbf{e}_x du théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$\frac{mL^2}{3} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} = C(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}) - \frac{mgL}{2} \sin \theta_n - \alpha \frac{d\theta_n}{dt} \quad (3.1)$$

Nous considérons alors des oscillations de faibles amplitudes et ainsi on peut linéariser le sinus $\sin \theta_n \simeq \theta_n$ et l'équation devient :

$$\frac{mL^2}{3} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} = C(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}) - \frac{mgL}{2} \theta_n - \alpha \frac{d\theta_n}{dt} \quad (3.2)$$

Approximation des milieux continus

L'équation ainsi écrite n'est pas soluble analytiquement car l'angle à n est couplé avec $n-1$ et $n+1$. Pour régler ce problème, nous supposons que la distance d entre deux pendules successifs est très petite devant les longueurs d'onde des ondes étudiées. Nous pouvons donc construire une fonction $\theta(x, t)$ suffisamment dérivable et continue, telle que $\theta(x = nd, t) = \theta_n(t)$. On peut alors remplacer θ_{n-1} et θ_{n+1} par leur développement de Taylor au voisinage de $x = nd$:

$$\theta_{n+1}(t) = \theta(x + d, t) = \theta(x, t) + d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \theta_n(t) + d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

$$\theta_{n-1}(t) = \theta(x - d, t) = \theta(x, t) - d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \theta_n(t) - d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

et donc ainsi :

$$\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1} = d^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

et donc :

$$\boxed{\frac{mL^2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = Cd^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{mgL}{2} \theta - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t}} \quad (3.6)$$

L'équation obtenue ressemble à l'équation de d'Alembert mais avec deux termes supplémentaires. Ainsi, les résultats obtenus sur la propagation du chapitre précédent ne seront plus valables dans ce cas là.

L'équation obtenue en l'absence de frottement, c'est-à-dire

$$\frac{mL^2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = Cd^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{mgL}{2} \theta(x, t) \quad (3.7)$$

est connue sous le nom d'équation de Klein-Gordon. Cette équation est de la forme, pour un champ $y(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \omega_c^2 y \quad (3.8)$$

Cette équation a déjà été rencontrée lors de la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma dilué (cf cours électromagnétisme dans le vide). La pulsation ω_c correspondait à la pulsation plasma.

3.1.2 Équation des télégraphistes

L'équation des télégraphistes modélise la propagation du mode fondamental d'un câble coaxial dissipatif. Au modèle des constantes réparties présenté au début du cours, on adjoint deux sources de dissipation, comme représenté FIGURE 3.1 :

- La première est l'effet Joule dans les conducteurs. Il se modélise par l'ajout dans l'élément de câble d'une résistance $r dx$ montée en série avec la bobine.
- La seconde est la perte de charge due au caractère imparfait de l'isolant séparant l'âme et la gaine. Elle se modélise par l'ajout dans l'élément de câble d'une conductance $g dx$ montée en parallèle avec le condensateur.

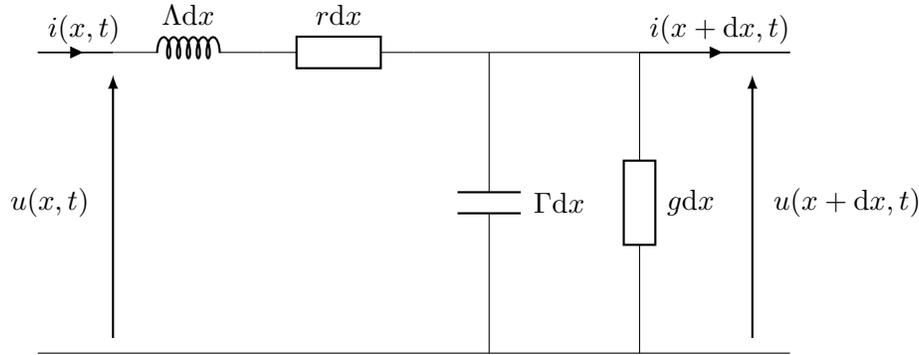


FIGURE 3.1 – Modélisation mésoscopique d'un câble coaxial avec le modèle des constantes réparties avec de la dissipation.

Une résistance et une conductance décrivent physiquement le même effet. Pourtant, on choisit volontairement deux descriptions différentes. Ceci est dû au fait que l'on souhaite avoir des équations linéaires en dx , ce qui exige de traiter différemment les résistances mises en série ou en parallèle.

Comme pour le câble sans perte appliquons les lois de Kirchoff. Appliquons la loi des mailles :

$$u(x, t) - u(x + dx, t) = r dx i(x, t) + \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -r i - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (3.9)$$

De même, en appliquant la loi des nœuds :

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = g dx u(x + dx, t) + \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -g u - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.10)$$

Pour obtenir ces résultats, on a appliqué un développement de Taylor à l'ordre un. Pour obtenir l'équation des télégraphistes, on dérive par rapport à x l'équation (3.9) et par rapport à t l'équation (3.10) et on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (r\Gamma + \Lambda g) \frac{\partial u}{\partial t} + rgu} \quad (3.11)$$

Avec la célérité c qui vaut toujours $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$. On se retrouve avec une équation comparable à l'équation des pendules couplés. On retrouve bien l'équation de d'Alembert dans le cas sans pertes ($r = 0$, $g = 0$). En revanche il n'est pas possible d'obtenir l'équation de Klein-Gordon avec ce système car l'annulation du terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ n'est possible que si $r = g = 0$ et dans ce cas là on obtient l'équation de d'Alembert.

3.2 Solutions et caractéristiques de telles équations

3.2.1 Onde plane pseudo-progressive harmonique

Contrairement à l'équation de d'Alembert, les équations précédentes ne sont pas facilement soluble. En revanche, la caractéristique importante et commune à ces équations est qu'elles sont linéaires. Cette linéarité permet de chercher les solutions harmoniques et comme toute fonction peut être décomposée en somme de fonctions sinusoïdales, il est possible de reconstruire l'ensemble des solutions.

La linéarité permet également d'utiliser la notation complexe. Une solution harmonique sera donc représenté dans le cas des pendules par la fonction complexe $\underline{\theta}(x, t) = \underline{F}(x)e^{i\omega t}$, la solution réelle étant simplement $\theta(x, t) = \text{Re}\underline{\theta}(x, t)$. Après simplification par $e^{i\omega t}$ on obtient :

$$-\omega^2 \frac{mL^2}{3} \underline{F}(x) = Cd^2 \frac{d^2 \underline{F}}{dx^2} - \frac{mgL}{2} \underline{F}(x) - i\omega\alpha \underline{F}(x) \quad (3.12)$$

On obtient alors une équation de la forme

$$\frac{d^2 \underline{F}}{dx^2} + \underline{K} \underline{F}(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{K} = \frac{\omega^2 mL^2}{3Cd^2} - \frac{mgL}{2Cd^2} - \frac{i\omega\alpha}{Cd^2} \quad (3.13)$$

La solution générale est de la forme :

$$\underline{F}(x) = \underline{A}e^{-i\underline{k}x} + \underline{B}e^{i\underline{k}x} \quad (3.14)$$

où \underline{k} est tel que $(i\underline{k})^2 = -\underline{K}$ soit $\underline{K} = -(i\underline{k})^2$. La déviation angulaire correspondantes est :

$$\underline{\theta}(x, t) = \underline{A}e^{i(\omega t - \underline{k}x)} + \underline{B}e^{i(\omega t + \underline{k}x)} \quad (3.15)$$

Les deux termes de l'expression ressemblent formellement à des ondes planes progressives harmoniques mais dont le nombre d'onde serait complexe : le premier correspondrait à une onde se propageant selon les x croissants, le second à une onde se propageant se propageant dans le sens des x décroissants. Le caractère complexe de \underline{k} conduit à un comportement qui ne se réduit par à une simple propagation ; ces ondes seront appelées ondes planes pseudo-progressives harmoniques.

Une onde plane pseudo-progressive harmonique s'écrit de façon général sous la forme complexe :

$$\underline{y}(x, t) = \underline{Y}_0 e^{i(\omega t - \underline{\mathbf{k}}(\omega) \cdot \mathbf{OM})} \quad (3.16)$$

où le vecteur d'onde $\underline{\mathbf{k}} = \underline{k}\mathbf{u}$ est a priori complexe ; la dépendance avec la pulsation ω est donnée par la relation de dispersion.

De même que toute solution de l'équation de d'Alembert peut s'écrire comme la superposition d'ondes progressives harmoniques, toute solution d'une équation d'onde linéaire peut s'écrire comme la superposition d'ondes planes pseudo-progressives harmoniques.

3.2.2 Relation de dispersion

La relation entre le nombre d'onde et la pulsation s'appelle la relation de dispersion et contient toute l'information pour la propagation des ondes. Pour la trouver, écrivons que l'onde plane pseudo-progressive harmonique se déplace que dans un sens :

$$\underline{\theta}(x, t) = \underline{A}e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \quad (3.17)$$

Cette solution vérifie l'équation d'onde et en simplifiant par $e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ on obtient :

$$-\omega^2 \frac{mL^2}{3} \underline{A} - \left[-\underline{k}^2 Cd^2 - \frac{mgL}{2} + i\omega\alpha \right] \underline{A} = 0 \quad (3.18)$$

L'onde cherchée est solution si $\underline{A} \neq 0$, soit si :

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2}\omega^2 - \frac{mgL}{2Cd^2} - i\frac{\omega\alpha}{Cd^2} \quad (3.19)$$

Le nombre complexe peut alors se décomposer sous la forme :

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega) \quad (3.20)$$

3.2.3 Dispersion et absorption

Expression de l'onde réelle

En posant $\underline{A} = Ae^{i\varphi}$, l'onde s'écrit alors :

$$\underline{\theta}(x, t) = Ae^{i(\omega t - k'(\omega)x - ik''(\omega)x + \varphi)} = Ae^{k''(\omega)x} e^{i(\omega t - k'(\omega)x + \varphi)} \quad (3.21)$$

L'onde réelle $\theta(x, t)$ est alors donnée par :

$$\theta(x, t) = Ae^{k''(\omega)x} \cos(\omega t - k'(\omega)x + \varphi) \quad (3.22)$$

Dispersion

Le terme $\cos(\omega t - k'(\omega)x + \varphi)$ est caractéristique d'une onde plane progressive harmonique se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse $\frac{\omega}{k'(\omega)}$. Cette vitesse qui décrit la propagation de la phase est la vitesse de phase déjà rencontrée :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)} \quad (3.23)$$

Si la vitesse de phase dépend de la pulsation de l'onde alors le phénomène de propagation est dit **dispersif**. Si on considère une onde comme une superposition d'ondes planes pseudo-progressives harmonique de pulsation différents se propageant dans un tel milieu, l'onde qui en résulte se propage en se déformant car chaque composante n'a pas la même vitesse. L'équation de d'Alembert n'est qu'un cas particulier d'équation linéaire où $k = \omega/c$ et donc la propagation s'effectue sans dispersion.

La dispersion peut avoir deux sources :

- le milieu de propagation comme dans tous les exemples que nous venons de traiter. Dans ce cas là, l'équation de propagation est différente de l'équation de d'Alembert.
- les conditions aux limites qui peuvent entraîner la propagation dispersive d'une onde obéissante à l'équation de d'Alembert. Nous verrons cela dans le prochain chapitre.

Absorption/Atténuation

L'amplitude de l'onde évolue au cours de la propagation avec le terme $e^{k''(\omega)x}$. Dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des x croissants ($k'(\omega) > 0$), un terme $k''(\omega)$ traduit une atténuation de l'onde.

3.2.4 Cas particulier de l'équation de Klein-Gordon

On considère l'équation de Klein-Gordon de la forme :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \omega_c^2 y \quad (3.24)$$

correspondant par exemple aux pendules couplés sans frottement ou une onde électromagnétique dans un plasma.

La recherche d'une solution sous la forme d'une onde plane pseudo-progressive harmonique de la forme $\underline{y}(x, t) = \underline{y}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ donne $-\omega^2 - -c^2 \underline{k}^2 - \omega_c^2$ et donne alors la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \quad (3.25)$$

La nature de $\underline{k} = k'(\omega) + ik''(\omega)$ dépend des valeurs prises par la pulsation ω .

- Cas où $\omega > \omega_c$. Alors $\underline{k}^2 > 0$, le nombre d'onde est réel et est donné par :

$$\underline{k} = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} \quad (3.26)$$

On a alors $k''(\omega) = 0$, il n'y a pas d'atténuation.

La vitesse de phase est donnée par :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \quad (3.27)$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation ω : le phénomène de propagation est dispersif. On trouve donc $v_\varphi > c$, alors que c est la vitesse de la lumière dans le vide. Ce résultat n'est pas en contradiction avec la théorie de la relativité. En effet, cette dernière stipule qu'on ne peut pas transmettre d'information ni d'énergie à une vitesse plus grande que c . Or une OPPH ne peut de toutes façons pas contenir d'information, elle n'est au plus qu'une porteuse, dont l'enveloppe code l'information. Nous avons montré que l'enveloppe ne se propage pas à la vitesse de phase mais à la vitesse de groupe. L'aspect énergétique est moins intuitif, puisqu'une OPPH peut bel et bien transporter de l'énergie. Malgré tout, un bilan énergétique permet de montrer que la vitesse de l'énergie n'est pas la vitesse de phase mais la vitesse de groupe.

Pour terminer de se rassurer, calculons donc la vitesse de groupe. Elle pourrait s'obtenir en calculant directement la dérivée de la relation de dispersion, mais cette méthode est en général très maladroite. Il est préférable de différentier la relation de dispersion. Ici,

$$d(k^2) = d\left(\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}\right) \quad (3.28)$$

soit :

$$2k' dk' = \frac{2\omega}{c^2} d\omega \quad (3.29)$$

d'où :

$$\frac{d\omega}{dk'} = c^2 \frac{k'}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} \quad (3.30)$$

et donc :

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \quad (3.31)$$

La vitesse de groupe est bien inférieure à c , ce qui montre que ce n'est pas en contradiction avec la relativité restreinte.

On trouve ici la relation $v_\varphi v_g = c^2$. Cette relation est remarquable mais n'est pas générale. Elle concerne uniquement les relations de dispersion de la forme $\omega^2 = k^2 c^2 + \text{cte}$.

- Cas où $\omega < \omega_c$. Alors $\underline{k}^2 < 0$, le nombre d'onde est imaginaire pur et est donné par :

$$k = ik'' = \pm i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c} \quad (3.32)$$

L'onde réelle a pour expression :

$$y(x, t) = y_0 e^{k''(\omega)x} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.33)$$

Cette onde, qui s'écrit comme le produit d'une fonction de x et d'une fonction de t est une onde stationnaire. Contrairement aux ondes stationnaires de l'équation de d'Alembert, l'amplitude ne varie pas sinusoidalement mais décroît exponentiellement avec x (avec $x > 0$ et $k'' < 0$; le cas croissant n'est pas envisageable dans un espace demi-infini). La distance caractéristique de décroissance est $\delta(\omega) = \frac{1}{|k''(\omega)|}$. Comme $k' = 0$ on ne peut définir de vitesse de phase et donc il n'y a pas de propagation.

Le tracé de la partie réelle du nombre d'onde normalisée est présente sur la FIGURE 3.2. Elle permet de visualiser trois régimes : le régime où $\omega/\omega_c < 1$ tel que l'onde est amortie, la région $\omega/\omega_c \gg 1$ où la propagation n'est plus dispersive et une région intermédiaire avec de la dispersion.

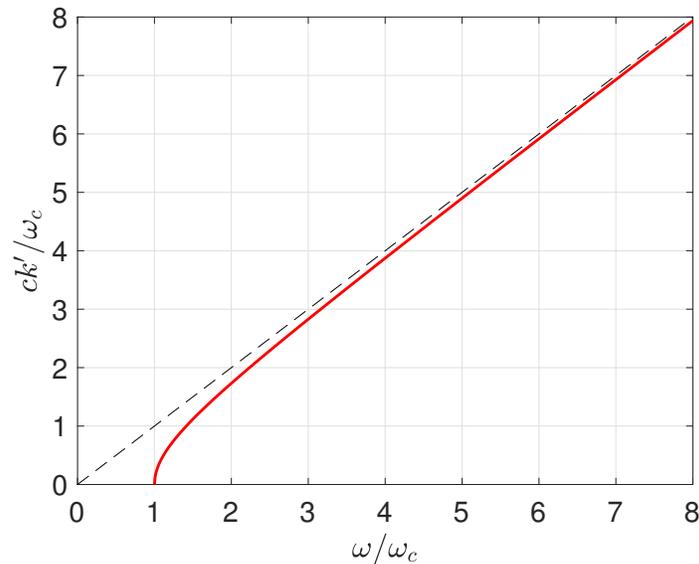


FIGURE 3.2 – Partie réelle normalisée du nombre d'onde en fonction de la pulsation adimensionnée.

3.2.5 Dispersion, atténuation ou les deux ?

Il est possible pour un système physique d'avoir soit de la dispersion des ondes soit de l'atténuation des ondes, soit les deux à la fois.

Sans dispersion et sans atténuation

C'est le cas le plus simple décrit dans le chapitre 2 et par l'équation de d'Alembert.

Cas avec dispersion et atténuation

C'est le cas général et le plus courant qu'on rencontre dans les systèmes car on modifie de la même façon la partie imaginaire et la partie réelle du nombre d'onde. Le modèle du câble coaxial dissipatif en est un exemple.

La propagation est dispersive mais sans atténuation

C'est le cas pour les systèmes qui répondent avec une certaine inertie en fonction de la fréquence d'excitation mais dans lequel il n'y a pas de dissipation (ou elle est négligeable). C'est le cas de la propagation

d'une onde électromagnétique dans un plasma pour une fréquence supérieure à la pulsation plasma. Nous avons vu dans le cours d'électromagnétisme dans le vide que :

$$k = k' = \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (3.34)$$

La non linéarité de k par rapport à ω est le signe de la dispersion.

La propagation est atténuée mais pas dispersive

Ce n'est pas un régime qu'on rencontre habituellement dans les systèmes physiques mais il est possible de l'atteindre. Par exemple en prenant les "bonnes" valeurs des composants dans le modèle du câble coaxiale avec atténuation. En effet on sait la vitesse des ondes s'écrit $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$. La relation de dispersion pour un tel câble s'écrit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega(\Lambda g + \Gamma r) - rg \quad (3.35)$$

On peut alors factoriser sous la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + i \frac{c^2}{\omega} (\Lambda g + \Gamma r) - rg \frac{c^2}{\omega^2} \right] \quad (3.36)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + i \left(\frac{r}{\Lambda\omega} + \frac{g}{\Gamma\omega} \right) - \frac{rg}{\Gamma\Lambda\omega^2} \right] \quad (3.37)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{g}{\Gamma\omega} \right) \left(1 + i \frac{r}{\Lambda\omega} \right) \quad (3.38)$$

Si le câble est fabriqué en respectant la relation

$$\frac{g}{\Gamma} = \frac{r}{\Lambda} \quad (3.39)$$

appelé condition de Heaviside alors la relation de dispersion se met sous la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{r}{\Gamma\omega} \right)^2 \quad (3.40)$$

Soit :

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \left(1 + i \frac{r}{\Lambda\omega} \right) \quad (3.41)$$

Un tel câble permet donc d'atteindre $k' = \frac{\omega}{c}$, soit $v_\varphi = c$ qui ne dépend pas de ω . Il n'y a donc pas de dispersion lors de la propagation d'ondes dans un tel câble. En revanche les ondes sont bien atténuées et on montre que la longueur caractéristique d'atténuation vaut :

$$\delta = \frac{\Lambda c}{r} \quad (3.42)$$

qui ne dépend pas de ω . On remarque ainsi que toutes les fréquences d'un signal seront atténuées de la même façon.

Il faut savoir que les câbles coaxiaux sont rarement construits pour respecter cette condition car l'atténuation de l'onde est en général trop grande.

Onde évanescente ou onde absorbée ?

Un cas n'a pas encore été abordé : si $\omega \leq \omega_c$ dans l'équation de Klein-Gordon alors le nombre k est imaginaire pur, ce qui interdit donc la propagation.

Une onde forcée dans un milieu où elle ne peut se propager à cause d'un nombre k imaginaire pur est appelée **onde évanescente**.

Si à présent nous reprenons le cas du plasma du chapitre 6 du cours d'électromagnétisme dans le vide. On considère une onde électromagnétique qui part du vide pour arriver dans le plasma. Dans le vide, on écrit cette onde comme une OPPH se propageant selon x et polarisée selon z :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.43)$$

Le champ électrique est continu car tangentielle à l'interface, donc dans le plasma on peut écrire :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(k_p x - \omega t)} \quad (3.44)$$

avec k_p le vecteur d'onde dans le plasma. Nous avons vu que la relation de dispersion dans le plasma s'écrit :

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \quad (3.45)$$

Si la pulsation de l'onde est inférieure à la pulsation plasma $\omega < \omega_p$ alors le nombre d'onde est imaginaire pur et vaut :

$$k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} = \pm i k'' \quad (3.46)$$

Et donc l'onde s'écrit dans le plasma :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-k'' x} e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z \quad (3.47)$$

où la solution avec $+k''$ a été retiré pour éviter que le champ électrique diverge en $x \rightarrow +\infty$. La relation de structure $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}}{\omega}$ (elle est valable pour les pseudo-OPPH¹ et ne fonctionne que pour les champs complexes car le nombre d'onde est complexe) permet d'écrire :

$$\mathbf{B} = -i \frac{k''}{\omega} E_0 e^{-k'' x} e^{-i\omega t} \mathbf{e}_y \quad (3.48)$$

on peut alors repasser en réel :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = E_0 e^{-k'' x} \cos(\omega t) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{B} = -\frac{k''}{\omega} E_0 e^{-k'' x} \sin(\omega t) \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (3.49)$$

On remarque alors que les dépendances temporelle et spatiale sont découplés, on a donc une onde stationnaire.

Le vecteur de Poynting moyenné dans le temps est nul car les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont en quadrature de phase. Le fait que l'onde soit stationnaire suffit à montrer que le champ ne transporte pas d'énergie en moyenne. Ainsi :

Une onde évanescence est une onde stationnaire qui ne transporte pas d'énergie en moyenne. Toute l'énergie incidente est réfléchi vers le milieu source et aucune énergie n'est cédée par l'onde au milieu où elle s'atténue.

Remarques :

1. Le vecteur de Poynting n'est nul que en moyenne par rapport au temps. À tout instant il a une valeur non nulle. Cela signifie que l'énergie entre dans le plasma pendant une demi-période puis ressort pendant la demi-période suivante.

1. C'est-à-dire les ondes planes, hamoniques mais pas forcément progressives.

2. Nous avons considéré dans cet exemple (et c'est souvent le cas) que les espaces étaient semi-infinis. Cela n'est pas anodin. En effet, si la longueur du milieu est de l'ordre de grandeur de la longueur d'atténuation alors l'onde peut traverser le milieu en question. Ce phénomène est complètement analogue à l'effet tunnel en mécanique quantique. Mathématiquement, il n'est plus possible de supprimer le terme en $e^{+k''x}$ car il ne diverge plus. On se retrouve alors avec dans le milieu avec une onde qui est la somme d'ondes évanescentes.

Comparaison avec une onde absorbée

Afin de voir la différence avec une onde évanescente considérons le cas d'une onde électromagnétique arrivant dans un métal de conductivité finie. Nous avons vu dans le cours d'électromagnétisme dans la matière que le nombre d'onde s'écrit $k = k' + ik''$ avec :

$$k' = k'' = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}} = \frac{1}{\delta} \quad (3.50)$$

et donc que le champ électrique dans le métal s'écrit alors :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)} \mathbf{e}_z \quad (3.51)$$

Et donc le champ magnétique s'écrit :

$$\mathbf{B} = \frac{ik'' - k'}{\omega} E_0 e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)} \mathbf{e}_y \quad (3.52)$$

Pour analyser ce qu'il se passe, repassons en réel :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-k''x} \cos(\omega t - k'x) \mathbf{e}_z \quad (3.53)$$

et

$$\mathbf{B} = -\frac{E_0}{\omega} e^{-k''x} [k'' \sin(\omega t - k'x) + k' \cos(\omega t - k'x)] \mathbf{e}_y \quad (3.54)$$

On remarque alors que l'onde absorbée en question n'est pas stationnaire car les dépendances en espace et en temps sont toujours couplés. De plus, comme les champs ne sont pas en quadrature de phase la moyenne du vecteur de Poyntng n'est pas nulle et vaut :

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 k'}{2\mu_0 \omega} e^{-2k''x} \mathbf{e}_x \quad (3.55)$$

Une onde absorbée transporte donc de l'énergie. Cette dernière est absorbée et dissipée dans le milieu de propagation et n'est pas réfléchi.

Cela ne signifie pas qu'aucune fraction de l'énergie entrant dans le métal n'en ressort. En effet, sur une fraction de période dépendant du déphasage entre les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} le vecteur de Poynting instantané est orienté selon $-\mathbf{e}_x$, signe que de l'énergie passe du métal au vide. En revanche, en moyenne, l'énergie entre globalement dans le métal où elle est dissipée sous forme d'énergie thermique par effet Joule. Cela ne signifie pas non plus qu'il n'y a pas de réflexion à l'interface.

Onde évanescente lors d'une réflexion totale

Considérons le cas d'une OPPH se propageant dans un diélectrique d'indice optique n et arrivant sur une interface avec le vide. L'onde arrive avec un angle θ par rapport à la perpendiculaire à l'interface. On suppose alors que l'angle θ est supérieur à l'angle critique défini par

$$\theta_c = \arcsin \frac{1}{n} \quad (3.56)$$

donnant lieu alors à une réflexion totale. Pour faire le calcul prenons une onde polarisée rectilignement selon \mathbf{e}_z :

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t} \mathbf{e}_z \quad (3.57)$$

avec \mathbf{k}_i le vecteur d'onde incident. On notera alors \mathbf{k}_r et \mathbf{k}_t les vecteurs d'onde réfléchi et transmis. Il existe pourtant un onde transmise dans le vide, dont le champ électrique vaut :

$$\mathbf{E}_t = E_{0t} e^{-k_\perp x} e^{k_\parallel y \omega t} \mathbf{e}_z \quad (3.58)$$

avec :

$$k_\parallel = n \frac{\omega}{c} \sin \theta = n k_i^y, \quad k_\perp = \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1} \quad (3.59)$$

L'onde transmise lors d'une réflexion totale a une structure mixte, elle est évanescente dans la direction orthogonale à l'interface et progressive dans la direction de l'interface.

Dans ce cas, les plans équiamplitude ($x = cte$) sont orthogonaux aux plans équiphase ($y = cte$), ce qui diffère du cas d'une onde amortie.

3.3 Propagation d'un paquet d'onde en présence de dispersion

Nous avons vu dans le chapitre précédent la propagation d'un paquet d'onde en absence de dispersion. Celui-ci se propage sans déformation. Mais lors de la propagation dans un milieu dispersif la situation est différente. Par soucis de simplification, nous considérerons que l'atténuation est négligeable et que le milieu est purement dispersif. Le nombre d'onde k est donc réel et dépend de la pulsation d'excitation ω via la relation de dispersion. Pour simplifier l'étude nous supposons k connu et nous en déduisons la pulsation via la relation de dispersion $\omega(k)$. *Cela à se placer d'un point de vue d'observateur qui mesure le nombre d'onde k via la longueur d'onde plutôt que du côté de l'opérateur qui envoie un forçage sur le milieu.*

Comme précédemment, on considère un paquet d'onde se propageant dans une direction bien définie, c'est-à-dire que $\hat{\xi}(k)$ ne prenne des valeurs non-nulles que dans l'intervalle $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$ avec $k_0 > 0$ et $\Delta k \ll k_0$. Écrivons donc la relation de dispersion sous forme d'un développement limité autour de $k = k_0$:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 + \mathcal{O}((k - k_0)^3) \quad (3.60)$$

3.3.1 Premier ordre : glissement de phase

Regardons uniquement l'effet du premier ordre du développement limité en supposant que les termes suivants sont négligeables. Pour que cela soit vrai il faut que :

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \gg \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k_0} \Delta k \quad (3.61)$$

et cela est possible soit grâce à la relation de dispersion du milieu soit parce que le paquet d'onde est suffisamment étroit. Négliger le terme d'ordre 2 pour un matériau donné peut être possible pour un type de paquet d'onde et pas pour un autre.

Ce cas est identique à celui-ci vu précédemment avec la décomposition en porteuse et enveloppe qui est toujours valable. On peut alors écrire le paquet d'onde sous la forme :

$$A(x, t) = A_0(x - v_g t) e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0))} \quad (3.62)$$

Mais dans ce cas, la relation de dispersion n'est plus linéaire comme dans l'équation de d'Alembert et donc :

$$v_\varphi = \frac{\omega(k_0)}{k_0} \neq v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (3.63)$$

La porteuse et l'enveloppe ne se propagent pas à la même vitesse et donc la porteuse "glisse" à l'intérieur de l'enveloppe. On parle de *dispersion normale* lorsque $v_\varphi > v_g$ c'est-à-dire lorsque la porteuse se déplace plus vite que l'enveloppe. En revanche, l'onde n'est pas déformée au cours du temps et garde son caractère d'onde plane progressive, mais ce n'est pas une onde plane progressive pour autant car sa forme change au cours de la propagation à cause du glissement de la porteuse. Un exemple de propagation est présenté sur la FIGURE 3.3.

Le premier ordre dans le développement de la dispersion se caractérise par un glissement de la porteuse dans l'enveloppe, appelé glissement de phase. La forme de l'enveloppe n'est pas modifiée au cours de la propagation, le paquet d'onde se déplace sans étalement ni déformation.

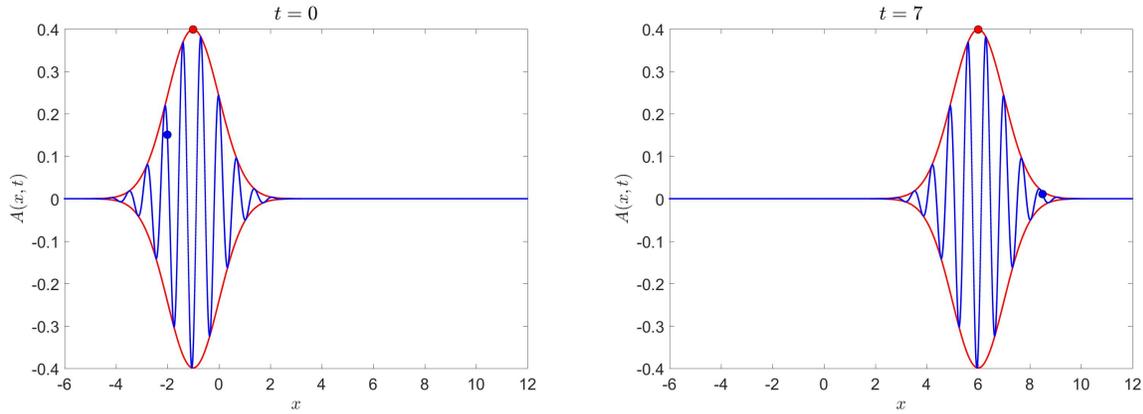


FIGURE 3.3 – Propagation d'un paquet d'onde avec une dispersion normale. Un paquet d'onde, en bleu, se compose d'une enveloppe, en rouge, modulée par une porteuse. Ici, la vitesse de phase est 1,5 fois la vitesse de groupe (qui vaut 1). Ainsi le point bleu, lié à la porteuse, se déplace plus vite que le point rouge, lié à l'enveloppe. Le paquet d'onde représenté est gaussien, d'écart type 1, et la porteuse a pour longueur d'onde 0.7. À $t = 0$ le centre du paquet d'onde est légèrement décalé par rapport à la position $x = 0$ imitant un décalage de phase initial.

3.3.2 Second ordre : propagation de l'enveloppe

Supposons à présent que la dispersion est plus forte pour considérer le terme d'ordre 2 mais pas les termes suivants. La porteuse provenant du terme d'ordre 0 du développement limité de la relation de dispersion. Ces derniers étant toujours présents, la décomposition en porteuse et enveloppe est toujours valable. Cependant, l'enveloppe n'est plus fonction de la variable $x - v_g t$. Les dépendances en espace et en temps sont couplés de façon plus complexes, et elle va se déformer au cours de la propagation. Le paquet d'onde s'écrit :

$$A(x, t) = A_e(x, t) e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0))} \quad (3.64)$$

Le but ici est d'étudier la déformation de l'enveloppe.

Équation de l'enveloppe

Le but ici est d'établir l'équation d'évolution de l'enveloppe $A_e(x, t)$. Il existe plusieurs méthodes pour établir cette équation. Utilisons un passage par l'espace de Fourier. Notons $\Omega = \omega(k) - \omega(k_0)$, $\Delta k = k - k_0$ et $P = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \omega}{dk^2} \right|_{k_0}$ on a alors :

$$\Omega(\Delta k) = v_g \Delta k + P \Delta k^2 + \mathcal{O}(\Delta k^3) \quad (3.65)$$

En multipliant par le coefficient de Fourier associé à $(\Omega, \Delta k(\Omega))$, $\tilde{A}_e(\Omega, \Delta k)$:

$$-i\tilde{A}_e(\Omega, \Delta k)\Omega(\Delta k) = -i\tilde{A}_e(\Omega, \Delta k)v_g\Delta k - i\tilde{A}_e(\Omega, \Delta k)P\Delta k^2 + \mathcal{O}(\Delta k^3) \quad (3.66)$$

Les relations sur les transformées de Fourier permettent d'écrire :

$$\text{TF}^{-1}[i\Delta k\tilde{A}_e] = \frac{\partial A_e}{\partial x} \quad (3.67)$$

$$\text{TF}^{-1}[-\Delta k^2\tilde{A}_e] = \frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2} \quad (3.68)$$

$$\text{TF}^{-1}[-i\Omega\tilde{A}_e] = \frac{\partial A_e}{\partial t} \quad (3.69)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de l'équation (3.66) on obtient :

$$i \left(\frac{\partial A_e}{\partial t} + v_g \frac{\partial A_e}{\partial x} \right) = -P \frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2} \quad (3.70)$$

En se plaçant dans le référentiel lié au paquet d'onde qui se déplace à la vitesse v_g , et en notant $\xi = x - v_g t$ et $\tau = t$ les coordonnées d'espace et de temps du nouveau référentiel avec

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.71)$$

On en déduit l'équation d'enveloppe dans ce référentiel :

$$i \frac{\partial A_e}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 A_e}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.72)$$

On a supposé que l'on pouvait se mettre dans le référentiel lié à l'enveloppe, cela implique que l'enveloppe reste bien définie et que celle-ci ne se déforme pas trop (développement limité à l'ordre 2 valable). Il est également rassurant de trouver une équation d'enveloppe linéaire puisque les équations de base sont linéaires.

Ce développement est également valable avec les termes d'ordres supérieurs du développement limité de la relation de dispersion.

Étude et solutions de l'équation de l'enveloppe

L'équation de l'enveloppe (3.72) est formellement la même que l'équation de Schrödinger d'une particule libre :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.73)$$

Ces deux équations ont donc les mêmes propriétés et notamment le fait que ce ne sont pas des équations de diffusion à cause du i . Elle sont invariantes par la transformation $t \rightarrow -t$. Pour montrer cela effectuons la transformation et prenons le complexe conjugué de l'équation. On trouve :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \quad (3.74)$$

qui est simplement la même équation mais pour la fonction d'onde complexe conjuguée ψ^* . Mais ψ et ψ^* décrivent la même physique en mécanique quantique car seule la quantité $|\psi|^2 = |\psi^*|^2$ possède un sens physique².

2. Cette discussion ne prétend pas être une démonstration rigoureuse, mais plutôt un argument avec les mains permettant de mettre en évidence le résultat.

Pour l'équation de l'enveloppe, il faut faire un peu plus attention. Celle-ci n'est définie que relativement à la porteuse. Pour que la décomposition en porteuse et enveloppe garde un sens, prendre le complexe conjugué A_e^* de l'enveloppe doit prendre en compte le complexe conjugué A_p^* de la porteuse. Cela donne que le complexe conjugué du paquet total A^* qui décrit bien la même physique que le paquet d'onde A car seule sa partie réelle compte. Si on note $A_e = A'_e + iA''_e$ et $A_p = A'_p + iA''_p$ alors :

$$\operatorname{Re}(A) = \operatorname{Re}(A_e A_p) = A'_e A'_p - A''_e A''_p \quad (3.75)$$

et

$$\operatorname{Re}(A^*) = \operatorname{Re}(A_e^* A_p^*) = A'_e A'_p - (-A''_e)(-A''_p) \quad (3.76)$$

Ainsi, l'enveloppe et son complexe conjugué décrivent la même physique. Par conséquent, l'équation d'enveloppe est elle aussi invariante par renversement du temps.

Pour résoudre à présent cette équation aux dérivées partielle linéaire, passons dans l'espace de Fourier. La transformée de Fourier spatiale s'écrit :

$$A_e(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} \tilde{A}_e(K, \tau) e^{iK\xi} \quad (3.77)$$

L'équation de l'enveloppe s'écrit alors dans l'espace de Fourier :

$$i \frac{\partial \tilde{A}_e}{\partial \tau} = PK^2 \tilde{A}_e \quad (3.78)$$

qui s'intègre en :

$$\tilde{A}_e(K, \tau) = \tilde{A}_e(K, \tau = 0) e^{-iPK^2\tau} \quad (3.79)$$

qui fait intervenir la transformée de Fourier de l'enveloppe à l'instant initiale. Par transformée de Fourier inverse on trouve alors :

$$\boxed{A_e(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} \tilde{A}_e(K, \tau = 0) e^{i(K\xi - PK^2\tau)}} \quad (3.80)$$

Nous avons donc une expression formelle de la solution de l'équation de l'enveloppe qui n'est pas nécessairement interprétable facilement. Notons tout de même que dans le cas où le terme d'ordre 2 dans le développement limité de la dispersion est nul $P = 0$ alors la fonction décrivant l'enveloppe ne dépend pas de τ mais uniquement de $\xi = x - v_g t$. On retrouve les résultats du paragraphe précédent. Prenons le cas du paquet gaussien pour extraire des propriétés de cette solution.

Exemple d'un paquet gaussien

Prenons un paquet gaussien qui s'écrit à $t = 0$:

$$A_e(\xi, 0) = A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_0^2}} \quad , \quad A_0^2 = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{\pi}} \quad (3.81)$$

avec A_0 choisie de tel sorte à normaliser la norme au carré de l'enveloppe. Sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\tilde{A}_e(K, 0) = A_0 \sigma_0 \sqrt{2\pi} e^{-\frac{K^2 \sigma_0^2}{2}} \quad (3.82)$$

Ainsi, le paquet d'ondes restera gaussien au cours de sa propagation et de sa déformation car la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne. Mais maintenant, voyons comment cette gaussienne est

déformée :

$$A_e(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} \tilde{A}_e(K, \tau = 0) e^{i(K\xi - PK^2\tau)} \quad (3.83)$$

$$= \frac{A_0\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dK e^{-\frac{K^2\sigma_0^2}{2}} e^{i(K\xi - PK^2\tau)} \quad (3.84)$$

$$= \frac{A_0\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dK e^{\frac{-1}{2(\sigma_0^2+2iP\tau)}(K(\sigma_0^2+2iP\tau)-i\xi)^2 - \frac{\xi^2}{2(\sigma_0^2+2iP\tau)}} \quad (3.85)$$

$$= \frac{A_0\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2(\sigma_0^2+2iP\tau)}} \int dz \frac{1}{\sigma_0^2 + 2iP\tau} e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_0^2+2iP\tau)}} \quad (3.86)$$

avec le changement de variable $z = (\sigma_0^2 + 2iP\tau)K - i\xi$. Pour calculer cette intégrale il faut se placer dans le plan complexe et effectuer des intégrales de contour, ce qu'on ne fera pas. L'idée est que le calcul donne le même résultat qu'une intégrale réelle :

$$A_e(\xi, \tau) = \frac{A_0\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2(\sigma_0^2+2iP\tau)}} \frac{1}{\sigma_0^2 + 2iP\tau} \sqrt{\sigma_0^2 + 2iP\tau} \sqrt{2\pi} \quad (3.87)$$

$$= \frac{A_0\sigma_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + 2iP\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{2(\sigma_0^2+2iP\tau)}} \quad (3.88)$$

$$|A_e(\xi, \tau)|^2 = \frac{A_0^2\sigma_0^2}{\sqrt{(\sigma_0^2 + 2iP\tau)(\sigma_0^2 - 2iP\tau)}} e^{-\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2+2iP\tau} + \frac{1}{\sigma_0^2-2iP\tau}\right)} \quad (3.89)$$

$$= \frac{A_0^2\sigma_0^2}{\sqrt{\sigma_0^4 + (2P\tau)^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}\frac{2\sigma_0^2}{\sigma_0^4 + (2P\tau)^2}} \quad (3.90)$$

$$= \frac{A_0^2\sigma_0}{\sigma_0\sqrt{1 + \left(\frac{2P\tau}{\sigma_0^2}\right)^2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{\sigma_0^2\left(1 + \left(\frac{2P\tau}{\sigma_0^2}\right)^2\right)}\right] \quad (3.91)$$

et donc :

$$|A_e(\xi, \tau)|^2 = \frac{A_0^2\sigma_0}{\sigma(\tau)} e^{-\frac{\xi^2}{\sigma^2(\tau)}} \quad \sigma(\tau) = \sigma_0\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2} \quad \tau_c = \frac{\sigma_0^2}{2|P|} \quad (3.92)$$

Et donc :

$$|A_e(\xi, \tau)| = \frac{A_0\sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\sigma(\tau)}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2(\tau)}} \quad (3.93)$$

La valeur de A_0 permet de normaliser le paquet d'onde avec $\int |A_e(\xi, \tau)|^2 d\xi = 1$. On pourra vérifier que la relation $A_0^2 = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{\pi}}$ permet cette normalisation à la fois pour le paquet d'onde initial et celui qui se propage. Cela signifie que l'énergie du paquet d'onde est constante, ce qui est normal vu qu'il n'y a pas de dissipation.

L'enveloppe s'étale sur un temps caractéristique $\tau_c = \frac{\sigma_0^2}{2|P|}$. Ce temps est d'autant plus grand que l'enveloppe est étroite au départ (σ_0 petit) et que la dispersion du second ordre est importante (c'est-à-dire $|P|$ grand). Donc l'étalement du paquet d'onde dépend à la fois du milieu mais aussi du paquet d'onde au départ. Un exemple de propagation est proposé sur la FIGURE 3.4 Cela peut également faire penser au passage d'un faisceau gaussien (laser) à travers une lentille. Le nouveau waist dépend à la fois de la lentille, de la distance mais aussi du waist initial. Ces résultats se généralisent pour tous les paquets d'onde pas forcément gaussien.

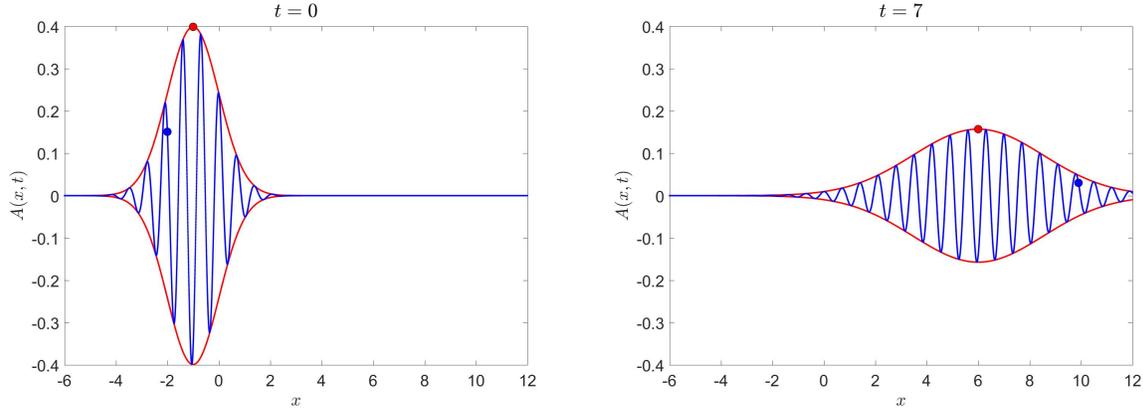


FIGURE 3.4 – Propagation d’un paquet d’onde avec une dispersion normale et un étalement du paquet d’onde. Un paquet d’onde, en bleu, se compose d’une enveloppe, en rouge, modulée par une porteuse. Ici, la vitesse de phase est 1,7 fois la vitesse de groupe (qui vaut 1). Ainsi le point bleu, lié à la porteuse, se déplace plus vite que le point rouge, lié à l’enveloppe. Le temps caractéristique d’étalement est égal à $\tau_c = 3$. Le paquet d’onde représenté est gaussien, d’écart type 1, et la porteuse a pour longueur d’onde 0.7. À $t = 0$ le centre du paquet d’onde est légèrement décalé par rapport à la position $x = 0$ imitant un décalage de phase initial.

Le second ordre du développement de Taylor de la relation de dispersion se traduit par un étalement du paquet d’onde caractérisé par un temps caractéristique τ_c . Ce temps dépend à la fois du milieu via la relation de dispersion mais aussi du paquet d’onde au départ (notamment de son étalement initial). Plus le paquet d’onde est étroit, plus l’étalement est rapide.

Nous avons précisé que l’équation de propagation de l’enveloppe était invariante par transformation $t \rightarrow -t$. Or nous avons vu que le paquet d’onde s’étalait lors de la propagation donc on s’attendrait au moment où on joue le film à l’envers de voir le paquet d’onde se refocaliser. Mais ce n’est pas le cas, il s’étale toujours. Il n’y a pas contradiction, il faut simplement donner la bonne signification à l’invariance par renversement du temps. Celle-ci concerne l’équation de la *dynamique* de l’enveloppe. Ainsi, en partant d’une condition initiale donnée, l’enveloppe va toujours s’étaler que le temps augmente ou diminue. Cela provient du fait que $\sigma(t)$ est un invariant par le changement $t \rightarrow -t$.

Le film à l’envers peut aussi s’interpréter dans ce cadre. Pour cela on impose deux conditions initiales. Pendant une première phase entre $t = 0$ et $t = t_1$ on propage l’onde et l’écart type vaut à la fin :

$$\sigma(\tau) = \sigma_0 \sqrt{1 + \left(\frac{t_1}{\tau_c}\right)^2} \quad (3.94)$$

Puis arrive une seconde phase avec le sens du temps inversé : le film est à l’envers. Il faut néanmoins prendre en compte comme seconde condition initiale qu’on rembobine à partir de $t = t_1$. L’écart type du paquet vaut alors :

$$\sigma(\tau) = \sigma_0 \sqrt{1 + \left(\frac{(t_1 - t)}{\tau_c}\right)^2} \quad (3.95)$$

Lorsque la propagation en sens inverse a duré un temps t_1 , le paquet d’onde revient à l’état de départ, comme on peut le voir sur l’expression ci-dessus.

Il est possible de faire un parallèle direct avec l’équation de diffusion qui n’est pas invariante par renversement du temps. Pour de la diffusion de particules de densité (à 1D) $n(x, t)$ qui diffuse avec un

coefficient de diffusion D alors on a :

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad (3.96)$$

qui a pour solution :

$$n(x, t) = \frac{n_0}{\sigma(t)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} \quad \sigma(t)^2 = \sigma_0 + 2Dt \quad (3.97)$$

avec les conditions initiales d'un patch gaussien. L'écart-type de la gaussienne $\sigma(t)$ est linéaire cette fois-ci avec le temps et donc n'est pas invariant sous le changement $t \rightarrow -t$.

3.3.3 La vitesse de groupe : limites

Nous rencontrons dans certaines propagation d'ondes que la vitesse de phase est plus grande que la vitesse de la lumière (ondes EM dans un plasma par exemple). Ce n'est pas en contradiction avec la relativité car la vitesse de propagation de l'information et de l'énergie et la vitesse de groupe. Nous allons voir ici quels sont les limites de cette affirmation.

Nous alors la relation, $\omega(k) = kv_\varphi(k)$. La formule de Rayleigh s'obtient en dérivant cette relation par k et on obtient :

$$v_g = v_\varphi + k \frac{dv_\varphi}{dk} \quad (3.98)$$

Pour des raisons historiques, on trouve plutôt cette formule en terme de longueur d'onde :

$$v_g = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda} \quad (3.99)$$

On voit alors deux régimes apparaissent :

- La dispersion est dite **normale** si $v_g < v_\varphi$ et donc $\frac{dv_\varphi}{d\lambda} > 0$
- La dispersion est dite **anormale** si $v_g > v_\varphi$ et donc $\frac{dv_\varphi}{d\lambda} < 0$

Prenons l'exemple de la propagation d'une onde électromagnétique dans un diélectrique. La vitesse de phase est reliée à la partie réelle de l'indice optique par :

$$v_\varphi = \frac{c}{n'(\omega)} \quad (3.100)$$

En terme de pulsation et d'indice optique, la formule de Rayleigh s'écrit :

$$v_g = \frac{v_\varphi}{1 + \frac{\omega}{n'(\omega)} \frac{dn'}{d\omega}} = \frac{c}{n'(\omega) + \omega \frac{dn'}{d\omega}} \quad (3.101)$$

On se trouve en dispersion normale lorsque $\frac{dn'}{d\omega} \geq 0$, et en dispersion anormale pour $\frac{dn'}{d\omega} < 0$.

Dans le cas de la dispersion anormale, la vitesse de groupe peut devenir supérieure à c , mais aussi prendre des valeurs négatives, et ce alors même que la vitesse de phase reste positive ! Au voisinage de ces zones où $\frac{dn'}{d\omega} < 0$ correspondant à des zones de forte dispersion, les développements limités ne sont plus valables, et les notions de vitesse de phase et de groupe sont insuffisantes pour décrire convenablement la propagation. Pour ce faire, il est nécessaire de revenir vers les seules notions physiques, la vitesse du signal (repéré par l'avant du paquet d'ondes) et la vitesse de l'énergie. Il faut les calculer explicitement. Ainsi, **la vitesse de groupe ne décrit de façon satisfaisante la propagation du signal et de l'énergie que lorsque la dispersion est suffisamment faible. Lorsqu'elle est trop forte, il faut revenir aux notions de vitesse du signal et de l'énergie.**

Pour le cas des diélectriques, les zones de forte dispersion s'accompagnent d'une forte absorption, dont il faut tenir compte pour décrire correctement la propagation du paquet d'ondes.

3.3.4 Compensation de la dispersion par des non-linéarités

Ce paragraphe ne sera que qualitatif pour montrer que cet effet existe. La physique non-linéaire est un thème entier qui méritait un cours entier. Prenons simplement un exemple : l'effet Kerr optique. Celui-ci consiste à considérer que l'indice optique dépend de la pulsation mais aussi de l'intensité, noté $I = |A_0|^2$ du faisceau (modèle scalaire). Dans ce cas, il faut écrire la relation de dispersion de la forme : $\omega = \omega(k, I)$.

Si la dispersion et la non-linéarité sont faibles alors on peut comme précédemment faire un développement limité au second ordre en $(k - k_0)$ et au premier ordre en I :

$$\omega = \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0,0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0,0} (k - k_0)^2 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial I} \right|_{k_0,0} I \quad (3.102)$$

On pose :

$$P = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0,0} \quad ; \quad Q = - \left. \frac{\partial \omega}{\partial I} \right|_{k_0,0} \quad (3.103)$$

On peut alors comme précédemment obtenir l'équation de l'enveloppe modifiée par les non-linéarités et donc :

$$i \frac{\partial A_0}{\partial T} + P \frac{\partial^2 A_0}{\partial X^2} + Q |A_0|^2 A_0 = 0 \quad (3.104)$$

Cette équation est l'équation de Schrödinger non-linéaire. Elle se rencontre dans des situations très variées (optique non-linéaire, condensats de Bose-Einstein, ondes de gravité à la surface d'un liquide...). Remarquons alors que si $A_0(X, T)$ a une forme particulière, telle que pour tout X et tout T :

$$P \frac{\partial^2 A_0}{\partial X^2} + Q |A_0|^2 A_0 = 0 \quad (3.105)$$

L'équation de l'enveloppe se simplifie alors en :

$$\frac{\partial A_0}{\partial T} = 0 \quad (3.106)$$

Une telle solution se propage donc sans déformation, l'effet de la dispersion étant compensé par celui de la non-linéarité, on parle alors de soliton.

Un soliton est une onde progressive se propageant sans déformation dans un milieu dispersif. Les effets non-linéaires permettant de compenser l'effet de la dispersion du milieu.

Chapitre 4

Influence des conditions aux limites

Jusqu'à présent nous avons étudié la propagation d'ondes dans des milieux avec ou non de la dispersion. Néanmoins, nous avons considéré des systèmes infinis sauf en bout de système ou à l'interface entre deux systèmes. Cependant, beaucoup de systèmes possèdent des conditions aux limites dans des directions différentes à la direction de propagation. Ces conditions aux limites modifient la propagation des ondes par rapport à un milieu libre.

On retrouve notamment ce phénomène lorsqu'on désire guider des ondes. En effet, les ondes se propageant dans l'espace libre ont une amplitude et une énergie qui décroissent à grande distance par simple conservation de l'énergie. En l'absence d'absorption l'amplitude des ondes sphériques décroît comme $\frac{1}{r}$ et leur densité locale d'énergie comme $\frac{1}{r^2}$. Cela rend leur usage pour transporter de l'information à grande distance assez difficile même si on arrive à diriger l'émission d'ondes avec les antennes assez efficacement. Des dispositifs physiques ont donc été développés pour permettre de guider ces ondes. On peut citer par exemple les fibres optiques pour les ondes électromagnétiques, des tuyaux pour les ondes acoustiques ou encore des câbles coaxiaux pour les ondes électromagnétiques dans les circuits électriques. Ceux-ci permettent la propagation des ondes avec une amplitude suffisante sur des distances beaucoup plus grandes.

Le but de ce chapitre est de montrer quelques exemples de guidage mais aussi de systèmes avec des conditions aux limites particulières qui modifient la propagation des ondes par rapport à une propagation libre, c'est-à-dire non guidé.

4.1 Un exemple simple : la fibre optique

L'idée de ce paragraphe est de présenter la phénoménologie du guidage par un exemple simple, la fibre optique à saut d'indice.

4.2 Approche géométrique

Commençons par le modèle le plus simple de fibre optique. On considère la propagation dans un milieu d'indice n_1 d'épaisseur a , limité par deux interfaces planes parallèles avec un milieu d'indice n_2 . On suppose ici que la lumière se propage comme un rayon lumineux, de longueur d'onde donnée. Ce rayon peut se réfracter et se réfléchir aux interfaces, en suivant les lois de Snell-Descartes. Une représentation est faite sur la FIGURE 4.1 Pour que le guidage soit effectif, c'est-à-dire que l'amplitude du rayon lumineux ne diminue pas, il faut qu'il y ait réflexion totale au niveau de chaque interface. Pour cela il est nécessaire d'avoir $n_2 < n_1$.

Le rayon rentre avec un angle θ par rapport à l'horizontale et au centre de la fibre. Pour avoir réflexion totale, il obéit alors à l'équation

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) > \frac{n_2}{n_1} \quad \text{soit} \quad \cos\theta > \frac{n_2}{n_1} \quad (4.1)$$

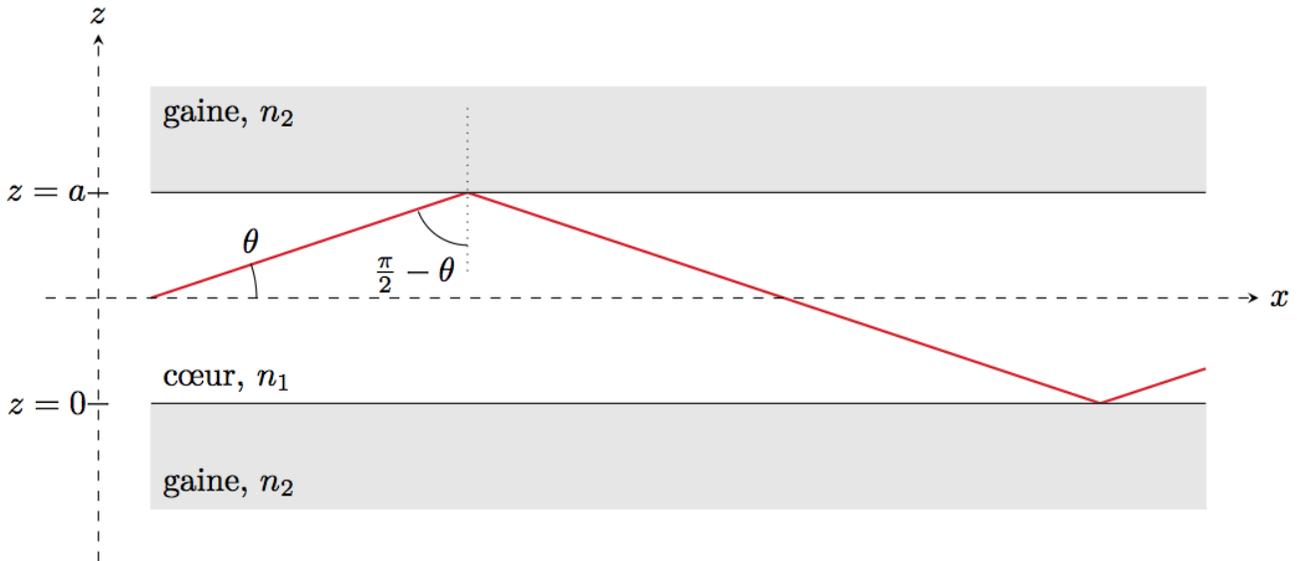


FIGURE 4.1 – Fibre optique à saut d'indice avec un cœur, d'indice n_1 , entouré d'une gaine, d'indice $n_2 < n_1$. Pour simplifier l'étude, on se restreint au guidage dans un plan. Un rayon lumineux rentre au centre de la fibre avec un angle θ par rapport à l'axe de la fibre.

Ainsi, par réflexions successives, le rayon lumineux va être guidé le long de l'axe de la fibre optique. On voit alors que l'angle θ ne peut pas trop s'écartier de l'horizontale sinon la condition n'est plus vérifiée.

On voit ainsi que le choix judicieux de conditions aux limites permet le guidage d'une onde, c'est-à-dire la propagation le long d'un axe choisi. Néanmoins on voit que ce guidage n'est possible que dans certaines conditions d'entrée dans la fibre.

4.3 Approche interférentielle : modes de propagation

On peut, au lieu de considérer des rayons lumineux, associer à chaque rayon une onde plane monochromatique. On note λ sa longueur d'onde dans le vide, et la direction de propagation est celle du rayon. Lorsque la condition de guidage est satisfaite, la fibre contient une superposition de toutes les ondes réfléchies, qui interfèrent entre elles. Exactement comme dans un interféromètre de Fabry-Pérot, les ondes qui se propagent sans atténuation sont celles pour lesquelles toutes les interférences sont constructives, ce qui signifie que leurs plans d'onde sont confondus.

Ce raisonnement peut étonner, puisque les interférences qu'on étudie ici ont lieu entre des plans d'ondes "qui ne se voient pas". Sa pertinence sera justifiée ultérieurement, lors de l'étude analytique de ce modèle de guide. D'ici là, admettons que la condition d'interférences constructives permet bien de trouver la bonne condition de propagation... mais pas plus. Cette approche interférentielle ne dit rien en effet sur ce qu'il advient d'une onde qui serait forcée en entrée et qui ne pourrait pas se propager dans le guide.

Pour trouver la condition d'interférences constructives, il faut calculer le déphasage entre deux ondes réfléchies successives, et imposer à celui-ci d'être un multiple de 2π . Pour ce faire, calculons une différence de marche géométrique puis un déphasage, à l'aide de la FIGURE 4.2.

Les ondes étant planes, il faut définir une référence arbitraire de phase : prenons-là nulle pour le plan d'onde passant par S_0 . Par stigmatisme du dioptre supérieur du guide, après la première réflexion, la phase de l'onde réfléchie est identique à celle qu'elle aurait si la référence était S_1 , symétrique de S_0 par rapport à l'interface entre l'âme et la gaine, et donc telle que $S_0S_1 = a$. Après deux réflexions, le même argument de stigmatisme indique que la bonne référence des phases est S_2 , symétrique de S_1 par rapport à la deuxième interface, et donc telle que $S_1S_2 = 3a$, soit $S_0S_2 = 2a$.

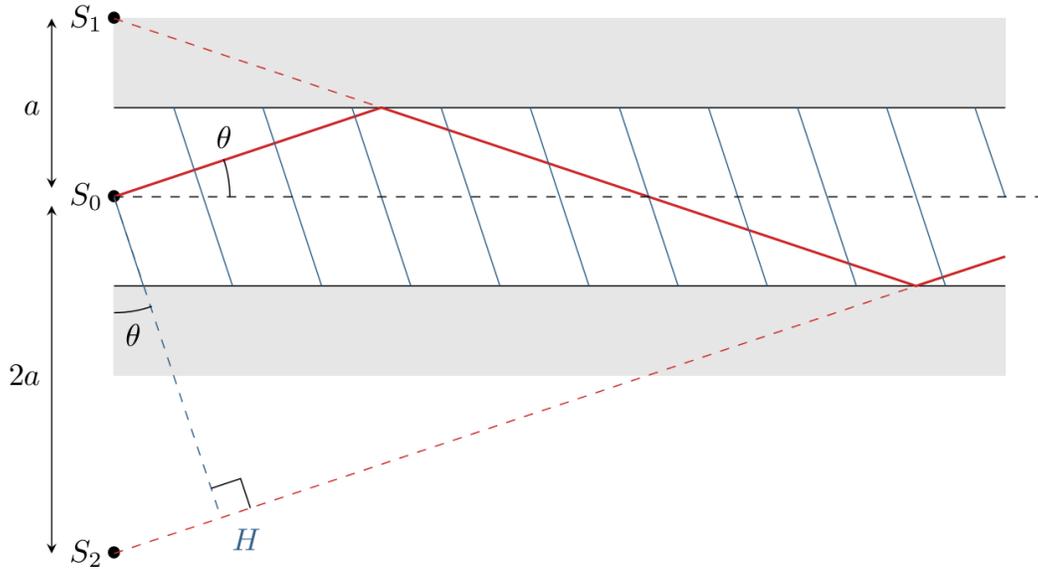


FIGURE 4.2 – Calcul de la différence de marche entre deux ondes réfléchies successives. S_0 et H appartiennent au même plan d'onde, H étant le projeté orthogonal de S_0 sur le rayon réfléchi deux fois.

En vertu du principe de retour inverse de la lumière et du théorème de Malus, le déphasage entre l'onde issue de S_0 et celle issue de S_2 vaut :

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{S_2H}{\lambda} \quad \text{donc} \quad \Delta\Phi = \frac{4\pi a \sin \theta}{\lambda} \quad (4.2)$$

Il n'y a pas besoin de prendre en compte l'indice optique n_1 ici. En effet, λ est la longueur d'onde dans le vide. Dans la gaine, $\lambda' = n_1\lambda$, et le chemin optique $(S_2H) = n_1 S_2H$. Les indices se simplifient donc.

Pour tenir compte du nombre infini de réflexions dans la fibre, il faut considérer un réseau infini de sources espacées de $2a$. Toutes les ondes réfléchies interfèrent en phase si :

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi a \sin \theta}{\lambda} = 2n\pi \quad (4.3)$$

avec $n \in \mathbb{N}$. On prend $n > 0$ en prenant $\theta > 0$ également, le cas $\theta < 0$ s'en déduit immédiatement. La condition précédente s'écrit pour les angles permis :

$$\sin \theta_n = \frac{n\lambda}{2a} \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.4)$$

On retrouve alors la condition donnant la position des pics d'intensité pour un réseau. **Les angles d'incidence permettant la propagation dans la fibre prennent des valeurs discrètes. Chaque valeur de l'indice p définit un mode de propagation de la fibre optique.** Cette définition est cohérente avec la définition générale d'un mode donnée au chapitre 1. Un mode de propagation de la fibre est bien une solution propagative, harmonique et compatible avec les conditions aux limites, ici prises en compte par le biais des interférences. Néanmoins, on fait systématiquement l'abus de langage de caractériser un mode de propagation par la seule donnée de n , oubliant le caractère harmonique. C'est ce que l'on fera par la suite en parlant "du mode n de la fibre" pour désigner l'ensemble des ondes harmoniques dont la propagation dans la fibre est caractérisée par l'indice n .

Remarquons que toutes les longueurs d'ondes ne peuvent pas se propager dans tous les modes, puisque $\sin \theta_n \neq 1$. Ainsi, une onde de longueur d'onde λ dans l'espace libre ne peut se propager dans le mode n que si :

$$\lambda \leq \frac{2a}{n} \quad (4.5)$$

ce qui s'écrit en pulsation par :

$$\omega \geq n \frac{\pi c}{a} = \omega_{c,n} \quad (4.6)$$

Une pulsation de coupure basse est associée à chaque mode. Le seul mode qui n'a pas une telle pulsation de coupure est le mode $n = 0$. Il est cependant possible d'en étendre la définition en posant $\omega_{c,0} = 0$.

4.3.1 Dispersion lors de la propagation dans la fibre optique

Pour voir si la propagation d'une onde plane est dispersive, calculons le temps T_n mis par un plan d'onde du mode n pour parcourir une distance ℓ le long de l'axe de la fibre, sachant qu'il s'y propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{c}{n_1}$. Un raisonnement géométrique simple montre qu'au lieu de parcourir la distance ℓ , il parcourt

$$\ell_n = \frac{\ell}{\cos \theta_n} \quad (4.7)$$

or :

$$T_n = \frac{\ell_n}{v_\varphi} = \frac{\ell n_1}{c \cos \theta_n} \quad (4.8)$$

Ainsi, la vitesse de propagation selon l'axe de la fibre est :

$$v_n = \frac{c}{n_1} \cos \theta_n \quad (4.9)$$

Comme θ_n dépend de n et donc du mode, à pulsation fixée ω , une onde se propage avec une vitesse effective différente selon le mode qui la propage : on a donc de la dispersion. Comme on a pu le voir dans le cours d'électromagnétisme dans le vide, celui est de la **dispersion intermodale** ou **dispersion de mode**. Elle caractérise la différence de vitesse de propagation de deux ondes harmoniques de même pulsation ω mais portées par des modes différents. Elle est due aux conditions aux limites imposées à l'onde. Cette dispersion n'est donc pas du au milieu de propagation contrairement au chapitre précédent mais uniquement à cause des conditions aux limites.

D'un autre côté, l'indice n_1 dépend de la longueur d'onde via la loi de Cauchy :

$$n_1 = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (4.10)$$

Ainsi, pour un même mode n , deux ondes de pulsations différentes dans ce même mode vont se propager à des vitesses différentes. On a ainsi de la dispersion, qui a deux origines différentes : une partie due aux propriétés intrinsèques du milieu, l'autre de la dépendance avec la pulsation de θ_n , liée aux conditions aux limites. Cette dispersion est appelée **dispersion intramodale** qui caractérise la différence de vitesse de propagation de deux ondes harmoniques portée par un même mode n mais de pulsations différentes.

L'existence de la dispersion de mode, et donc le contrôle du nombre de modes de propagation, est de grande importance technologique, car elle limite le débit d'information possible dans une fibre optique (voir Taillet - *Optique physique*).

4.3.2 Synthèse de la propagation guidée

Nous avons montré qualitativement les principales spécificités de la propagation guidée par rapport à la propagation libre. La présence de conditions aux limites bien choisies permet le confinement d'une onde dans une région restreinte de l'espace et le guidage de sa propagation dans une direction choisie. Cela n'est cependant possible que sous certaines conditions, donnant naissance à des modes discrets de propagation. À chaque mode est associée une fréquence de coupure en dessous de laquelle une onde ne

peut pas être guidée. Enfin, l'existence de modes entraîne l'apparition d'une nouvelle cause de dispersion, de aux conditions aux limites, qui s'ajoute à la dispersion intrinsèque au milieu de propagation.

On se reportera à la partie guidage du cours d'électromagnétisme dans le vide pour une description complète de la description de la dispersion intermodale et intramodale avec le guide entre deux plans et le guide rectangulaire.

4.4 Modes TE et TM dans un câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux de rayons $a < b$ séparés par un isolant comme sur la FIGURE 4.3. Pour simplifier l'étude on assimilera le diélectrique au vide.

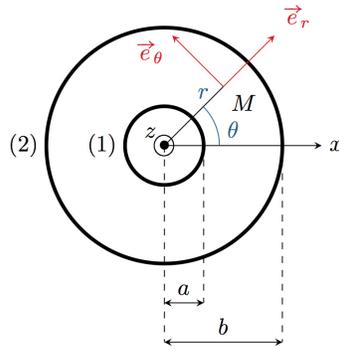


FIGURE 4.3 – Câble coaxial vu en coupe. Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux, de rayons respectifs $a < b$, séparés par un isolant.

Le long de l'axe du câble noté Oz , entre les deux conducteurs, se propagent des ondes guidées, planes, progressives, monochromatiques de pulsation ω et de champs :

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{e}(r, \theta)e^{i(\omega t - \beta z)} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{B}} = \mathbf{b}(r, \theta)e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (4.11)$$

Les fonctions \mathbf{e} et \mathbf{b} ne dépendent pas de z car il n'y a pas de dissipation (conducteurs parfaits et espace entre les deux vide) et par invariance par translation selon Oz .

Le champ électrique dans le vide vérifie l'équation de d'Alembert soit :

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.12)$$

notons $\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ le laplacien transverse et donc on obtient comme équation :

$$\Delta_t \mathbf{e} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) \mathbf{e} = 0 \quad (4.13)$$

On obtient la même équation pour \mathbf{b} . On peut alors décomposer les vecteurs \mathbf{e} et \mathbf{b} en une composante transversale perpendiculaire à Oz et une composante longitudinale parallèle à Oz :

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_t + e_z \mathbf{u}_z \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_t + b_z \mathbf{u}_z \quad (4.14)$$

On peut alors utiliser l'équation de Maxwell-Faraday $\nabla \wedge \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t}$ qui s'écrit :

$$\nabla \wedge (\mathbf{e}e^{-i\beta z}) = e^{-i\beta z} \nabla \wedge \mathbf{e} + \nabla(e^{-i\beta z}) \wedge \mathbf{e} = -i\omega \mathbf{b}e^{-i\beta z} \quad (4.15)$$

soit :

$$\nabla \wedge \mathbf{e} - i\beta \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{e} = -i\omega \mathbf{b} \quad (4.16)$$

et en décomposant \mathbf{e} et \mathbf{b} avec $\nabla \wedge (e_z \mathbf{u}_z) = \nabla(e_z) \wedge \mathbf{u}_z$ car $\nabla \wedge \mathbf{u}_z = 0$:

$$\nabla \wedge \mathbf{e}_t + \nabla e_z \wedge \mathbf{u}_z - i\beta \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{e}_t = -i\omega(\mathbf{b}_t + b_z \mathbf{u}_z) \quad (4.17)$$

Par la suite, on projette selon l'axe z et selon le plan perpendiculaire pour obtenir :

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{e}_t = -i\omega b_z \mathbf{u}_z} \quad (4.18)$$

et

$$\mathbf{u}_z \wedge (\nabla e_z + i\beta \mathbf{e}_t) = i\omega \mathbf{b}_t \quad (4.19)$$

qui multiplié par \mathbf{u}_z donne :

$$\boxed{i\beta \mathbf{e}_t - i\omega \mathbf{b}_t \wedge \mathbf{u}_z = -\nabla e_z} \quad (4.20)$$

On peut effectuer le même travail avec l'équation de Maxwell-Ampère en remplaçant $\underline{\mathbf{E}}$ par $\underline{\mathbf{B}}$ et $-\underline{\mathbf{B}}$ par $\frac{\underline{\mathbf{E}}}{c^2}$ pour trouver :

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{b}_t = -i\frac{\omega}{c^2} e_z \mathbf{u}_z} \quad (4.21)$$

et

$$\mathbf{u}_z \wedge (\nabla b_z + i\beta \mathbf{b}_t) = -i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{b}_t \quad (4.22)$$

qui multiplié par \mathbf{u}_z donne :

$$\boxed{i\beta \mathbf{b}_t + i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{e}_t \wedge \mathbf{u}_z = -\nabla b_z} \quad (4.23)$$

ainsi si les composantes e_z et b_z sont connus, le système de 4 équations permet de déterminer les composantes transverses. Ainsi l'étude se restreint à l'étude de la composante longitudinale. L'équation (4.13) projeté sur l'axe Oz donne

$$\boxed{\frac{\partial^2 e_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial \theta^2} + \delta^2 e_z = 0} \quad (4.24)$$

avec $\delta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$. La continuité de la composante tangentielle du champ électrique et un champ nul dans les conducteurs impose que

$$e_z(r = a, \theta) = e_z(r = b, \theta) = 0 \quad \forall \theta \quad (4.25)$$

et on ne peut rien affirmer sur la composante b_z par contre. Les équations précédentes admettent alors des solutions correspondant soit à des champs appartenant à un mode transverse électrique TE tel que $e_z = 0$ ou un mode transverse magnétique tel que $b_z = 0$. Par exemple pour les modes TM, on cherche des solutions sous la forme $e_z = f(r).g(\theta)$. Ainsi, l'équation précédente devient :

$$g \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} g \frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2} f \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \delta^2 f g = 0 \quad (4.26)$$

en multipliant par $\frac{r^2}{fg}$ avec $fg = e_z \neq 0$, alors :

$$\frac{r^2}{f} \left(f'' + \frac{f'}{r} + \delta^2 f \right) = -\frac{g''}{g} \quad (4.27)$$

On a une fonction de r qui est égale à une fonction de θ donc les deux membres de l'égalité sont égales à une constante. θ est une variable angulaire et à cause de la symétrie axiale du système, $g(\theta)$ est une fonction 2π périodique, cette constante est donc positive notée m^2 avec $m > 0$ et donc :

$$g'' = -m^2 g \quad \Rightarrow \quad g(\theta) = g_0 \cos(m\theta + \varphi) \quad (4.28)$$

Il est possible alors de prendre la phase φ égale à 0 comme l'origine de θ et donc :

$$\boxed{g(\theta) = g_0 \cos(m\theta)} \quad (4.29)$$

De plus la fonction $f(r)$ obéit à l'équation :

$$f'' + \frac{f'}{r} + \left(\delta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0 \quad (4.30)$$

Posons alors $x = \delta r$ et $y(x) = f(r)$ donc $f' = y' \delta$ donc l'équation s'écrit :

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (4.31)$$

qui a pour solution :

$$y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x) \quad (4.32)$$

avec $J_m(x)$ et $N_m(x)$ les fonction de Bessel et Neumann d'ordre m et de la variable x . Et en variable r :

$$\boxed{f(r) = C_1 J_m(\delta r) + C_2 N_m(\delta r)} \quad (4.33)$$

Les conditions aux limites sur e_z se traduisent par $f(a) = f(b) = 0$ d'où le système d'équations :

$$C_1 J_m(\delta a) + C_2 N_m(\delta a) = 0 \quad ; \quad C_1 J_m(\delta b) + C_2 N_m(\delta b) = 0 \quad (4.34)$$

qui n'admet de solution en C_1 et C_2 non nul que si son déterminant est nul soit :

$$J_m(\delta a) N_m(\delta b) - J_m(\delta b) N_m(\delta a) = 0 \quad (4.35)$$

Cette relation permet de déterminer δ en fonction de a , b et m . Ainsi pour un triplet (a, b, m) fixé, elle admet une série discrète de solutions δ_n indicée par n . Comme m est également variable, un double paramétrage est indispensable $\delta_{m,n}$ pour caractériser un mode (m, n) quelconque ; il en est de même pour les constantes C_1 et C_2 propres à chaque mode.

Déterminons à présent la relation de dispersion, nous avons la relation $\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \delta_{m,n}^2$. Pour $\beta = 0$ on a $\omega^2(0) = c^2 \delta_{m,n}^2 = (\omega_{m,n}^c)^2$ où $\omega_{m,n}^c$ est la pulsation de coupure du mode (m, n) . La relation de dispersion s'écrit alors :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \beta^2 + \frac{(\omega_{m,n}^c)^2}{c^2} \quad (4.36)$$

il y a donc bien dispersion. Avec $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2}$ et $\frac{(\omega_{m,n}^c)^2}{c^2} = \frac{(2\pi)^2}{\lambda_c^2}$, c'est-à-dire $\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_{m,n}^c}$, alors :

$$\beta^2 = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \right) \quad (4.37)$$

Pour $\lambda < \lambda_c$ alors $\beta^2 > 0$ et le terme de phase est celui d'une onde progressive et en notation réelle il vaut $\cos(\omega t - \beta z)$ qui est une fonction périodique de la variable z de période λ_g donnée par $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$ et donc :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}} \quad (4.38)$$

Et pour $\lambda > \lambda_c$ alors $\beta^2 < 0$ et le terme de phase devient une exponentielle décroissante en fonction de z et il ne peut y avoir de propagation dans le guide. λ_c joue bien le rôle de longueur d'onde de coupure. On peut l'écrire sous la forme :

$$f = c \sqrt{\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}} \quad (4.39)$$

On se retrouve alors avec une relation de dispersion f en fonction de $\frac{1}{\lambda_g}$ du même type que dans un plasma ou dans un guide rectangulaire avec une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = \frac{c}{\lambda_g}$ et une tangente horizontale en $\frac{1}{\lambda_g} = 0$ pour $f = f_c$. On peut alors calculer la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\lambda_g}{\lambda} c \quad (4.40)$$

et la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\lambda}{\lambda_g} c \quad (4.41)$$

Comme pour le plasma et le guide rectangulaire on trouve que $v_\varphi v_g = c^2$ et $v_\varphi > c$ et $v_g < c$.

On peut à présent remonter à l'expression du champ électrique selon Oz en remarquant que C_1 contient la constante g_0 et qu'on peut exprimer C_2 en fonction de C_1 à partir des conditions aux limites :

$$C_2 = -C_1 \frac{J_m(\delta_{m,n} r_e)}{N_m(\delta_{m,n} r_e)} \quad (4.42)$$

avec $r_e = a$ ou b . Et donc :

$$e_z^{m,n}(r, \theta) = C_1 \left[J_m(\delta_{m,n} r) - \frac{J_m(\delta_{m,n} r_e)}{N_m(\delta_{m,n} r_e)} N_m(\delta_{m,n} r) \right] \cos(m\theta) \quad (4.43)$$

On peut effectuer le même calcul pour le champ magnétique pour le mode TE. Les résultats montre que $(b-a)\delta_{m,n} \simeq \pi n$ pour un mode TM et $(b+a)\delta_{m,n} \simeq 2m$ pour un mode TE montrent qu'une augmentation des indices n et m correspond à des valeurs de $\delta_{m,n}$ plus grandes et donc à des fréquences de coupure plus élevées. Les premiers modes à composante longitudinale obtenus sont :

— les modes $TM_{m,1}$: $\omega_{m,1}^c = c\delta_{m,1} = \frac{\pi c}{b-a}$ donc :

$$f_{m,1}^c = \frac{c}{2(b-a)} = 2.34 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \quad (4.44)$$

— les modes $TE_{1,n}$: $\omega_{1,n}^c = c\delta_{1,n} = \frac{2\pi c}{b+a}$ donc :

$$f_{1,n}^c = \frac{c}{\pi(b+a)} = 8.53 \cdot 10^9 \text{ Hz} \quad (4.45)$$

Ainsi en dessous de la fréquence $f_0 \simeq 8.5 \text{ GHz}$, aucun mode TE ou TM ne peuvent se propager et donc seules des modes TEM sans composante longitudinale peuvent se propager dans le câble coaxial. La limite f_0 est bien loin de la fréquence maximale d'un générateur basse fréquence de l'ordre de 1 MHz.

4.4.1 Propagation du mode TEM dans le câble coaxial

Cette fois-ci on recherche des solutions à la fois TE et à la fois TM donc tel que $e_z = 0$ et $b_z = 0$. On peut alors reprendre les calculs précédents en prenant $e_z = b_z = 0$ et en écrivant $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}$ et $\mathbf{b}_t = \mathbf{b}$ et donc :

$$\nabla \wedge \mathbf{e} = 0 \quad ; \quad \nabla \wedge \mathbf{b} = 0 \quad (4.46)$$

et :

$$\mathbf{u}_z \wedge \beta \mathbf{e} = \omega \mathbf{b} \quad ; \quad \mathbf{u}_z \wedge \beta \mathbf{b} = -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{e} \quad (4.47)$$

On trouve que $\mathbf{b} = \frac{\beta}{\omega} \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{e}$ qu'on peut reporter dans l'autre équation pour trouver :

$$\frac{\beta^2}{\omega} \mathbf{u}_z \wedge (\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{e}) = -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{e} \quad (4.48)$$

soit $-\frac{\beta^2}{\omega} \mathbf{e} = -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{e}$ et donc :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.49)$$

et pour une propagation selon les z croissants :

$$\beta = \frac{\omega}{c} \quad (4.50)$$

Ici on a bien $\beta = k \frac{\omega}{c}$ et la structure de l'onde TEM présente des analogies avec celle du vide, en effet on a :

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{e}}{c} \quad \text{soit} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}}{c} \quad (4.51)$$

On obtient alors une vitesse de phase et de groupe égales :

$$v_\varphi = v_g = c \quad (4.52)$$

Comme $\nabla \wedge \mathbf{e} = 0$ on peut définir un potentiel $V(r, \theta)$ tel que $\mathbf{e} = -\nabla V$. L'équation de Maxwell-Gauss permet d'écrire :

$$\nabla \cdot (\mathbf{e} e^{-i\beta z}) = e^{-i\beta z} \nabla \cdot \mathbf{e} - i\beta e^{-i\beta z} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (4.53)$$

Le second terme est nul car \mathbf{e} est transverse et donc on obtient :

$$\Delta V = 0 \quad (4.54)$$

qui est l'équation de Laplace comme en électrostatique. Cela ne donne que \mathbf{e} et non \mathbf{E} qui est défini par $\mathbf{E} = -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

On peut alors définir deux potentiels pour les deux armatures et ainsi écrire que $V(r = a, \theta) = V_1$ et $V(r = b, \theta) = V_2$. On peut alors chercher une solution $V(r)$ indépendant de θ car le problème est invariant par rotation. On a alors :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(r) = C_3 \ln \frac{r}{a} + V_1 \quad (4.55)$$

avec la condition en $r = a$ et la constante C_3 est déterminée par la condition en $r = b$ et donc :

$$\boxed{V(r) = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{a}} \quad (4.56)$$

On peut alors remonter à \mathbf{E} et à \mathbf{B} :

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \mathbf{u}_r \quad ; \quad \underline{\mathbf{B}} = \frac{V_1 - V_2}{c \ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \mathbf{u}_\theta \quad (4.57)$$

Cette structure d'onde s'apparente à celle d'une onde dans le vide avec la relation $\mathbf{B} = \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}/c$, l'onde est plane (plans $z = cte$ équiphasés) mais non homogène car les modules sont en $\frac{1}{r}$.

On peut à présent remonter au modèle des constantes réparties à partir de la structure du champ. Pour cela calculons le courant surfacique sur les deux conducteurs du câble. Le champ \mathbf{B} est tangent au conducteur et non nul en $r = a$. Or le conducteur est parfait, donc le champ magnétique est nul à l'intérieur et la discontinuité s'écrit alors :

$$\underline{\mathbf{B}}(r = a) = \mu_0 \underline{\mathbf{J}}_{S_1} \wedge \mathbf{u}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_r \wedge \underline{\mathbf{B}}(r = a) = \mu_0 \underline{\mathbf{J}}_{S_1} \quad \underline{\mathbf{J}}_{S_1} \perp \mathbf{u}_r \quad (4.58)$$

Ainsi en écrivant $\mathbf{J}_{S_1} = \mathbf{j}_{S_1} e^{i(\omega t - \beta z)}$ on a :

$$\mathbf{j}_{S_1} = \frac{\mathbf{u}_r \wedge \mathbf{b}(r=a)}{\mu_0} \frac{V_1 - V_2}{\mu_0 a c \ln \frac{b}{a}} \mathbf{u}_z \quad (4.59)$$

Calculons à présent le courant traversant le conducteur situé en ($r = a$) par :

$$\underline{I}_1 = \oint_{C_1} \mathbf{J}_{S_1} \cdot d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u}_z = j_{S_1} 2\pi a e^{i(\omega t - \beta z)} = i_1 e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (4.60)$$

avec :

$$i_1 = \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \quad (4.61)$$

On peut alors parler d'une *onde de courant* car à z fixé, le courant I_1 est une fonction sinusoïdale du temps imposée par le générateur en $z = 0$. On peut faire de même avec le courant traversant le conducteur en $r = b$ et on trouve $i_2 = -i_1$. Ainsi, les deux ondes sont en opposition de phase ce qui assure le retour du courant sur une période.

De même on peut calculer les densités linéiques de charge de surface sur les conducteurs. La discontinuité du champ électrique normale est à l'origine de cette charge de surface. Par exemple sur le conducteur en $r = a$ on a :

$$\underline{\mathbf{E}}(r=a) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \mathbf{u}_r \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma}_1 = \epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{a \ln \frac{b}{a}} e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (4.62)$$

Ainsi, en fonction de l'onde de tension $\underline{V} = (V_2 - V_1) e^{i(\omega t - \beta z)}$ on trouve :

$$\underline{\sigma}_1 = \frac{\epsilon_0}{a \ln \frac{b}{a}} \underline{V} \quad (4.63)$$

et de même sur le conducteur en $r = b$:

$$\underline{\sigma}_2 = -\frac{\epsilon_0}{b \ln \frac{b}{a}} \underline{V} \quad (4.64)$$

Pas la suite pour calculer la charge linéique l faut considérer un anneau conducteur (en $r = a$) d'épaisseur dz en z à l'instant t qui porte la charge $\underline{\lambda} dz = \underline{\sigma}_1 2\pi a dz$ soit :

$$\underline{\lambda}_1 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \underline{V} \quad (4.65)$$

et de même pour le conducteur en $r = b$ on a :

$$\underline{\lambda}_2 = -\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \underline{V} = -\underline{\lambda}_1 \quad (4.66)$$

Les charges linéiques à z fixé sont opposées à tout instant. Les deux conducteurs se comportent donc comme un condensateur en régime variable.

L'énergie magnétique liée à la présence d'une champ magnétique vaut dans l'élément de volume $d\tau = 2\pi r dr dz$ (en notation réelle) :

$$dU_m = \int_a^b \frac{b^2(r)}{2\mu_0} 2\pi r dr dz \cos^2(\omega t - \beta z) = \frac{\mu_0 \ln \frac{b}{a}}{4\pi} dz i_1^2 \cos^2(\omega t - \beta z) \quad (4.67)$$

car

$$b(r) = \frac{V_1 - V_2}{c \ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \quad (4.68)$$

comme en magnétostatique ou ARQS magnétique. On peut alors identifier l'énergie à $\frac{1}{2}(\Lambda dz)i_1^2$ comme on est en ARQS magnétique car $dz \ll \lambda$) et donc :

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (4.69)$$

On peut effectuer le même travail en ARQS en écrivant que :

$$dq_1 = \Gamma dzv \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{\lambda_1}{v} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad (4.70)$$

Le produit $\Lambda\Gamma$ vaut $\mu_0\epsilon_0$ soit :

$$\Lambda\Gamma = \frac{1}{c^2} \quad (4.71)$$

En prenant¹ $a = 2.4$ mm et $b = 8.8$ mm on trouve $\Lambda = 0.26 \mu\text{H.m}^{-1}$ et $\Gamma = 42.8 \text{ pF.m}^{-1}$. Pour un câble coaxial réel, l'espace entre les deux conducteurs est composé d'un isolant diélectrique et il faut remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$.

On peut également remonter à l'impédance caractéristique du câble qui vaut :

$$Z_c = \frac{V}{I_1} = \frac{V_1 - V_2}{I_1} \quad (4.72)$$

soit :

$$Z_c = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (4.73)$$

Cette impédance est réelle car les ondes de courant et tension sont en phase et indépendance de z , ce qui n'est plus le cas en régime d'ondes stationnaires (câble avec une extrémité). On trouve $Z_c = 78 \Omega$. On trouve également que :

$$Z_c = \frac{\Lambda}{\Gamma} \quad (4.74)$$

4.5 Guide d'ondes acoustiques : instruments à vent

Après avoir fait un peu le tour des guides d'ondes en électromagnétisme, regardons comment guider des ondes acoustiques et comment appliquer cela aux instruments à vent. Ce paragraphe s'inspire de l'épreuve A 2009 de l'agrégation de Physique².

Considérons un tuyau de longueur infinie comme sur la FIGURE 4.4 de largeur b selon y et de hauteur a selon x .

4.5.1 Modes propres de la cavité

Pour chercher les modes propres de la cavité, cherchons la solution pour la pression sous la forme :

$$p_1(M, t) = X(x)Y(y)Z(z)e^{j\omega t} \quad (4.75)$$

1. Ces valeurs sont celles données dans le Garing d'Ondes Électromagnétiques. Il faut savoir qu'il existe des dizaines de types de câbles coaxiaux. Un tour sur wikipédia vous donne l'ensemble des normes.

2. On pourra aussi se reporter au problème 20.1 du chapitre 20 du Cap Prépa de PC-PC*

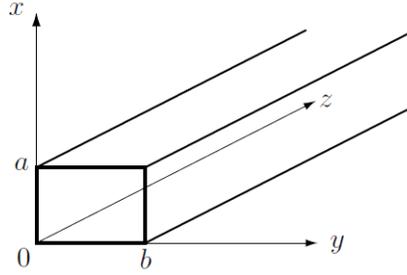


FIGURE 4.4 – Tuyau rectangulaire pour propagation et guidage d’une onde acoustique.

qu’on peut injecter dans l’équation de d’Alembert (qui régit la propagation d’une onde acoustique). En divisant le résultat par $\underline{p}_1(M, t)$ aux points où $X(x)$, $Y(y)$ et $Z(z)$ ne s’annulent pas :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.76)$$

Les variables x , y et z étant indépendantes, $\frac{X''(x)}{X(x)}$, $\frac{Y''(y)}{Y(y)}$ et $\frac{Z''(z)}{Z(z)}$ sont constants. Sur les parois de la cavité, la vitesse particulaire est tangente à celle-ci, les fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ sont donc sinusoidales sinon leur dérivée ne peut pas s’annuler deux fois. Les constantes sont négatives et on a bien :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \quad , \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2 \quad \text{et} \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k_z^2 \quad (4.77)$$

avec

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.78)$$

Sur les parois de la cavité, la vitesse particulaire est tangente à celle-ci, d’où : $X'(0) = X'(a) = 0$ et $Y'(0) = Y'(b) = 0$. Compte tenu des conditions aux limites ci-dessus :

$$X(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad Y(y) = \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (4.79)$$

où n et m sont deux entiers positifs ou nuls (donc $k_x = \frac{n\pi}{a}$ et $k_y = \frac{m\pi}{b}$). En reportant dans l’équation de d’Alembert, on obtient :

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} = -k_z^2 \quad (4.80)$$

La surpression se met sous la forme :

$$\underline{p}_1(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \underline{p}_{n,m}(x, y, z, t) \quad (4.81)$$

avec :

$$\underline{p}_{n,m}(x, y, z, t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \left(\underline{A}_{n,m} e^{i(\omega t - k_z z)} + \underline{B}_{n,m} e^{i(\omega t + k_z z)} \right) \quad (4.82)$$

Le mode propre décrit par la surpression $\underline{p}_{n,m}(x, y, z, t)$ est appelé mode (n, m) . L’onde se propage dans la cavité si k_z a une partie réelle non nulle. Comme k_z^2 est réel, k_z est ou bien réel ou bien imaginaire pur. L’onde se propage dans la cavité si $k_z^2 > 0$ donc si

$$\omega > \omega_{c_{n,m}} = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \quad (4.83)$$

Dans le cas où $(n, m) \neq (0, 0)$. La cavité se comporte comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure :

$$f_{c_{n,m}} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \quad (4.84)$$

Si $(n, m) = (0, 0)$, l'onde est plane. La relation $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ s'écrit :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c_{n,m}}^2}{c^2} \quad (4.85)$$

qu'on peut réécrire :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \quad (4.86)$$

avec λ_g la longueur d'onde dans le guide, λ la longueur d'onde dans le vide et $\lambda_c = \frac{c}{f_c}$ la longueur d'onde de coupure.

La vitesse de groupe de l'onde est définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk_z}$. De la relation $k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c_{n,m}}^2}{c^2}$ on en déduit : $c^2 k_z dk_z = \omega d\omega$, puis :

$$v_g = c^2 \frac{k_z}{\omega} = c \frac{\lambda}{\lambda_g} \quad (4.87)$$

Comme $\lambda_g > \lambda$, on $v_g < c$: la célérité de l'onde guidée est inférieure à la célérité des ondes se propageant à l'air libre.

Si $a < b$, la plus petite fréquence pouvant se propager correspond à $f_{c_{0,1}} = \frac{c}{2b}$. L'application numérique pour $b = 1$ cm donne : $f_{c_{0,1}} = 17$ kHz. Cette fréquence se situe à la limite supérieure des fréquences audibles. Ainsi on aura que le mode $(0, 0)$ qui se propage dans le tuyau, soit une onde plane. Les instruments réels à section constante sont cylindriques, de rayon a . L'étude se fait de la même façon mais le résultat fait intervenir des fonctions de Bessel de première espèce. La fréquence de coupure la plus basse est alors :

$$f_c = \frac{1.84c}{2\pi a} \quad (4.88)$$

La nouvelle fréquence de coupure pour $a = 1$ cm est : $f_c = 10$ kHz. Il peut donc y avoir des modes propres du tuyau sonore dans le domaine audible.

4.5.2 Propagation dans une cavité de longueur finie. Impédance.

On se place désormais dans l'hypothèse d'une onde plane, c'est-à-dire que l'on ne s'intéresse qu'au fonctionnement du tuyau en dessous de la première fréquence de coupure. Le tuyau a une longueur L , une section constante d'aire S . On note k le module d'onde et ω la pulsation de l'onde.

Impédance caractéristique

On définit l'impédance caractéristique du tuyau par la relation :

$$Z_c = \frac{p_1(z, t)}{Su(z, t)} \quad (4.89)$$

pour une onde plane progressive dans le sens des z croissants. $Su(z, t)$ est le débit volumique à travers une section droite du tuyau. Pour une onde plane progressive dans le sens des z croissants on a :

$$Z_c = \frac{\mu_0 c}{S} \quad (4.90)$$

Impédance acoustique

On définit l'impédance acoustique \underline{Z}_z en un point d'abscisse z par la relation :

$$\underline{Z}_z = \frac{p_1(z, t)}{S\underline{u}(z, t)} \quad (4.91)$$

On a :

$$p_1(z, t) = Ae^{j(\omega t - k_z z)} + Be^{j(\omega t + k_z z)} \quad (4.92)$$

et :

$$u(z, t) = \frac{A}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - k_z z)} - \frac{B}{\mu_0 c} e^{j(\omega t + k_z z)} \quad (4.93)$$

D'où :

$$Z_z(z=0) = Z_0 = Z_c \frac{A+B}{A-B} \quad \text{et} \quad Z_z(z=L) = Z_L = Z_c \frac{Ae^{-jk_z L} + Be^{jk_z L}}{Ae^{-jk_z L} - Be^{jk_z L}} \quad (4.94)$$

qui se réécrit :

$$Z_L = Z_c \frac{(A+B) \cos(kL) - j(A-B) \sin(kL)}{(A-B) \cos(kL) - j(A+B) \sin(kL)} = \frac{Z_0 \cos(kL) - jZ_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) - jZ_0 \sin(kL)} \quad (4.95)$$

qui s'inverse en :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_L \cos(kL) + jZ_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) + jZ_L \sin(kL)} \quad (4.96)$$

Quand Z_L tend vers l'infini, $Z_0 = -jZ_c \cotan(kL)$. Quand Z_L tend vers zéro, $Z_0 = jZ_c \tan(kL)$.

Fréquences d'une flûte et d'une clarinette

Pour les deux instruments, le tuyau est limité par les plans $z=0$ et $z=L$. L'extrémité $z=L$ est ouverte. En première approximation, on suppose que l'impédance acoustique est nulle au niveau d'une extrémité ouverte. Pour une flûte, l'extrémité $z=0$ peut être considérée comme quasiment ouverte. Par contre, pour une clarinette, l'anche située en $z=0$ se comporte comme un obstacle rigide. Dans les deux cas, $Z_L=0$ donc $Z_0 = jZ_c \tan(kL)$. Pour une flûte, $Z_0=0$ d'où $\tan(kL)=0$ soit $kL = n\pi$ où n est un entier positif. Les fréquences propres de la flûte sont donc : $f_n = n \frac{c}{2L}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour la clarinette Z_0 est infinie, ce qui donne $kL = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ où n est un entier positif (on choisit $-\frac{\pi}{2}$ pour numérotter les fréquences propres de la même façon pour les deux instruments). Les fréquences propres de la clarinette sont donc :

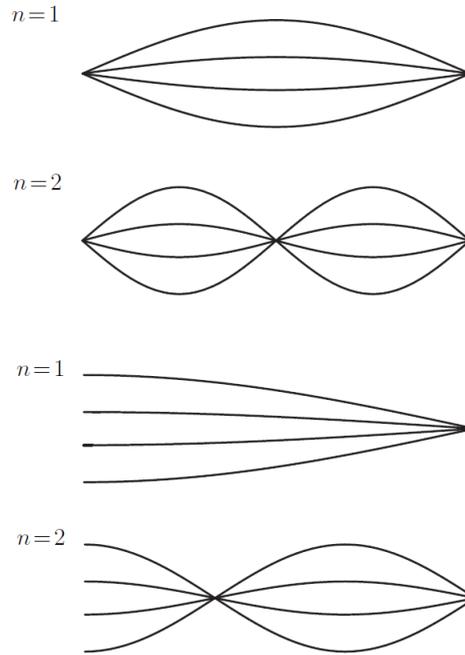
$$f_n = -\frac{c}{4L} + n \frac{c}{2L} \quad (4.97)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$. L'onde est stationnaire à l'intérieur du tuyau. La surpression en $z=0$ est nulle pour la flûte (nœud), maximale pour la clarinette (ventre). En $z=L$, elle est nulle pour les deux instruments. Surpression à l'intérieur des tuyaux :

- Flûte :
- Clarinette :

La clarinette possède un *trou de registre* situé à la distance $L/3$ (environ) de l'extrémité $z=0$ de la clarinette. En ouvrant le trou de registre situé au tiers de la longueur de la clarinette, on impose un nœud de surpression en ce point : on interdit donc tous les modes qui ne possèdent pas ce nœud, en particulier le fondamental. La première fréquence émise est donc l'harmonique 1, de fréquence 3 fois plus élevée que celle du fondamental.

À longueur égale la clarinette joue un octave plus bas que la flûte (fréquence fondamentale deux fois plus faible). Le son émis par une flûte possède tous les harmoniques du fondamental alors que celui émis par la clarinette ne possède que les harmoniques impairs.



Quand la température augmente, la célérité du son augmente (c est proportionnelle à \sqrt{T}) donc les fréquences propres d'un instrument à vent augmentent. Pour un instrument à corde, $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ ne varie pas quand la température augmente mais la longueur de la corde augmente légèrement (la corde se dilate). Les fréquences propres, proportionnelles à $c/2L$ diminuent. On voit alors la nécessité de devoir réaccorder les instruments dans un orchestre pendant un concert.

4.6 Ondes à une interface : ondes gravito-capillaires

Si les ondes de surface sont bien connues et facilement observables, on a moins conscience de la présence dans certaines conditions d'ondes dites gravito-capillaires, qui font intervenir la tension de surface à l'interface entre deux fluides.

On considère ici une cuve de largeur et de longueur infinies et de profondeur H finie (condition d'eau peu profonde) comme indiqué sur la FIGURE 4.5. Elle est remplie d'eau de masse volumique ρ_0 et entourée d'air à la pression P_0 . L'écoulement est considéré comme incompressible et on se restreint aux petites amplitudes. Par ailleurs, la viscosité est négligée. On s'intéresse à la propagation d'ondes suivant la direction portée par \mathbf{e}_x .

On a fait les hypothèses de l'absence de viscosité et des petites amplitudes. On néglige alors les termes visqueux et non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes, ce qui nous donne :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad}(P + \rho_0 g z) \quad (4.98)$$

On prend le rotationnel de l'équation précédente. Comme elle doit rester vraie à tout t (on peut alors intervertir la dérivée temporelle et le rotationnel) et en utilisant le fait que $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}) = \mathbf{0}$, on conclut que l'écoulement est irrotationnel ($\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$) en choisissant la constante d'intégration nulle car l'écoulement est supposé irrotationnel à $t = 0$.

On peut alors écrire $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \Phi$ à un gradient uniforme près qu'on choisira nul. En réécrivant l'équation d'Euler obtenue plus haut et en gardant à l'esprit qu'elle est valable en tout point à tout temps :

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + P + \rho_0 g z = \text{Cte} \quad (4.99)$$

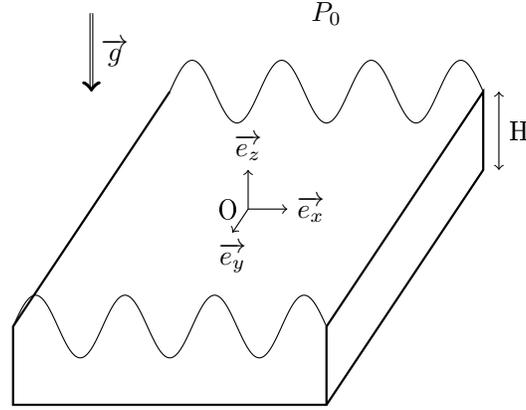


FIGURE 4.5 – Notations pour les ondes gravito-capillaires

La constante est indépendante du temps car si l'on se place au fond de la cuve, et considérant que l'amplitude des perturbations de la surface est très petite devant la profondeur de la cuve, l'influence de la surface sur le fond est négligeable. Ainsi, on peut considérer que le fluide au fond de la cuve est stationnaire (immobile même ici). Comme l'équation précédente est vraie en tout point de l'écoulement, la constante est alors indépendante du temps.

La loi de conservation de la masse s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$. Comme le fluide est considéré incompressible et que $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\Phi$, on a immédiatement l'équation de Laplace :

$$\Delta\Phi = 0 \quad (4.100)$$

Le fluide ne peut pas pénétrer le fond de la cuve. Comme celui-ci est immobile dans le référentiel d'étude, on peut écrire :

$$v_z(x, y, -H) = 0 \quad (4.101)$$

On appelle z_S la position verticale de l'interface. Dans l'approximation des petites amplitudes, on peut identifier la variation de hauteur de la surface à la vitesse verticale du fluide :

$$v_z(x, y, z_S) = \frac{\partial z_S}{\partial t} \quad (4.102)$$

La discontinuité de pression à l'interface s'écrit dans notre cas, selon la loi de Laplace :

$$P(x, y, z_S) = P_0 + \frac{\gamma}{R} \quad (4.103)$$

où γ est la tension de surface et R le rayon de courbure algébrique de la surface en z_S .

En se limitant aux petites amplitudes, la courbure peut-être assimilée à la dérivée seconde de la hauteur de l'interface. Il faut également tenir compte de la convention de rayon de courbure prise dans l'énoncé qui est opposée à celle prise pour la courbure d'une ligne. Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 z_S}{\partial x^2} = -\frac{1}{R} \implies P(x, y, z_S) = P_0 - \gamma \frac{\partial^2 z_S}{\partial x^2} \quad (4.104)$$

Maintenant que nous avons les différentes équations auxquelles répond le fluide ainsi que les conditions aux limites, nous pouvons résoudre les équations. Nous allons rechercher des solutions en ondes planes progressives se propageant le long des x croissants sous la forme :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Psi(z)e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{et} \quad z_S(\mathbf{r}, t) = z_{S0}e^{i(kx-\omega t)} \quad (4.105)$$

On injecte l'expression de Φ donnée par l'énoncé dans l'équation (4.100) et on obtient aisément une équation d'onde :

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} - k^2\Psi = 0 \quad (4.106)$$

qui s'intègre immédiatement en :

$$\Psi(z) = \Psi_0^+ e^{kz} + \Psi_0^- e^{-kz} \quad (4.107)$$

La condition donnée par l'équation (4.101) se réécrit $\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x, y, -H) = 0$ ce qui donne, en posant $\Psi_0/2 = \Psi_0^+ e^{-kH} = \Psi_0^- e^{kH}$:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 \cosh[k(z+H)] e^{i(kx-\omega t)} \quad (4.108)$$

On utilise ici la condition aux limites données par (4.102) et on obtient facilement :

$$\Psi_0 k \sinh[k(z_S+H)] = -i\omega z_{S0} \quad (4.109)$$

En injectant l'équation d'évolution de Φ dans l'équation (4.99), en se plaçant à la surface, en utilisant l'équation précédente et en considérant les petites amplitudes ($z_S \ll H$), on arrive après quelques calculs à :

$$\left[g + \gamma \frac{k^2}{\rho_0} - \frac{\omega^2}{k} \coth(kH) \right] \rho_0 z_{S0} e^{i(kx-\omega t)} = Cte - P_0 \quad (4.110)$$

Le terme de droite de l'équation précédente est indépendant du temps. Ainsi, le seul moyen pour que l'équation soit correcte quelque soit t est d'annuler le membre de gauche, ce qui amène à l'équation de dispersion suivante :

$$\boxed{\omega^2 = k \left(g + \frac{\gamma k^2}{\rho_0} \right) \tanh kH} \quad (4.111)$$

La vitesse de phase de l'onde correspond au rapport $v_\phi = \omega/k$, ce qui donne ici :

$$v_\phi = \sqrt{\left(g + \frac{\gamma k^2}{\rho_0} \right) \frac{\tanh kH}{k}} \quad (4.112)$$

La vitesse de groupe de l'onde s'écrit $v_g = d\omega/dk$. Plaçons nous dans la situation d'eau peu profonde ($kH \ll 1$). En différenciant l'équation de dispersion et en réinjectant l'expression de ω , on obtient :

$$v_g = \sqrt{H} \frac{g + \frac{2\gamma k^2}{\rho_0}}{\sqrt{g + \frac{\gamma k^2}{\rho_0}}} \quad (4.113)$$

On remarque immédiatement que le rapport v_g/v_ϕ est supérieur à 1. L'énergie est donc transportée plus vite que la phase.

Il y a compétition entre le terme gravitaire (g) et le terme capillaire ($\gamma k^2/\rho_0$) dans l'équation de dispersion. Le changement de régime intervient lorsque ces deux termes sont semblables, ce qui nous donne, en prenant $k_c = 2\pi/l_c$:

$$l_c = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_0 g}} \quad (4.114)$$

Cette longueur est appelée *longueur capillaire* et vaut pour l'eau 1.7 cm.

On plonge un diapason qui vibre à la fréquence du La du violon. On reste en condition d'eau peu profonde. L'équation de dispersion permet facilement de déterminer le nombre d'onde par résolution numérique et donc la longueur d'onde provoquée par le diapason (La du violon, 440 Hz) : $k_{La} = 46.8 \text{ cm}^{-1}$. La longueur d'onde vaut donc $\lambda_{La} = 1.3 \text{ mm}$. La célérité associée vaut 0.57 m/s. On est dans le régime gravito-capillaire.