
Transition doigt/fracture lors de l'ascension d'air dans un milieu granulaire immergé

Résumé : *Lorsque l'on injecte de l'air dans un milieu granulaire immergé, on observe dans certaines conditions expérimentales une transition entre la remontée d'un doigt d'air et une fracturation du milieu granulaire. Nous avons tenté lors de ce stage de caractériser cette transition. Le dispositif expérimental est constitué d'un milieu granulaire immergé dans l'eau, contenu entre 2 plaques de verre parallèles faiblement espacées (cellule de Hele-Shaw). En injectant de l'air à débit fixé à la base du lit granulaire, on peut alors étudier la dynamique d'ascension du doigt d'air formé, jusqu'à une hauteur critique de transition où l'air fracture le milieu plutôt que de continuer son ascension. L'étude a permis de caractériser l'influence de différents paramètres sur cette transition (taille des grains, hauteur de la couche de grains, débit injecté). Ces résultats ont été retrouvés à l'aide d'un modèle semi-empirique.*

Mots clefs : *milieu granulaire, instabilités de Saffman-Taylor, loi de Darcy, viscosité de suspensions*

Stage encadré par :

Valérie VIDAL

valerie.vidal@ens-lyon.fr / Tél. : 04 72 72 83 75

Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon

Bâtiment LR1

46, allée d'Italie

69007 Lyon

<http://www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE/>

Laboratoire d'accueil

Ce stage a été réalisé au Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, dans l'équipe *Matière et Complexité*, sous la direction de Valérie Vidal.

Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe du Laboratoire de Physique pour son accueil durant ce stage, en particulier Valérie pour son aide tant sur l'aspect expérimental que sur les aspects théoriques des milieux granulaires. Je remercie également les autres chercheurs, stagiaires et doctorants du laboratoire pour l'aide qu'ils m'ont apportée durant ces 3 mois.

Table des matières

Introduction	1
1 Injection d'air dans un milieu granulaire immergé	2
1.1 Présentation du montage expérimental	2
1.2 Différentes dynamiques d'ascension	3
1.3 Distribution de taille des grains	4
1.4 De la poche d'air à l'étude des fractures	4
2 Caractérisation de la transition doigt d'air/fracture	6
2.1 Analyse de la transition	6
2.2 Évolution de la hauteur de fracture	7
2.3 Évolution de la largeur du doigt d'air	8
3 Modèle théorique	10
3.1 La loi de Darcy	10
3.2 Viscosité et compacité du milieu granulaire	11
3.3 Construction du modèle 2D	12
Évolution verticale	12
Évolution horizontale	13
Bilan	14
4 Comparaison modèle/expérience	14
4.1 Modélisation pour un exemple particulier	14
4.2 Retour à l'étude des ascensions	16
4.3 Le modèle semi-empirique	16
Evolution verticale	16
Evolution horizontale	17
4.4 Comparaison modèle semi-empirique/expérience	17
4.5 Les limites du modèle	19
Conclusion	20
Bibliographie	21
Annexes	i
Annexe A : calibration du contrôleur de débit	i
Annexe B : détermination du volume des tuyaux	ii
Annexe C : étude expérimentale de la hauteur de fracture	iii
Annexe D : étude expérimentale de la largeur du doigt d'air	iv
Annexe E : modélisation de la zone fluide	v
Annexe F : étapes après la transition doigt/fracture	vii

Introduction

Un milieu granulaire est un ensemble de particules solides macroscopiques, dont la taille varie typiquement de quelques microns jusqu'à plusieurs mètres. Les recherches en physique et en géophysique sur les milieux granulaires sont nombreuses car les propriétés mécaniques et thermodynamiques les concernant sont encore mal comprises. En effet, suivant les contraintes appliquées sur le milieu et le temps d'observation, il peut apparaître soit des comportements propres aux solides, soit des comportements propres aux fluides. Les applications de ces recherches s'étendent des sciences fondamentales (processus géologiques en particulier) jusqu'au développement industriel (réacteurs catalytiques, extraction de pétrole...).

Parmi les phénomènes de milieu granulaire étudiés, l'un des plus riche en application est l'ascension de fluide dans un milieu granulaire. En effet de nombreux phénomènes géophysiques y sont liés, tels que l'émission de gaz au fond des mers [1], la formation de complexes hydrothermaux [2], la formation de conduits de kimberlite [3], ou encore la décontamination des sols par *Air sparging* [4]. Les ascensions en milieux diphasiques ont souvent été étudiée par le passé, c'est le cas par exemple de l'injection d'eau dans un milieu granulaire immergé {grains+eau}. En fonction du débit d'injection, on voit apparaître 3 dynamiques différentes (percolation, instabilité sous forme de canaux, ou fluidification du milieu). Mais le cas des systèmes triphasiques (injection d'un fluide A dans un milieu granulaire immergé dans un fluide B) est plus complexe. Plusieurs études ont été réalisées sur l'injection d'air en milieu granulaire immergé dans une cellule horizontale [5]. Mais concernant la dynamique d'ascension verticale, seulement quelques études s'y sont intéressées. Cependant, elles se sont focalisées soit sur des échelles de temps courtes (invasion d'air aux premiers instants) [6], soit sur des échelles de temps très longues (formation d'une zone fluide) [7, 8].

Durant ce stage, je me suis donc concentré sur l'étude de ce phénomène d'ascension de fluide en régime stationnaire à l'aide d'un dispositif expérimental en 2D vertical. Celui-ci est constitué d'un milieu granulaire immergé dans l'eau, contenu entre 2 plaques de verre parallèles proches (cellule de Hele-Shaw). En injectant de l'air à débit fixé sous le lit granulaire, on peut alors étudier la dynamique d'ascension de la bulle formée. Dans certaines conditions, l'ascension ne se fait pas en une étape, mais passe par une phase d'arrêt d'un doigt d'air, rapidement suivi d'une fracture du milieu granulaire qui permet à l'air de s'échapper. Mon travail concernait l'étude de la transition doigt d'air/fracture en régime stationnaire, et son évolution en fonction des paramètres de l'expérience.

Dans une première partie, je présente le dispositif expérimental utilisé, ainsi que les différents milieux granulaires étudiés. J'y développe les différentes dynamiques d'ascension de l'air dans les milieux granulaires, ainsi que la nécessité d'étudier ce phénomène de fracture.

La seconde partie concerne plus précisément la caractérisation expérimentale de la transition. Nous avons déterminé la hauteur et la largeur du doigt d'air à laquelle la transition apparaît, ainsi que leurs évolutions en fonction des différents paramètres de l'expérience.

Une troisième partie expose un modèle hydrodynamique permettant de modéliser ce phénomène de transition. Les équations différentielles obtenues à partir de ce modèle en 2D sont ensuite résolues numériquement.

Enfin une dernière partie compare les résultats expérimentaux observés avec notre modèle théorique. Nous développons la nécessité de corriger ce modèle à l'aide de lois empiriques pour un meilleur accord avec l'expérience.

1 Injection d'air dans un milieu granulaire immergé

1.1 Présentation du montage expérimental

Le dispositif expérimental utilisé pour caractériser la transition doigt d'air/fracture du milieu est présenté en figure 1.

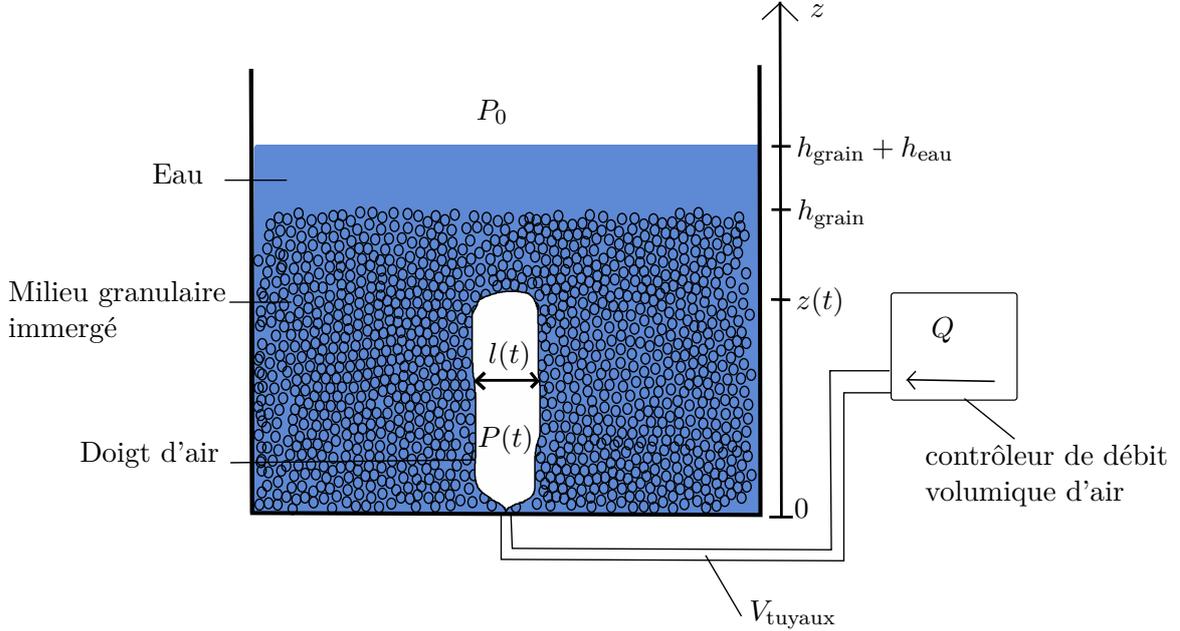


FIGURE 1: Schéma du dispositif expérimental.

Il est constitué d'une cellule de Hele-Shaw (2 plaques de verre parallèles) d'une largeur de 40 cm, d'une hauteur de 30 cm, et d'un *gap* (écart inter-plaques) $e \approx 3$ mm. Cette cellule contient un milieu granulaire de hauteur h_{grain} immergé dans l'eau. De l'eau est rajoutée en excès au-dessus du milieu sur une épaisseur h_{eau} , elle est en contact avec l'air ambiant à la pression atmosphérique P_0 . Un contrôleur de débit (Bronkhorst, Mass-Stream Series D-SM), avec rétroaction, injecte un débit volumique d'air Q constant ($5,0 \text{ mL/min} < Q < 10,0 \text{ L/min}$). La calibration de ce contrôleur est présentée en annexe A. L'air passe par des tuyaux flexibles de volume $V_{\text{tuyaux}} \approx 61 \text{ mL}$, avant d'être injecté à la base du milieu granulaire par un injecteur cylindrique d'environ 1 mm de diamètre. La calibration pour obtenir le volume des tuyaux est présenté en annexe B. En régime stationnaire, l'air injecté remonte dans le milieu granulaire pour atteindre la surface. On note dans la suite z la hauteur de la bulle et l sa largeur. Des acquisitions vidéos de l'ascension sont réalisées à partir d'une webcam (Logitech C600, 2 Mégapixels) placée à environ 20 cm du dispositif.

Plusieurs études ont déjà été réalisées sur ce dispositif dans le laboratoire. Il a par exemple été montré qu'en régime stationnaire, il peut apparaître une forme de cratère à la surface des grains dû à l'advection des grains dans la couche d'eau sus-jacente [7]. Cette configuration ne se forme que pour des couches d'eau h_{eau} supérieures à quelques centimètres. De même, l'évolution de la trajectoire d'ascension de l'air a déjà été étudiée de manière statistique lorsque le dispositif est incliné d'un angle particulier par rapport à la verticale [8].

Lors de ces travaux, un phénomène particulier a été observé. La plupart du temps, l'air injecté remonte dans le dispositif plus ou moins directement jusqu'à atteindre la surface. Mais dans certains cas, l'air s'arrête brutalement sous la surface des grains pour former une poche d'air, celle-ci grossit en surélevant assez fortement la surface jusqu'à atteindre un volume limite, puis crée un canal pour s'échapper. Ce phénomène ressemble beaucoup à la formation de poche de magma sous les volcans et s'obtient systématiquement lors de l'utilisation de dispositif 3D. Cependant, ce dispositif ne permet pas de visualiser la dynamique de remontée de l'air, contrairement à celui en 2D. Le but initial de ce stage était donc d'essayer de reproduire ce phénomène en 2D, pour ensuite le caractériser. Pour cela, nous avons tout d'abord étudié les différentes dynamiques d'ascension de l'air.

1.2 Différentes dynamiques d'ascension

Plusieurs paramètres peuvent être modifiés sur le dispositif : le débit d'air volumique injecté Q , le diamètre des grains (de $100 \mu\text{m}$ à $400 \mu\text{m}$ environ), la hauteur de grain h_{grain} et la hauteur supérieure d'eau h_{eau} .

En fonction du débit Q , il apparaît 3 dynamiques principales lors de l'ascension de l'air en régime stationnaire, représentées sur la figure 2.

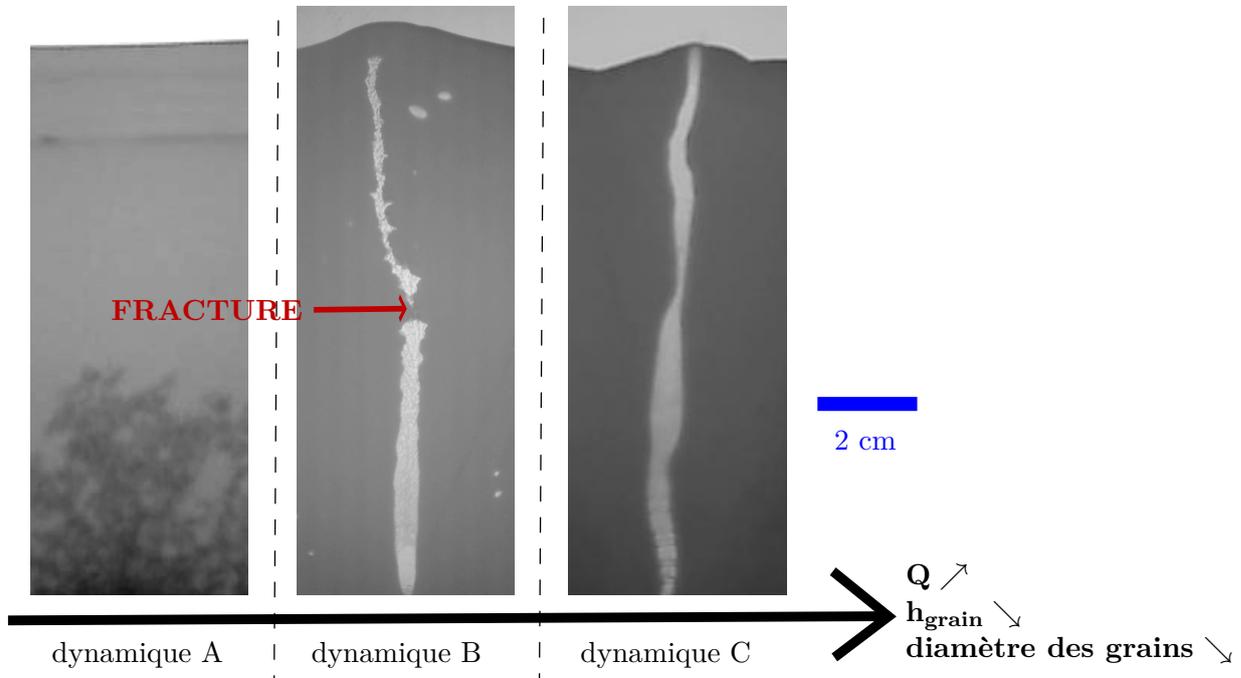


FIGURE 2: Diagramme qualitatif des régimes d'ascension d'air dans le milieu granulaire immergé en fonction des paramètres du système. À faible débit (A), l'air forme des micro-canaux dans toutes les directions jusqu'à atteindre la surface. À débit moyen (B), un doigt d'air se forme et remonte sur une certaine hauteur avant de s'arrêter, il fracture alors le milieu granulaire pour s'échapper. À haut débit (C), le doigt d'air atteint la surface sans s'arrêter.

Les caractéristiques des 3 dynamiques sont :

- dynamique A : à faible débit, l'air percole à travers les grains sans les déplacer. Ces micro-canaux s'étendent dans toutes les directions possibles jusqu'à ce que l'un d'entre eux atteigne la surface, l'air se vide alors à travers lui, puis le canal se referme et le processus recommence.
- dynamique B : à débit moyen, l'air s'infiltré dans le milieu en poussant les grains sous forme de doigt d'air (comme lors d'une instabilité de Saffman-Taylor [9]) jusqu'à une certaine hauteur et marque une phase d'arrêt. La pression dans la bulle augmentant, l'air va ensuite « fracturer » le milieu granulaire jusqu'à la surface pour s'échapper, avant de se refermer sur lui-même et de recommencer le processus.
- dynamique C : à haut débit, le doigt d'air se propage jusqu'à la surface, puis reste ouvert en laissant échapper l'air en continu.

Nous avons ensuite étudié l'évolution de la dynamique en fonction des 3 autres paramètres de l'expérience.

Pour la taille des grains, plus le diamètre est élevé et plus il sera facile pour l'air de percoler à travers les grains (A). Cela peut s'expliquer facilement par le fait que les pores du milieu sont plus importants pour des gros grains et facilitent donc le passage de l'air dans le milieu. Pour des grains de taille inférieure à $100 \mu\text{m}$ de diamètre, la dynamique C est la seule qu'il est possible d'observer, tandis que pour des grains de taille supérieure à $400 \mu\text{m}$ il n'apparaît que la dynamique A.

Pour la hauteur de la couche de grain h_{grain} , plus elle est importante et plus le système tend vers une percolation de l'air (A). Le poids des grains étant plus important, la pression au point d'injection est plus forte et empêche la formation d'un doigt.

Concernant la hauteur supérieure d'eau h_{eau} , elle n'a pas beaucoup d'influence sur la dynamique de la bulle. En effet, la pression hydrostatique ajoutée n'intervient pas dans la différence de pression entre le point d'injection et la surface des grains. Cependant, nous la choisissons suffisamment importante pour avoir un milieu granulaire qui reste immergé, mais ne dépassant pas quelques centimètres pour éviter l'effet d'advection des grains [7]. En pratique nous prendrons donc $h_{\text{eau}} = 3$ cm.

La taille des grains utilisés jouant un rôle important sur la dynamique, il nous faut étudier leur distribution de taille.

1.3 Distribution de taille des grains

Le milieu granulaire utilisé pour ces expériences est composé de microbilles de verre (Wheelabrator), de principaux composants : SiO_2 (72,6%), CaO (9,2%), MgO (3,4%), Na_2O (13,7%), et de masse volumique moyenne $\rho_{\text{grain}} \approx 2,31.10^3$ kg/m³. Nous disposions de plusieurs tailles de grains, mais les acquisitions réalisées dans la partie précédente nous indiquent que seulement 3 permettent d'obtenir une transition doigt/fracture. Nous avons évalué la distribution de taille de ces échantillons à l'aide d'un microscope (Wild Makroskop M420, Heerbrugg, avec un objectif LEICA Makro-Zoom 1-5). Un exemple de photographie obtenue avec le microscope est présenté sur la figure 3, nous pouvons voir que la majorité des microbilles sont sphériques. Pour chaque taille de grains, nous avons réalisé 15 acquisitions, puis les avons traitées par un programme Matlab de détection des contours renvoyant la distribution de diamètre des grains. Les distributions ont ensuite été ajustées par une loi gaussienne, les courbes sont exposées sur la figure 3.

Les diamètres moyens et écarts-types obtenus sont présentés dans la table 1.

taille annoncée	« 75-150 μm »	« 106-212 μm »	« 180-300 μm »
diamètre moyen	149 μm	205 μm	311 μm
écart-type	17 μm	33 μm	52 μm

TABLE 1: Diamètres moyens et écarts-types de nos 3 échantillons de microbilles, après ajustement avec une loi gaussienne.

Le tableau nous indique que les écarts-types augmentent avec les diamètres moyens des grains. De plus, les gammes de tailles annoncées par le fabricant ne correspondent pas vraiment aux diamètres moyens mesurés.

Maintenant que le milieu granulaire est caractérisé, nous allons tenter de nouvelles conditions expérimentales permettant l'apparition de la bulle d'air sous la surface.

1.4 De la poche d'air à l'étude des fractures

À débit volumique constant, nous n'avons jamais observé l'apparition d'une poche d'air qui grossit sous la surface des grains. Cependant, ce phénomène ressemble à l'ascension de l'air dans la dynamique B, car celle-ci marque une phase d'arrêt à une hauteur donnée, la différence étant que l'air s'accumule dans un cas, tandis qu'une fracture du milieu empêche cette accumulation dans l'autre. Nous avons alors essayé de répéter les expériences avec des débits d'air croissants ou décroissants, ou encore d'injecter un volume d'air important et de courte durée à l'instant initial, mais les dynamiques observées restent inchangées.

La variation de pression dans le doigt d'air au moment de sa transition vers la fracture est probablement un des facteurs les plus importants qui contrôle sa dynamique. Pour la mesurer, nous avons intégré au montage un capteur de pression (FGP instrumentation P211, gamme : 0-350 mbar, résolution : 0,1 mbar) relié à une interface Labview, au niveau du point d'injection. Nous avons réalisé

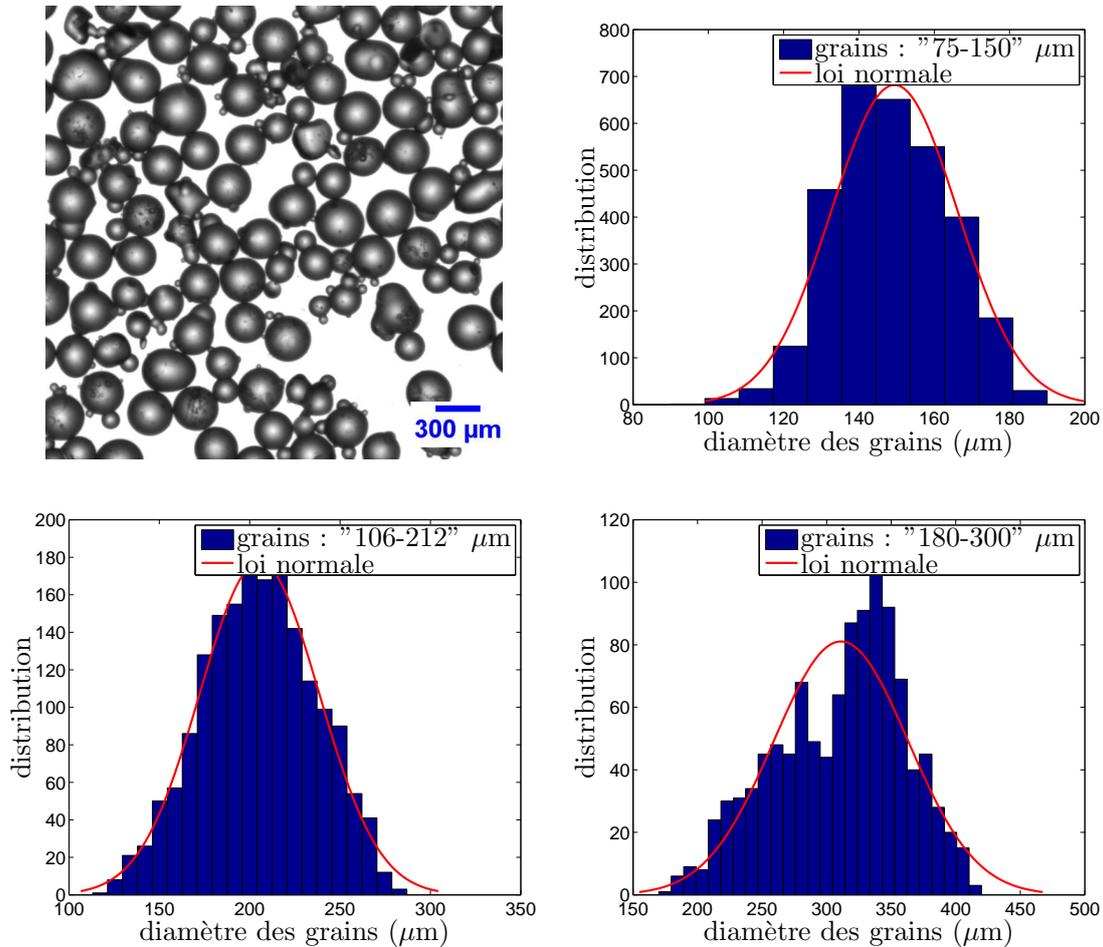


FIGURE 3: Distribution de taille de nos 3 échantillons de microbilles. En haut à gauche : exemple de photographie réalisée au microscope pour nos plus gros grains. Les trois courbes suivantes représentent les distributions et lois gaussiennes pour les grains de diamètre annoncé « 75-150 μm » (haut à droite), « 106-212 μm » (bas à gauche) et « 180-300 μm » (bas à droite).

plusieurs séries de mesure de la pression avant et après la fracture du milieu, mais les mesures sont trop bruitées pour être exploitées. Le volume des tuyaux étant bien supérieur à celui de la bulle formée, nous supposons que le bruit mesuré est dû à un effet de résonance d'onde de pression dans les tuyaux, plutôt qu'aux variations de pression dans la bulle. Nous n'avons donc accès qu'aux acquisitions vidéos pour notre expérience.

Le fait que la poche d'air sous la surface n'apparaisse pas en 2D est peut-être lié aux effets de bords, dus à la proximité des plaques de verre (ce problème n'existe pas dans un dispositif 3D). Dans tous les cas, il nous semble important pour la suite de nous intéresser plus en détail à ce phénomène de fracture du milieu granulaire (dynamique B). Nous avons donc caractérisé quantitativement cette transition doigt d'air/fracture en fonction des différents paramètres expérimentaux.

2 Caractérisation de la transition doigt d'air/fracture

2.1 Analyse de la transition

Pour analyser la transition doigt d'air/fracture de la dynamique B, nous avons développé un programme Matlab/ImageJ qui mesure la hauteur du doigt d'air et la hauteur de la surface des grains au cours du temps. La mesure est réalisée en 3 étapes : application de filtres pour moyenniser le bruit sur les acquisitions vidéos, binarisation des images, et enfin détection des surfaces à l'aide des maxima et minima d'intensité. Il est important de préciser que toutes les acquisitions ont été réalisées en régime stationnaire. En effet, la dynamique des premières ascensions lors de la mise en marche du contrôleur de débit diffère de celle obtenue en régime stationnaire, l'air a tendance à percoler aux premiers instants avant de former des doigts. L'état stationnaire est atteint au bout d'une à deux minutes. Un exemple de courbe obtenue pour $h_{\text{grain}} = 24$ cm et des grains de $149 \mu\text{m}$ est présenté en figure 4.

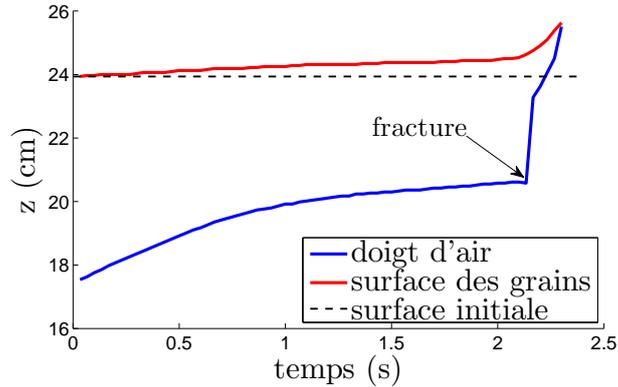


FIGURE 4: Exemple de mesure de la hauteur du doigt d'air (en bleu) et de la hauteur de la surface des grains (en rouge) au cours du temps pour $h_{\text{grain}} = 24$ cm et des grains de $149 \mu\text{m}$. La transition doigt d'air/fracture à 3,5 cm sous la surface des grains est caractérisée par une phase d'arrêt du doigt, suivie d'une accélération rapide. On remarque que la surélévation de la surface des grains reste négligeable jusqu'à la transition.

En analysant la figure 4, on retrouve les caractéristiques de la dynamique B. L'ascension du doigt d'air (en bleu) commence à ralentir à partir de 4 cm en-dessous de la surface des grains, jusqu'à s'arrêter vers 3,5 cm. La fracture du milieu granulaire permet alors à l'air de s'échapper en 0,2 s.

En observant la surélévation de la surface des grains (en rouge), on remarque que celle-ci est très faible jusqu'à la fracture du milieu (3-4 mm), puis atteint 1 cm lorsque l'air s'échappe. On peut alors considérer pour nos futures mesures que h_{grain} reste constant, au moins jusqu'à la transition.

A l'aide de notre programme de traitement vidéo, nous pouvons mesurer la hauteur de fracture pour chaque acquisition. Nous avons alors réalisé une étude statistique sur la hauteur à laquelle la transition doigt d'air/fracture se produit, pour différentes conditions expérimentales. Pour cela, nous pouvons jouer sur 3 paramètres de notre système : le débit d'injection de l'air Q , la hauteur de la couche de grains h_{grain} et le diamètre des grains utilisés.

Dans cette étude, nous nous limitons à 3 hauteurs de grains particulières : $h_{\text{grain}} = 12, 18$ et 24 cm. On rappelle que nous disposons de 3 échantillons de grains ($149 \pm 17 \mu\text{m}$, $205 \pm 33 \mu\text{m}$ et $311 \pm 52 \mu\text{m}$) permettant d'observer la dynamique B. La transition doigt d'air/fracture ne s'observe que lorsqu'il y a un équilibre entre ces 3 paramètres, comme représenté sur le diagramme qualitatif (figure 2). Nous avons alors établi expérimentalement un diagramme de la dynamique B pour les 9 conditions expérimentales étudiées (3 diamètres et 3 hauteurs de grains) en fonction de Q (figure 5).

On voit sur ce diagramme que la gamme de débits pour lesquels on observe la dynamique B augmente avec le diamètre moyen des grains et h_{grain} , comme cela avait été avancé sur la figure 2. Pour un débit inférieur, l'air percole dans le milieu granulaire (dynamique A), tandis que pour un débit supérieur un canal se forme et laisse échapper l'air en continu (dynamique C).

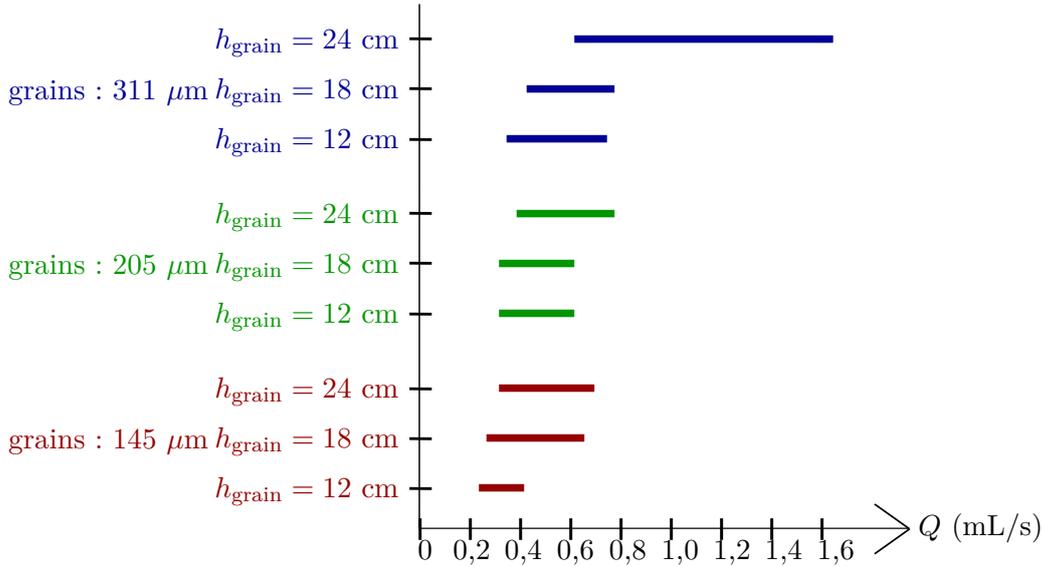


FIGURE 5: Diagramme de la gamme de débits Q pour lesquels on observe la dynamique B, pour 3 tailles de grains ($149 \pm 17 \mu\text{m}$, $205 \pm 33 \mu\text{m}$ et $311 \pm 52 \mu\text{m}$) et 3 hauteurs de grains (12 cm, 18 cm et 24 cm).

A l'aide de ce diagramme, nous pouvons maintenant mesurer l'évolution de la hauteur de fracture dans le milieu pour nos 9 conditions expérimentales.

2.2 Évolution de la hauteur de fracture

Pour chacune de nos 9 conditions expérimentales et pour différents débits où la dynamique B apparaît (figure 5), nous avons réalisé une dizaine d'acquisitions vidéos en régime stationnaire d'injection.

Il nous a ensuite fallu analyser les 700 vidéos obtenues avec notre programme, pour réaliser une statistique sur la hauteur à laquelle la fracture se forme, notée z_{fracture} , en fonction du débit, de la hauteur de grains, du diamètre de grains.

Pour $h_{\text{grain}} = 18 \text{ cm}$ et des grains de $311 \mu\text{m}$ de diamètre, nous avons représenté les hauteurs de fractures obtenues en fonction du débit sur la courbe de gauche de la figure 6. Malgré une dispersion assez importante pour chaque débit, on remarque que la hauteur de fracture moyenne semble augmenter linéairement avec le débit. En réalisant une régression linéaire, on obtient une équation de la forme : $z_{\text{fracture}} = 6,63 \cdot 10^4 \times Q + 1,49 \cdot 10^{-2}$, avec z_{fracture} la hauteur de fracture (en m) et Q le débit d'injection (en m^3/s). Le coefficient de corrélation obtenue est $R^2 = 0,92$.

On peut faire de même avec les 8 autres conditions expérimentales, les courbes obtenues sont exposées en annexe C. Toutes les courbes présentent cette loi affine, on réalise alors une régression linéaire sur chacune d'elles de la forme : $z_{\text{fracture}} = aQ + b$. Nous avons tenté d'ajuster ces courbes avec d'autres modèles (exponentiel, logarithmique, parabolique et en racine carrée). Les coefficients de corrélation obtenus sont légèrement inférieurs à ceux de la régression linéaire, cependant la forte dispersion des mesures permettrait aussi d'utiliser un modèle en $(aQ + b)^2$ ou $\sqrt{aQ + b}$. Nous nous limiterons ici au modèle linéaire pour étudier l'évolution de la hauteur de fracture, en supposant qu'il est valable à l'ordre 1.

En analysant les coefficients obtenus, il apparaît que a et b ne semblent dépendre que de la taille des grains utilisés. Nous avons alors réalisé une moyenne de ces coefficients pour nos 3 hauteurs de grains, pondérée par le nombre d'acquisitions de chacune. Les coefficients moyens ainsi que leurs incertitudes sont représentés à droite sur la figure 6.

Le coefficient a décroît lorsque le diamètre des gains augmente, l'allure ressemble à celle d'une exponentielle décroissante mais il faudrait d'autres tailles de grains pour le déterminer.

Le coefficient b semble être le même pour les grains de $149 \mu\text{m}$ et $215 \mu\text{m}$, puis chute pour les grains de $311 \mu\text{m}$. La signification physique du coefficient b est ambiguë, en effet celui-ci indiquerait à première

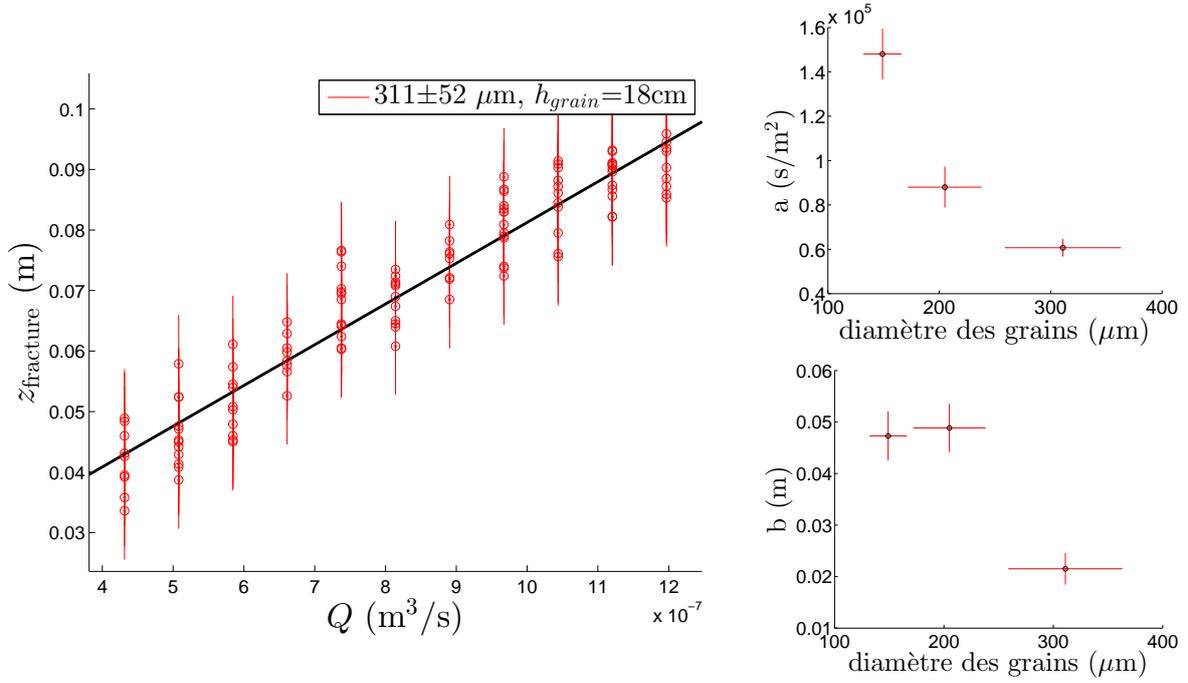


FIGURE 6: Évolution de la hauteur de fracture z_{fracture} (en m) pour les différentes conditions expérimentales. À gauche : évolution en fonction du débit d'air injecté Q (en m^3/s), pour $h_{\text{grain}} = 18 \text{ cm}$ et des grains de $311 \mu\text{m}$ de diamètre. En réalisant une régression linéaire, on obtient une équation de la forme : $z_{\text{fracture}} = aQ + b$, avec $a = 6,63 \cdot 10^4 \text{ s}/\text{m}^2$ et $b = 1,49 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, et un coefficient de corrélation $R^2 = 0,92$. À droite : évolution des coefficients a (en s/m^2) et b (en m) pour nos 3 tailles de grains. Les coefficients ont été moyennés sur nos 3 hauteurs de grains, pondérés par le nombre d'acquisitions de chacune.

vue qu'à débit nul ($Q = 0$), l'air arrive tout de même à monter dans le système et provoquerait une fracture en $z_{\text{fracture}} = b$. Mais il faut se rappeler que cette loi n'est valable que pour des débits compris dans une gamme où la dynamique B apparaît (voir figure 5).

Après avoir étudié la hauteur à laquelle la fracture apparaît, nous nous sommes ensuite intéressés à la largeur du doigt d'air pendant son ascension, notée l sur la figure 1.

2.3 Évolution de la largeur du doigt d'air

Lors de l'acquisition des vidéos, nous avons remarqué que la largeur du doigt d'air évolue au cours de son ascension. Il nous a alors semblé important de l'étudier pour déterminer s'il existe une corrélation entre elle et la hauteur de fracture.

Pour une ascension particulière, dans des grains de $205 \mu\text{m}$ avec $h_{\text{grain}} = 24 \text{ cm}$ et $Q = 0,55 \text{ mL}/\text{s}$, nous avons mesuré l'évolution de la largeur du doigt d'air au cours de son ascension. La courbe obtenue est présentée en figure 7, cette évolution est similaire aux autres ascensions observées.

Le doigt s'élargit rapidement dans les premiers instants, puis croît plus faiblement après quelques centimètres. La fracture est visible par une chute brutale de sa largeur jusqu'à 0, la largeur recommence ensuite à croître légèrement jusqu'à ce que l'air s'échappe.

Le maximum est atteint avant la fracture du milieu, nous le noterons l_{fracture} . Nous nous sommes demandés si cette largeur maximale du doigt dépendait du débit d'injection de l'air. Pour cela, nous avons développé un programme de traitement de vidéo permettant de mesurer la largeur du doigt d'air juste avant la fracture. En traitant avec ce programme les 700 acquisitions vidéos qui ont été réalisées précédemment pour la mesure de la hauteur du doigt d'air, nous avons obtenu l'évolution de la largeur du doigt à la fracture pour nos 3 hauteurs de grains, nos 3 tailles de grains, et les différents débits

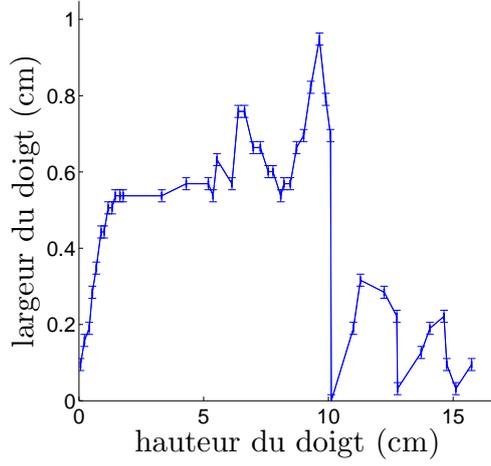


FIGURE 7: Exemple d'évolution de la largeur du doigt d'air (en cm) lors de son ascension, en fonction de sa hauteur (en cm), dans des grains de $205 \mu\text{m}$ avec $h_{\text{grain}} = 24 \text{ cm}$ et $Q = 0,55 \text{ mL/s}$.

correspondants. Nous présentons à gauche sur la figure 8 l'évolution mesurée pour $h_{\text{grain}} = 18 \text{ cm}$ et les grains de $311 \mu\text{m}$, les 8 autres courbes sont présentés en annexe D.

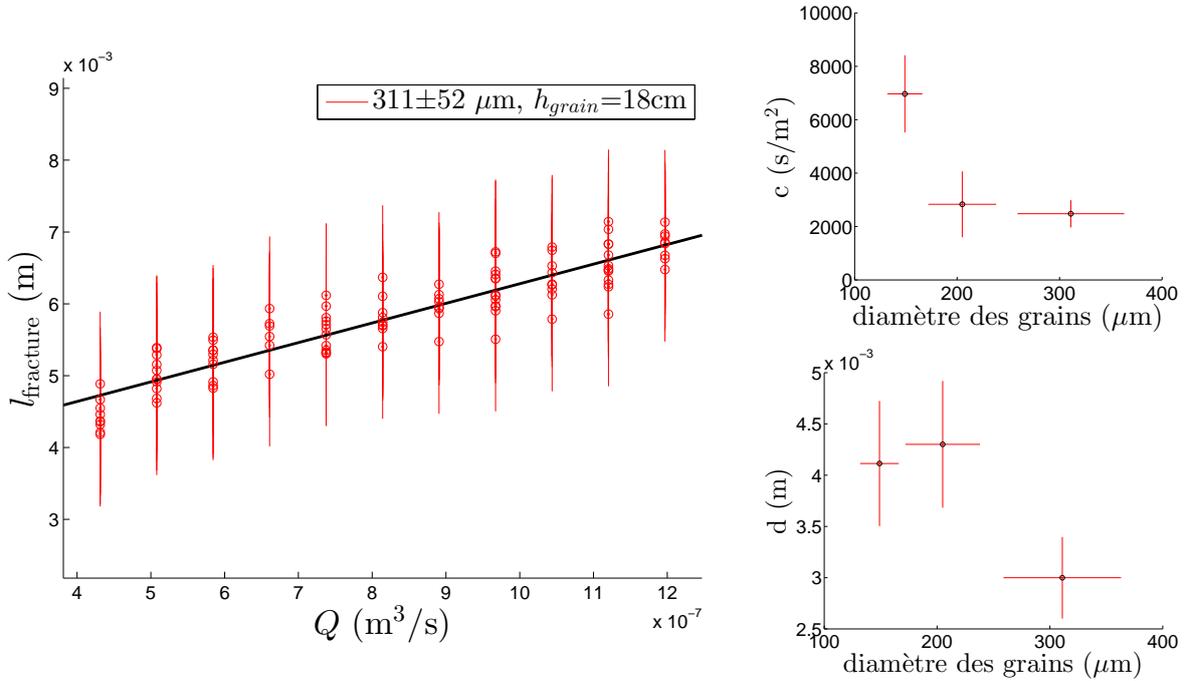


FIGURE 8: Évolution de la largeur du doigt d'air avant la fracture l_{fracture} (en m). À gauche : évolution en fonction du débit d'air injecté Q (en m^3/s), pour $h_{\text{grain}} = 18 \text{ cm}$ et des grains de $311 \mu\text{m}$ de diamètre. En réalisant une régression linéaire, on obtient une équation de la forme : $l_{\text{fracture}} = cQ + d$, $c = 6,73 \cdot 10^4 \text{ s/m}^2$ et $d = 1,39 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, et un coefficient de corrélation $R^2 = 0,95$. À droite : évolution des coefficients c (en s/m^2) et d (en m) pour nos 3 tailles de grains. Les coefficients ont été moyennés sur nos 3 hauteurs de grains, pondérés par le nombre d'acquisitions de chacune.

Tout comme la hauteur de la fracture, on retrouve une dispersion assez importante, mais la largeur du doigt d'air semble augmenter linéairement avec le débit injecté. En réalisant une régression linéaire, on obtient une équation de la forme : $l_{\text{fracture}} = 6,73 \cdot 10^4 \times Q + 1,39 \cdot 10^{-2}$, avec un coefficient de corrélation $R^2 = 0,95$. Les 8 autres courbes présentent également une tendance affine, on réalise alors une régression linéaire sur chacune d'elles de la forme : $l_{\text{fracture}} = cQ + d$. La dispersion des mesures étant importante, les coefficients de corrélation obtenus en ajustant nos données avec un modèle en

$(cQ + d)^2$ ou en $\sqrt{aQ + b}$ sont très proches de ceux obtenus par la loi affine. Cependant nous ferons la même hypothèse que précédemment, en considérant pour la suite que le modèle linéaire est valable au premier ordre.

Les coefficients c et d ne semblent dépendre que de la taille des grains utilisés. Nous avons alors réalisé une moyenne de ces coefficients pour nos 3 hauteurs de grains, pondérée par le nombre d’acquisitions de chacune. Les coefficients moyens ainsi que leurs incertitudes sont représentés à droite sur la figure 8.

On retrouve sur ces 2 courbes exactement la même évolution que celle obtenue pour la hauteur de fracture. Le coefficient c décroît lorsque le diamètre des grains augmente, l’allure semble être celle d’une exponentielle décroissante. Concernant le coefficient d , il est constant, puis chute pour les grains de $311 \mu\text{m}$. La signification physique du coefficient d est ambiguë, comme celle de b , car on s’attendrait à $l_{\text{fracture}} = d = 0$ pour $Q = 0$, mais cette loi n’est valable que dans la gamme où la dynamique B apparaît.

La corrélation entre la largeur du doigt d’air et sa hauteur avant la fracture est donc forte pour toutes les hauteurs et diamètres des gains. On remarque par ailleurs que le fait que la largeur du doigt d’air augmente avec le débit d’injection n’est pas trivial. En effet, dans la plupart des instabilités hydrodynamiques où se propage un doigt de fluide, telle que celle de Saffman-Taylor [9] (*e.g.* injection d’air dans un fluide visqueux contenue dans une cellule de Hele-Shaw), la largeur du doigt diminue lorsque le débit d’injection augmente. L’influence du milieu granulaire est donc capitale sur la dynamique du doigt d’air.

Nous allons maintenant tenter de retrouver ces résultats expérimentaux à l’aide d’un modèle théorique simple du phénomène.

3 Modèle théorique

3.1 La loi de Darcy

Dans cette partie, nous exposons un modèle théorique simple permettant de décrire la dynamique d’ascension du doigt d’air dans notre dispositif expérimental jusqu’à la transition doigt/fracture.

Notre milieu granulaire étant immergé, nous nous plaçons dans le cas d’un problème d’hydrodynamique. Nous pouvons dans un premier temps évaluer le nombre de Reynolds dans notre milieu. Les vitesses d’ascension de l’air observées sont de l’ordre de quelques cm/s, la dimension du doigt d’air est de l’ordre du mm. La masse volumique d’un mélange eau/grain se situe proche de celle de l’eau en ordre de grandeur, c’est-à-dire 10^3 kg/m^3 . Enfin la viscosité dynamique η de notre milieu est de l’ordre de $10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ (son expression sera détaillée dans la partie suivante).

Avec ces valeurs, nous obtenons un nombre de Reynolds $Re = \frac{vL\rho}{\eta} \approx 1$. On peut donc se placer dans une dynamique à bas nombre de Reynolds pour l’étude. L’équation de base dans ce domaine est l’équation de Stokes :

$$\eta\Delta\vec{v} = \vec{\nabla}P - \vec{f}_v \quad (1)$$

avec \vec{v} la vitesse du fluide, P la pression et \vec{f}_v les forces volumiques agissant sur le fluide.

Lorsque l’on injecte de l’air dans de l’eau contenue dans une cellule de Hele-Shaw (2 plaques parallèles séparées d’une distance e petite), on montre que la vitesse moyenne du front d’air est décrite par la loi de Darcy :

$$\vec{v} = -\frac{e^2}{12\eta}(\vec{\nabla}P - \vec{f}_v). \quad (2)$$

Cette loi est habituellement utilisée pour l'étude des instabilités de Saffman-Taylor [9], dans ce cas on a alors $\vec{f}_v = \vec{0}$.

Notre cas est plus complexe car le dispositif est vertical, le poids de l'eau et des grains intervient alors dans \vec{f}_v . De plus, le milieu n'est pas composé d'un fluide mais d'un milieu granulaire immergé, nous allons voir qu'il peut être pris en compte dans le terme de viscosité.

3.2 Viscosité et compacité du milieu granulaire

La loi de Darcy a été obtenue en considérant uniquement le problème d'un point de vue hydrodynamique. Nous allons voir que les propriétés du milieu granulaire peuvent y être ajoutées à travers le terme de viscosité.

La rhéologie des suspensions colloïdales a été étudiée pour la première fois par Einstein en 1905. Pour une solution avec des particules en suspensions assimilées à des sphères dures dont la fraction volumique en solution est notée ϕ , Einstein a prédit une viscosité dynamique théorique de la solution de la forme [10] : $\eta = \eta_s(1 + 2,5\phi)$, avec η_s la viscosité dynamique de la solution.

Cette relation a été validée expérimentalement pour des fractions volumiques faibles de suspensions ($\phi < 3\%$). Durant ce dernier siècle, ce modèle de base a souvent été amélioré pour décrire les viscosités mesurées expérimentalement à des fractions volumiques supérieures. Parmi les nombreux modèles qui ont été développés, on peut citer les principaux :

- le modèle de Batchelor [11] : $\eta = \eta_s(1 + 2,5\phi + 7,6\phi^2)$ qui a été validé expérimentalement pour $\phi < 10\%$,
- le modèle de Krieger-Dougherty [12] : $\eta = \eta_s(1 - \phi/\phi_{\max})^{-2,5\phi_{\max}}$, avec ϕ_{\max} la fraction volumique maximale. Ce modèle reste valide pour des fractions volumiques $\phi < 40\%$,
- le modèle de Zarraga et al. [13] : $\eta = \eta_s \frac{\exp(-2,34\phi)}{(1 - \phi/\phi_{\max})^3}$, avec ϕ_{\max} la fraction volumique maximale. Ce modèle est adapté pour les fractions élevées. Il a été montré empiriquement qu'il reste valable pour des suspensions jusqu'à un peu plus de $\phi \approx 60\%$ [14].

La viscosité effective dans un milieu granulaire peut-être assimilée à celle d'une solution de suspension très dense. La fraction volumique des suspensions correspond alors à la compacité du milieu granulaire définie par :

$$\phi = \frac{\text{volume occupé par les grains}}{\text{volume total du milieu}}. \quad (3)$$

Afin de déterminer quel modèle serait le plus proche de notre expérience, nous avons déterminé la compacité de notre milieu pour les différentes tailles de grain. Pour cela nous laissons sédimenter des grains dans un volume prédéfini d'eau, l'augmentation du volume induite et leur masse volumique nous permettent d'en déduire la compacité initiale du mélange, notée ϕ_{ini} . Pour obtenir la compacité maximale sous contrainte mécanique ϕ_{max} , nous comparons le volume occupé par des grains lors d'un simple dépôt dans une éprouvette, à celui obtenu après avoir placée l'éprouvette sur un vibreur permettant des réarrangements entre grains et donc une compacité maximale. Après détermination pour chaque taille de grains, nous obtenons les compacités présentées dans la table 2.

Les compacités sont plus importantes pour les grains de petite taille.

Pour la gamme de compacité obtenue avec nos grains, la viscosité la plus proche de notre expérience est celle de Zarraga et al., bien que la compacité dépasse légèrement la valeur jusqu'à laquelle elle a déjà été vérifiée empiriquement. L'expression de la vitesse dans notre modèle s'écrit alors :

$$\vec{v} = -\frac{e^2}{12\eta_{\text{eau}}} \frac{(1 - \phi/\phi_{\max})^3}{\exp(-2,34\phi)} (\vec{\nabla}P - \vec{f}_v). \quad (4)$$

diamètre des grains	ϕ_{ini}	ϕ_{max}
$149 \pm 17 \mu\text{m}$	63,1 %	68,6 %
$205 \pm 33 \mu\text{m}$	61,6 %	67,8 %
$311 \pm 52 \mu\text{m}$	58,8 %	66,8 %

TABLE 2: Compacités minimales et maximales de nos 3 échantillons de grains mesurées expérimentalement.

3.3 Construction du modèle 2D

Les équations différentielles régissant la dynamique du doigt d'air seront résolues à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4-5, à partir d'un programme Matlab (fonction *ode45*). Le modèle est réalisé en 2D, nous étudierons d'une part la montée du front du doigt d'air $z(t)$, et d'autre part sa largeur $l(t)$. Pour cela, nous considérerons qu'à $t = 0$ les conditions initiales sont : $z = 0$ (le doigt commence son ascension) et $l = 0$ (il est de largeur nulle). On rappelle que la distance entre les 2 plaques de verre est notée e , le volume de la bulle à chaque instant est donc $V_{\text{bulle}} = zle$.

Évolution verticale

Lors de son ascension, nous pouvons considérer que le doigt d'air va compacter le milieu granulaire qui se trouve au-dessus de lui, comme représenté sur le schéma de gauche de la figure 9. Cette compaction joue un rôle primordial dans le terme de viscosité de Zarraga et al., et donc dans la vitesse d'ascension verticale. En considérant qu'à $t = 0$ (donc $z = 0$) le milieu granulaire a une compaction initiale ϕ_{ini} , on trouve par un calcul immédiat que lorsque le front du doigt d'air est à la hauteur z le milieu au-dessus de lui a une compacité $\phi_z = \phi_{\text{ini}} \frac{h_{\text{grain}}}{h_{\text{grain}} - z}$. La dynamique d'ascension est alors régie par une compétition entre deux forces agissant sur le front du doigt : le gradient de pression dans le doigt et le poids de la couche de grains au-dessus de lui.

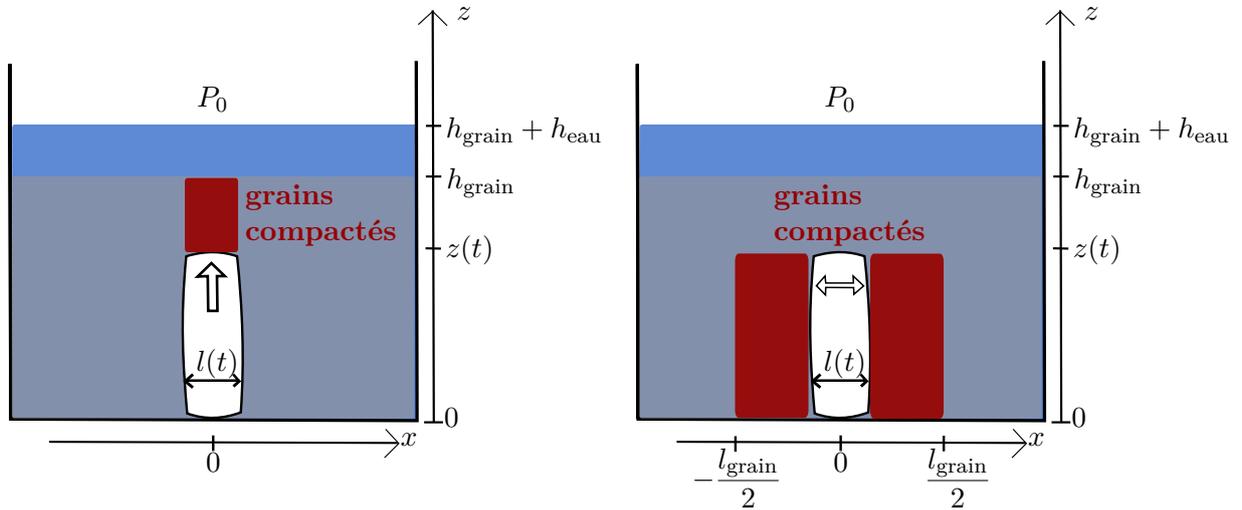


FIGURE 9: Schéma de la dynamique d'ascension en 2D du doigt d'air. Lors de son ascension verticale (à gauche), le doigt d'air comprime les grains situés au-dessus de lui. Lors de son extension latérale (à droite), seuls les grains situés dans la zone de largeur l_{grain} sont supposés comprimés.

Pour déterminer la dynamique du doigt, il faut étudier les forces qui s'exercent sur le milieu granulaire au-dessus de lui. Il apparaît un gradient de pression verticale entre l'air ambiant à la pression P_0 situé en $h_{\text{grain}} + h_{\text{eau}}$, et le front du doigt d'air en z à la pression P . En admettant que ce gradient est linéaire dans le milieu granulaire, on peut déduire l'expression d'un gradient $\vec{\nabla}P$ entre le doigt d'air en z et la pression hydrostatique à la surface du milieu en h_{grain} :

$$\vec{\nabla}P \approx \frac{P_0 + \rho_{\text{eau}}gh_{\text{eau}} - P(t)}{h_{\text{grain}} - z(t)} \vec{e}_z. \quad (5)$$

En considérant que l'air dans le système {tuyau+doigt} est un gaz parfait, la loi des gaz parfaits donne : $P.(V_{\text{tuyaux}} + e.l(t).z(t)) = nRT$. Or le contrôleur injecte de l'air à débit volumique Q fixé, la quantité d'air évolue alors telle que $\frac{dn}{dt} = \frac{Q}{V_{\text{mol}}}$ avec $V_{\text{mol}} = 24$ L/mol le volume molaire de l'air à 20°C. En prenant la différentielle de la loi des gaz parfaits, on obtient une équation différentielle sur la pression qu'il nous faudra résoudre :

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\frac{QRT}{V_{\text{mol}}} - P(t).e \left(l \frac{dz}{dt} + z \frac{dl}{dt} \right)}{V_{\text{tuyaux}} + l.z.e}. \quad (6)$$

Lors de l'ascension verticale du doigt d'air entre z et h_{grain} , en plus du gradient de pression, la colonne $h_{\text{grain}} - z(t)$ d'eau et de grains de compacité ϕ_z au-dessus du doigt supporte son propre poids. D'où l'expression de la force volumique :

$$\vec{f}_v = -\frac{g.l.e(h_{\text{grain}} - z)(\rho_{\text{grain}}\phi_z + \rho_{\text{eau}}(1 - \phi_z))}{e.l(h_{\text{grain}} - z)} \vec{e}_z = -g.(\rho_{\text{grain}}\phi_z + \rho_{\text{eau}}(1 - \phi_z)) \vec{e}_z. \quad (7)$$

Notons que la surpression dans le doigt est suffisamment importante pour que le doigt ne se scinde pas en plusieurs bulles mais au contraire que sa largeur augmente au cours de la montée. La mise en équation ne se réduit finalement qu'à un problème unidimensionnel de compression d'un milieu granulaire, sur lequel on applique une surpression.

L'équation différentielle que vérifie le front du doigt z est finalement :

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{e^2}{12\eta_{\text{eau}}} \frac{(1 - \phi_z/\phi_{\text{max}})^3}{\exp(-2,34\phi_z)} \left(\frac{P_0 + \rho_{\text{eau}}gh_{\text{eau}} - P(t)}{h_{\text{grain}} - z(t)} - f_v \right). \quad (8)$$

La condition initiale est prise telle qu'à $t = 0$, le doigt à la pression $P = P_i$ est en équilibre avec le poids de la colonne, d'où :

$$P_i = P_0 + gh_{\text{eau}}\rho_{\text{eau}} + gh_{\text{grain}}(\rho_{\text{grain}}\phi_{\text{ini}} + \rho_{\text{eau}}(1 - \phi_{\text{ini}})). \quad (9)$$

Évolution horizontale

On peut réaliser le même raisonnement que précédemment pour étudier l'évolution de la largeur du doigt d'air $l(t)$ au cours du temps. Lors de son ascension, le doigt va comprimer horizontalement le milieu granulaire à coté de lui, comme représenté sur le schéma de droite de la figure 9. En comparant la largeur du dispositif expérimental (≈ 40 cm) par rapport à celle du doigt (quelques millimètres), il est probable que seuls les grains proches du doigt soient comprimés lors de son ascension, par atténuation de l'onde de compression dans le milieu. Nous ferons cette hypothèse pour la suite, en notant l_{grain} la largeur de la zone sur laquelle les grains sont comprimés. Toute la difficulté du problème revient donc à déterminer sa valeur, ce qui ne pourra pas être réalisé juste à l'aide de nos acquisitions vidéos.

Par analogie avec l'évolution verticale, la compacité horizontale du milieu pour chaque coté s'exprime : $\phi_x = \frac{l_{\text{grain}}/2}{l_{\text{grain}}/2 - l/2}$. Le gradient de pression horizontal se calcule entre la surface latérale du doigt d'air et $l_{\text{grain}}/2$. Nous pouvons considérer qu'au premier ordre ce gradient est constant sur toute la hauteur du doigt, on a alors :

$$\left| \vec{\nabla}P(z) \right| = \frac{P_0 + g\rho_{\text{eau}}h_{\text{eau}} + g(\rho_{\text{grain}}\phi_{\text{ini}} + \rho_{\text{eau}}(1 - \phi_{\text{ini}}))(h_{\text{grain}} - z) - P(t)}{\frac{l_{\text{grain}}}{2} - \frac{l}{2}}. \quad (10)$$

L'équation différentielle que vérifie la largeur du doigt l est finalement :

$$\frac{dl(t)}{dt} = -\frac{e^2}{6\eta_{\text{eau}}} \frac{(1 - \phi_x/\phi_{\text{max}})^3}{\exp(-2,34\phi_x)} |\vec{\nabla}P| . \quad (11)$$

Nous avons également développé une seconde modélisation, plus complexe, de l'évolution horizontale l du doigt d'air. Celle-ci est basée sur le concept de zone fluide apparaissant dans le milieu granulaire après plusieurs ascensions [7], les calculs sont exposés en annexe E. Cependant, cette modélisation présente rapidement des divergences lors de sa résolution par notre programme Matlab et nous ne pourrions pas comparer les résultats obtenus avec nos mesures (voir la section 4.3). Nous nous restreindrons donc à notre modèle linéaire pour la suite.

Bilan

Au final, le système de 3 équations différentielles à résoudre par la méthode de Runge-Kutta est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz(t)}{dt} = -\frac{e^2}{12\eta_{\text{eau}}} \frac{(1 - \phi_z/\phi_{\text{max}})^3}{\exp(-2,34\phi_z)} \left(\frac{P_0 + \rho_{\text{eau}}gh_{\text{eau}} - P(t)}{h_{\text{grain}} - z(t)} + g(\rho_{\text{grain}}\phi_z + \rho_{\text{eau}}(1 - \phi_z)) \right) \\ \frac{dl(t)}{dt} = -\frac{e^2}{3\eta_{\text{eau}}} \frac{(1 - \phi_x/\phi_{\text{max}})^3}{\exp(-2,34\phi_x)} \frac{(P_0 + g\rho_{\text{eau}}h_{\text{eau}} + g(\rho_{\text{grain}}\phi_{\text{ini}} + \rho_{\text{eau}}(1 - \phi_{\text{ini}}))(h_{\text{grain}} - z) - P(t))}{l_{\text{grain}} - l} \\ \frac{dP(t)}{dt} = \frac{\frac{QRT}{V_{\text{mol}}} - P(t).e(l\frac{dz}{dt} + z\frac{dl}{dt})}{V_{\text{tuyaux}} + l.z.e} \end{array} \right. \quad (12)$$

Sa résolution devrait nous permettre de modéliser la hauteur et la largeur du doigt d'air au cours du temps jusqu'à la transition doigt/fracture. En effet, ce modèle n'est plus valable à partir de la transition car la fracture du milieu granulaire ne permettra plus de l'assimiler à des suspensions denses uniformément réparties en solution. L'ouverture d'une fissure laisse échapper l'air entraînant la disparition du doigt.

Nous pouvons maintenant comparer notre modèle aux résultats expérimentaux.

4 Comparaison modèle/expérience

4.1 Modélisation pour un exemple particulier

Nous résolvons les équations différentielles précédentes avec notre programme, pour des grains de $205 \mu\text{m}$, $h_{\text{grain}} = 24 \text{ cm}$, $Q = 7,76.10^{-1} \text{ mL/s}$ sur un intervalle de temps de 10 s. La largeur de grains affectée par l'extension horizontale du doigt semble être visuellement de l'ordre de $l_{\text{grain}} \approx 10 \text{ cm}$ sur les acquisitions réalisées dans ces conditions. La modélisation obtenue de la hauteur du doigt d'air, de sa largeur ainsi que la pression au cours du temps sont présentées en figure 10.

En analysant l'allure des courbes, on voit que la hauteur et la largeur du doigt croissent rapidement aux temps courts, puis se stabilisent à une hauteur critique, tandis que la pression augmente quasi-linéairement sur tout l'intervalle de temps.

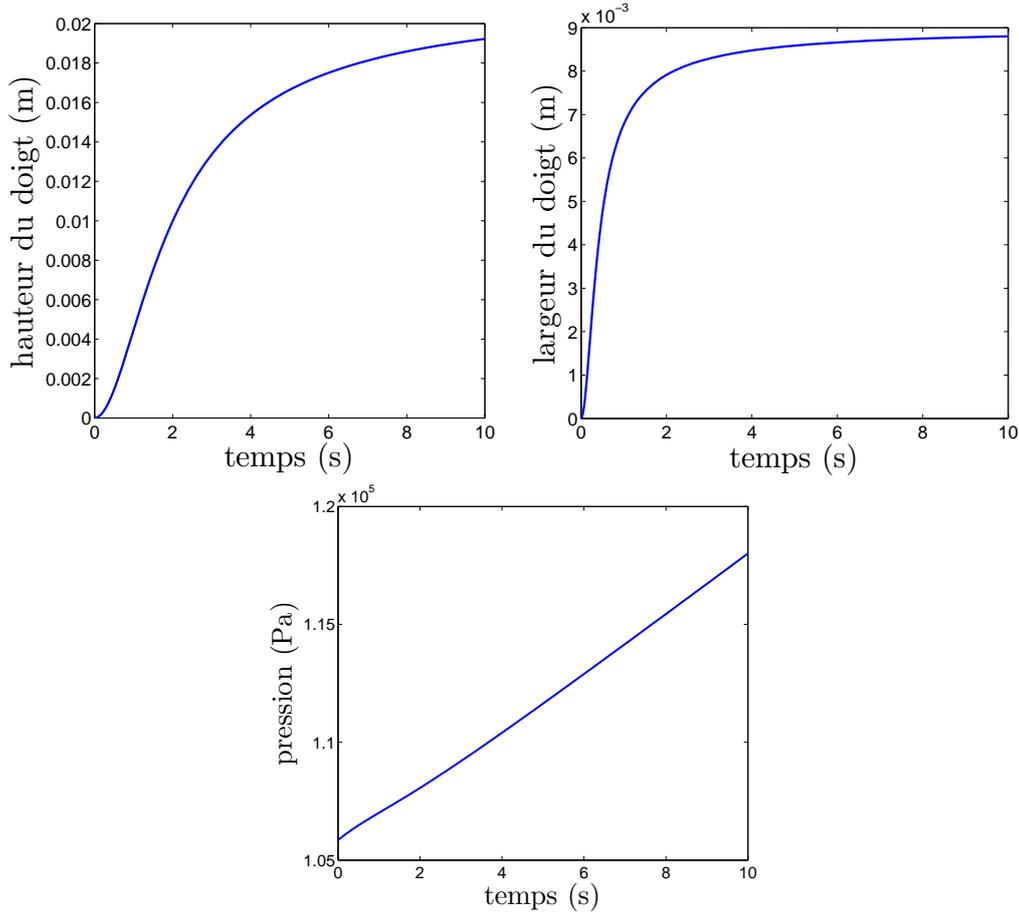


FIGURE 10: Modélisation des évolutions de la hauteur du doigt d’air (en haut à gauche), de sa largeur (en haut à droite), et de la pression absolue (en bas) au cours du temps, pour des grains de $205 \mu\text{m}$ avec $h_{\text{grain}} = 24 \text{ cm}$ et $Q = 7,76 \cdot 10^{-1} \text{ mL/s}$ sur un intervalle de temps de 10 s.

Cette stabilisation de z et l est cohérente avec la phase d’arrêt que nous obtenons expérimentalement avant la transition. Dans notre modèle, celle-ci provient du terme de viscosité de Zarraga et al. : lorsque le doigt s’élève et s’élargit, les compacités ϕ_x et ϕ_z du milieu granulaire augmentent et tendent vers ϕ_{max} , le terme en $(1 - \phi/\phi_{\text{max}})^3$ au numérateur de la vitesse fait alors converger z et l vers une valeur maximale finie où la compacité est maximale.

On définit la pression capillaire comme la surpression à dépasser pour que l’air puisse s’infiltrer entre 2 grains, elle est donnée par la loi de Laplace : $\Delta P \approx \frac{2\gamma}{R_{\text{pores}}}$, avec γ la tension de surface de l’eau ($\approx 70 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$) et R_{pores} la taille moyenne des pores du milieu granulaire. En ordre de grandeur, on évalue que la taille des pores est environ égale au dixième de la taille des grains. Pour nos grains de $205 \mu\text{m}$ de diamètre, la surpression est de l’ordre de $10^3 - 10^4 \text{ Pa}$. Cette surpression entre le doigt et le milieu granulaire est atteinte au bout de plusieurs secondes par le système.

La pression capillaire pourrait donc expliquer l’origine de la transition doigt/fracture. Au premier instant le doigt d’air monte et s’étend car la pression dans le système augmente. Puis il est ralenti lorsque la compaction du milieu granulaire tend vers ϕ_{max} , jusqu’à ce que la surpression atteigne la pression capillaire. L’air peut alors passer entre les grains et il se produit une fracture du milieu granulaire qui laisse s’échapper l’air.

Bien que l’évolution de ces courbes semble cohérente avec ce qui est observé expérimentalement, les valeurs obtenues ne concordent pas. Le modèle nous indique que la hauteur maximale du doigt dans cet exemple est d’environ 2 cm, alors que la figure 6 nous donne une valeur expérimentale d’environ 14 cm. Pour sa largeur, le modèle nous donne une largeur de 9 mm, alors qu’elle est observée à 7 mm en pratique.

De plus, ces hauteurs et largeurs d’équilibre ne dépendent que de h_{grain} , l_{grain} , et de la taille des

grains (à travers ϕ_{ini} et ϕ_{max}), alors que nous avons montré dans l'étude expérimentale qu'elles suivent aussi chacune une loi affine en fonction du débit Q . Nous allons voir que pour résoudre ce problème, il faut réétudier les acquisitions vidéos d'ascension du doigt d'air.

4.2 Retour à l'étude des ascensions

En étudiant nos acquisitions vidéos plus en détail, nous remarquons qu'en régime stationnaire lorsqu'un doigt d'air se forme à la base du milieu granulaire, le doigt d'air précédent n'est pas encore totalement sorti du milieu granulaire.

Nous avons analysé les différentes étapes qui se déroulent après une transition doigt/fracture dans le milieu en régime stationnaire, chaque étape est illustrée par une photo en annexe F :

- étape 1 : après une transition doigt/fracture, l'air contenu dans le doigt met un certain temps pour s'échapper à travers le canal formé par la fracture. Nous pouvons supposer que la pression dans le doigt diminue à cet instant car il est en contact avec l'air ambiant à P_0 .
- étape 2 : comme la pression dans le doigt chute, les grains en bas du milieu vont tendre par gravité à fermer la liaison entre le doigt et l'injection d'air, en se plaçant au-dessus du point d'injection. Le doigt précédent forme alors une « bulle » qui remonte, tandis que l'air injecté en continu à la base du milieu forme un nouveau doigt d'air.
- étape 3 : le nouveau doigt commence son ascension dans le milieu, mais il reste encore une partie de la bulle précédente dans le milieu granulaire qui se trouve au-dessus du doigt.

Comme la bulle occupe un certain volume dans le milieu, lorsque celle-ci va s'échapper le doigt d'air suivant pourra occuper ce volume par simple translation, sans comprimer le milieu granulaire au-dessus de lui. Il faudrait donc tenir compte des 2 phénomènes lors de l'ascension du doigt : la translation de la bulle et la compression du milieu. Après analyse des vidéos, cette hypothèse semble se vérifier car pour la plupart des ascensions la transition a lieu quelques dixièmes de secondes après la sortie de la bulle précédente. Notre modèle pour l'ascension z du doigt reste donc valable, mais il faudrait déterminer le volume occupé par la bulle à chaque instant dans le milieu.

En pratique, les formes des bulles produites sont trop complexes pour pouvoir mesurer leur volume avec un simple programme de traitement d'image. Pour tenir compte de ce phénomène complexe à modéliser, nous avons modifié notre modèle à partir des résultats obtenus expérimentalement. Nous obtenons alors un modèle semi-empirique.

4.3 Le modèle semi-empirique

Nous avons montré lors du traitement de nos acquisitions que la hauteur de fracture en régime stationnaire semblait suivre au premier ordre une loi affine de la forme : $z_{\text{fracture}} = aQ + b$, avec Q le débit d'injection, et a et b des coefficients dépendant uniquement de la taille des grains. De même pour la largeur du doigt d'air avant la transition : $l_{\text{fracture}} = cQ + d$, c et d ne dépendant que de la taille des grains. En considérant ces lois empiriques, nous pouvons modifier notre théorie pour obtenir un modèle semi-empirique.

Evolution verticale

Jusqu'à maintenant nous considérons qu'à chaque instant, le doigt d'air de hauteur z et de largeur l comprime une couche de grains d'une hauteur h_{grain} . Pour prendre en compte l'existence de la bulle au-dessus de lui, nous allons considérer un modèle 1D où la partie inférieure de la bulle se situe en z_{bulle} à $t = 0$ (départ de l'ascension). On suppose que la bulle s'évacue du milieu à une vitesse v constante, d'où son altitude à chaque instant : $z_{\text{bulle}} + vt$. Cette évolution est schématisée sur la figure 11.

À $t = 0$, les grains sont à la compacité ϕ_{ini} sur une hauteur : z_{bulle} . À t , le doigt comprime les grains, qui sont à la compacité ϕ_z , en même temps que la bulle continue à s'évacuer. Les grains occupent alors une hauteur : $z_{\text{bulle}} + vt - z(t)$, d'où :

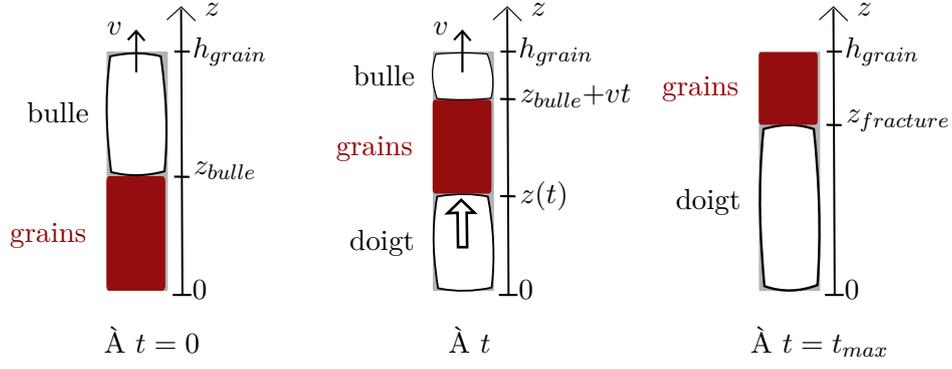


FIGURE 11: Schémas de l'évolution verticale semi-empirique. En s'élevant, le doigt comprime les grains au-dessus de lui, dans un même temps la bulle formée par le doigt d'air précédent s'échappe du milieu à une vitesse v supposée constante.

$$\phi_z = \phi_{\text{ini}} \frac{z_{\text{bulle}}}{z_{\text{bulle}} + vt - z(t)}. \quad (13)$$

À $t_{\text{max}} = \frac{h_{\text{grain}} - z_{\text{bulle}}}{v}$, lorsque la bulle est totalement sortie du milieu, on considère que le doigt a atteint sa hauteur maximale, la compacité du milieu est alors elle-aussi maximale ($\phi_z = \phi_{\text{max}}$). D'après notre loi empirique, la hauteur maximale du doigt correspond à la hauteur juste avant la fracture $z_{\text{fracture}} = aQ + b$. En l'injectant dans l'expression de la compacité, on a : $\phi_{\text{max}} = \phi_{\text{ini}} \frac{z_{\text{bulle}}}{h_{\text{grain}} - (aQ + b)}$.

On déduit : $z_{\text{bulle}} = (h_{\text{grain}} - aQ - b) \frac{\phi_{\text{max}}}{\phi_{\text{ini}}}$, l'expression de la compacité verticale semi-empirique sera finalement :

$$\phi_z = \frac{\phi_{\text{max}}(h_{\text{grain}} - aQ - b)}{\frac{\phi_{\text{max}}}{\phi_{\text{ini}}}(h_{\text{grain}} - aQ - b) + vt - z}. \quad (14)$$

La valeur de la vitesse de la bulle v pourra être approchée en comparant les modélisations obtenues avec des courbes expérimentales.

Evolution horizontale

Pour l'élargissement horizontal du doigt, le modèle semi-empirique va nous permettre de déduire l_{grain} , la largeur de grains affectée par la compression. Lorsque le doigt a atteint son élargissement maximal, la compacité horizontale peut s'écrire :

$$\phi_{\text{max}} = \phi_{\text{ini}} \frac{l_{\text{grain}}}{l_{\text{grain}} - (cQ + d)}. \quad (15)$$

On en déduit alors l'expression de l_{grain} :

$$l_{\text{grain}} = \frac{cQ + d}{1 - \phi_{\text{ini}}/\phi_{\text{max}}}. \quad (16)$$

4.4 Comparaison modèle semi-empirique/expérience

En insérant les lois empiriques dans notre programme, nous pouvons alors calculer l'évolution de z , l et de la pression pour notre exemple précédent d'ascension dans des grains de $205 \mu\text{m}$. Nous présentons sur la figure 12 les résultats d'une modélisation (en bleu), ainsi que ceux obtenus expérimentalement pour une ascension dans ces conditions expérimentales (en rouge).

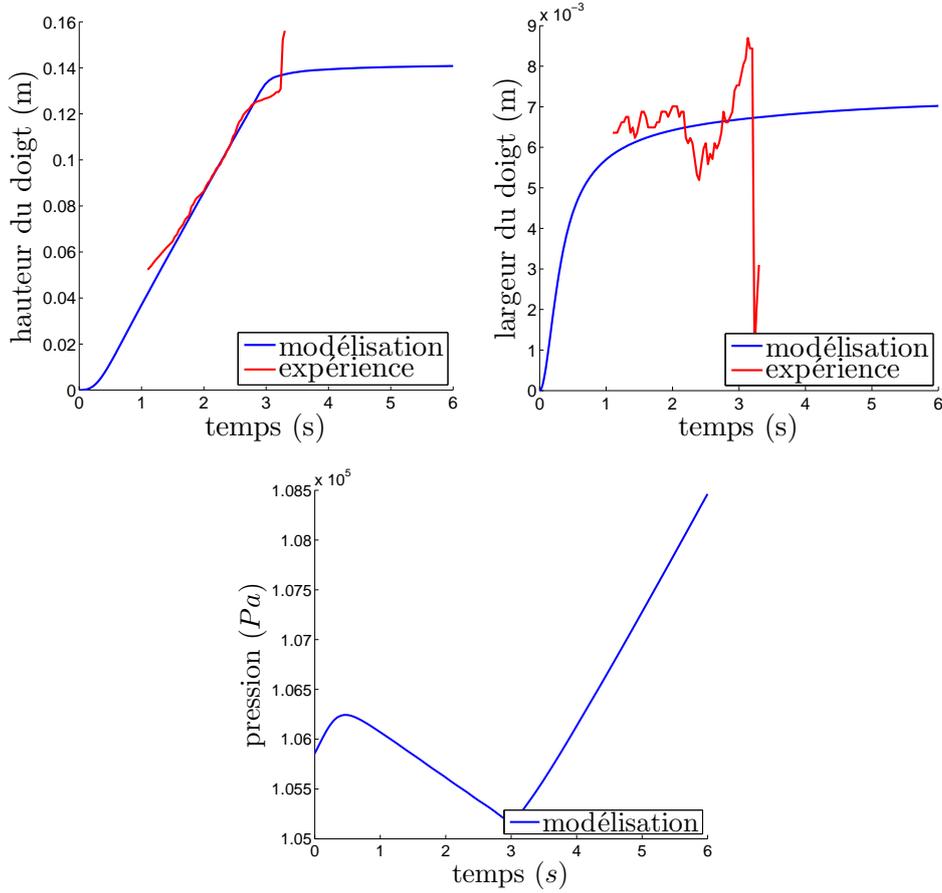


FIGURE 12: Comparaison du modèle semi-empirique (en bleu) et d’une ascension réalisée expérimentalement (en rouge). Nous avons tracé les évolutions de la hauteur du doigt d’air (en haut à gauche), de sa largeur (en haut à droite) et de la pression (en bas) au cours du temps, pour des grains de $205 \mu\text{m}$ avec $h_{\text{grain}} = 18 \text{ cm}$ et $Q = 8.10^{-1} \text{ mL/s}$ sur un intervalle de temps de 6 s.

Les évolutions mesurées expérimentalement (en rouge) ne commencent pas à $z = 0$, car on ne peut pas réaliser de mesures tant que la bulle précédente ne s’est pas séparée du doigt actuel. Le doigt a donc déjà commencé son ascension au début des mesures. Nous avons estimé que le temps écoulé entre le début de l’ascension et nos mesures est d’environ 1,8 s. Au cours du temps, la hauteur du doigt évolue presque linéairement jusqu’à la transition vers la fracture à $t = 4,0 \text{ s}$, tandis que sa largeur maximale est déjà atteinte au début des mesures, puis chute à la transition.

La modélisation (en bleu) prévoit que le front du doigt monte quasi-linéairement pendant 3,5 s, puis se stabilise proche de sa hauteur maximale. La largeur du doigt croît très rapidement pendant 1 s, puis plus lentement sur plusieurs secondes. Ces évolutions imposent une chute de la pression aux premiers instants, tant que le doigt est en extension, puis une croissance linéaire à partir de 3,5 s.

La vitesse de la bulle dans la modélisation est $v \approx 3,9 \text{ cm/s}$. Après plusieurs essais numériques, cette valeur semble être la plus proche des données expérimentales. La corrélation entre le modèle et l’expérience est bonne, en particulier pour l’évolution de la hauteur où il permet d’expliquer cette ascension linéaire. Notre modèle semi-empirique d’ascension du doigt à la suite d’une bulle semble donc être valable pour décrire les phénomènes observés. De plus, celui-ci nous permet d’évaluer l_{grain} la largeur de grain affectée horizontalement par la compression, et la vitesse moyenne v de la bulle par comparaison avec l’expérience.

Cependant, la chute de pression aux premiers instants est peu probable physiquement. Sur les courbes expérimentales, on voit que la fracture apparaît vers $t \approx 4,0 \text{ s}$. Or la modélisation indique qu’à cet instant la pression dans le système est à peu près équivalente à la pression initiale, la fracture du milieu granulaire par capillarité ne pourrait donc pas avoir lieu.

L’origine de ce comportement se trouve probablement dans la forte sensibilité de la pression aux

caractéristiques de l'expérience. Une variation de l'ordre de 10 % du *gap* entre les 2 plaques de verre, ou encore de la vitesse v de la bulle, change fortement le comportement de la pression qui peut alors devenir linéaire, ou au contraire augmenter la chute de pression. De plus, nos observations de bulle s'échappant du milieu ne présentent pas forcément une vitesse v constante. Celle-ci tend même à accélérer vers la fin de l'ascension (probablement sous forme exponentielle), ce qui ne peut pas être pris en compte dans un simple modèle linéaire. Contrairement à la pression, les modélisations de la hauteur et de la largeur sont moins sensibles aux faibles variations de ces paramètres.

Pour conclure, notre modèle semi-empirique linéaire semble atteindre ses limites pour la modélisation de la pression dans le système. Cependant, celui-ci permet bien de prévoir les évolutions qualitatives, voire quantitatives, du doigt d'air, et en particulier ses propriétés à la transition vers la fracture du milieu.

4.5 Les limites du modèle

Notre modèle semi-empirique permet de corriger en grande partie l'influence de la bulle sur l'évolution du futur doigt d'air. Cependant, il existe d'autres phénomènes, plus complexes, qui ont une influence sur l'évolution du doigt et la transition doigt/fracture.

Parmi ceux-ci, on peut citer :

La compression des grains dans toutes les directions : lors des ascensions verticales, nous ne considérons que la compaction du milieu granulaire se trouvant verticalement au-dessus de lui, nous négligeons ici la compression du milieu sur les côtés due au mouvement des grains adjacents, et dont l'effet s'étend probablement sur quelques centimètres (apparition d'une couche limite). De même lors de l'élargissement du doigt, les grains situés au-dessus du doigt peuvent être affectés.

La compaction initiale réelle : après la formation de la bulle, lorsqu'un nouveau doigt apparaît, les grains qui se sont déposés au-dessus de celui-ci par gravité proviennent des grains latéraux comprimés. Le doigt d'air va alors les comprimer le long de l'axe central jusqu'à la fracture, puis la bulle les dispersera sur les côtés, et ainsi de suite. On a donc finalement un mouvement de convection des grains, tout cela en subissant plusieurs compression/détente [7]. Ce mouvement serait très complexe à modéliser, mais il se réalise sur une échelle de temps bien supérieure à celle d'une ascension de doigt, le négliger est donc justifiable. Cependant, la compacité initiale des grains au début de l'ascension est probablement légèrement supérieure à ϕ_{ini} , qui a été mesurée à partir d'une simple sédimentation des grains.

Les variations rapides de pression : lors de son ascension, le doigt d'air est relié aux tuyaux par l'intermédiaire d'un injecteur de 1 mm de diamètre. La surface de contact entre le doigt et les tuyaux est donc faible, celle-ci ne permet pas un équilibre immédiat de la pression entre les 2 volumes. Les variations rapides de pression dans le doigt sont donc limitées en pratique, ce qui n'a pas été pris en considération dans notre modélisation.

La validité de la loi de Darcy : la loi de Darcy dans une cellule de Hele-Shaw est supposée valide tant que les dimensions de l'écoulement sont au moins d'un ordre de grandeur supérieur au *gap* de la cellule. Dans notre cas, $e \approx 3$ mm tandis que notre doigt a une largeur moyenne de l'ordre de plusieurs millimètres à un centimètre. Sa validité pourrait donc être remise en cause pour certaines de nos conditions expérimentales, il faudrait alors rajouter un facteur multiplicatif à la vitesse.

Les non-linéarités : les non-linéarités sont probablement la plus grande source de divergence dans toute cette étude. Au niveau expérimental, les évolutions de z_{fracture} et l_{fracture} ont été considérées linéaires, bien que les incertitudes permettraient de les ajuster avec d'autres lois. Sur le plan théorique, nous avons considéré que les zones de grains compactées pendant l'ascension ainsi que la vitesse de la bulle sont linéaires au premier ordre. Cependant, il est plausible que les non-linéarités jouent un rôle non négligeable lors de l'ascension.

Conclusion

En conclusion, l'ascension de fluide dans un milieu granulaire immergé est un phénomène triphasique complexe, dont les applications en physique et géophysique sont nombreuses, bien que peu d'études aient été réalisées dans ce domaine.

Notre étude aura permis de caractériser les différentes dynamiques d'ascension de l'air, en fonction de 3 paramètres : le débit injecté, la hauteur de la couche de grains et le diamètre des grains. La recherche de la formation d'une poche d'air sous la surface des grains nous a conduit à étudier la transition entre un doigt d'air et la fracture du milieu.

Nous avons caractérisé la hauteur et la largeur du doigt d'air juste avant que la transition se produise, à l'aide de plus de 700 acquisitions vidéo réalisées et traitées numériquement. Nous en avons alors déduit des lois empiriques en fonction des 3 paramètres de notre expérience.

Pour retrouver les dynamiques d'ascension mesurées, nous avons proposé un modèle théorique basé sur la loi de Darcy en hydrodynamique et la viscosité d'une suspension fortement concentrée. Le modèle nous permet d'obtenir un système de 3 équations différentielles couplées pour l'ascension.

La résolution numérique de ce système ne permet pas de retrouver toutes les caractéristiques des ascensions qui ont été observées. Nous avons alors développé un modèle semi-empirique, en prenant en compte l'influence du débit injecté, et celle du doigt d'air précédent dans le milieu en régime stationnaire. Ce nouveau modèle permet une bonne description de l'ascension observée expérimentalement, bien qu'une comparaison quantitative avec l'expérience ne soit pas envisageable avec notre modèle linéaire.

Plusieurs perspectives sont à envisager dans ce domaine. Lors de cette étude, seule l'influence du débit d'air injecté sur l'ascension a été caractérisée avec précision. Les 3 hauteurs de la couche de grains et les 3 diamètres de grains utilisés ne permettent d'en déduire que des tendances. De nouveaux échantillons de grains et plus de mesures nous permettraient de déduire quantitativement leur influence. Un dispositif expérimental plus élaboré permettrait également d'étudier l'influence du *gap* entre les 2 plaques. De plus, toutes les ascensions ont été réalisées ici en imposant un débit d'air constant, il serait intéressant de voir si la dynamique diffère en imposant une surpression constante à la base du milieu granulaire.

Enfin, d'un point de vue théorique, il serait intéressant de développer un modèle plus élaboré pour l'ascension. La prise en compte des non-linéarités et des autres limites de notre modèle actuel permettrait une meilleure compréhension du phénomène, voire une caractérisation quantitative de la transition doigt/fracture.

Références

- [1] M. Hovland, M. Talbot, H. Qvale, S. Olaussen, and L. Aasberg. Methane-related carbonate cements in pockmarks of the north sea. *Journal of Sedimentary Petrology*, 88 :881–892, 1987.
- [2] H. Svensen, B. Jamtveit, S. Planke, and L. Chevallier. Structure and evolution of hydrothermal vent complexes in the karoo basin, south africa. *Journal of the Geological Society*, 163 :671–682, 2006.
- [3] A.L. Walters, J. Phillips, R.J. Brown, M. Field, T. Gernon, G. Stripp, and R.S.J. Sparks. The role of fluidisation in the formation of volcanoclastic kimberlite : Grain size observations and experimental investigation. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 155 :119–137, 2006.
- [4] R. Semer, J.A. Adams, and K.R. Reddy. An experimental investigation of air flow patterns in saturated soils during air sparging. *Geotechnical and Geological Engineering*, 16 :59–75, 1998.
- [5] C. Chevalier, A. Lindnera, M. Lerouxa, and E. Clementa. Morphodynamics during air injection into a confined granular suspension. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158 :63–72, 2009.
- [6] X.Z. Kong, W. Kinzelbach, and F. Stauffer. Morphodynamics during air injection into water-saturated movable spherical granulates. *Chemical Engineering Science*, 65 :4652–4660, 2010.
- [7] G. Varas, V. Vidal, and J.C. Géminard. Venting dynamics of an immersed granular layer. *Physical Review E*, 83 :011302, 2011.
- [8] G. Varas, V. Vidal, and J.C. Géminard. Morphology of air invasion in an immersed granular layer. *Physical Review E*, 16 :061302, 2011.
- [9] P.G. Saffman and G. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society A*, 245 :312–329, 1958.
- [10] A. Einstein. On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat. *Annalen der Physik*, 17 :549–560, 1905.
- [11] G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [12] I.M. Krieger and T.J. Dougherty. A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Journal of Rheology*, 3 :137–153, 1959.
- [13] I.E. Zarraga, D.A. Hill, and D.T. Leighton. The characterization of the total stress of concentrated suspensions of non-colloidal spheres in newtonian fluids. *Journal Of Rheology*, 44 :185–221, 2000.
- [14] C. Bonnoit, T. Darnige, E. Clement, and A. Lindnera. Inclined plane rheometry of a dense granular suspension. *The Society of Rheology*, 54 :65–79, 2010.

Annexes

Annexe A : calibration du contrôleur de débit

Pour réaliser la calibration du contrôleur volumique de flux d'air, nous relierons sa sortie à une éprouvette graduée de 100 mL remplie d'eau et orientée vers le bas. L'éprouvette est placée au-dessus d'un cristalliseur rempli d'eau de manière à garder l'eau dans l'éprouvette en la retournant. En injectant de l'air à un débit Q constant avec le contrôleur, le niveau de l'eau diminue dans l'éprouvette car elle est progressivement remplacée par de l'air.

Pour différentes tensions (de 0,5 à 4 V) appliquées au contrôleur, nous mesurons le temps Δt mis par l'air pour occuper un volume V de l'éprouvette. Le débit volumique dans les conditions normales de température et de pression est ensuite déduit par $Q = \frac{V}{\Delta t}$. La courbe expérimentale du débit obtenu en fonction de la tension appliquée sur le contrôleur est présentée sur la figure 13.

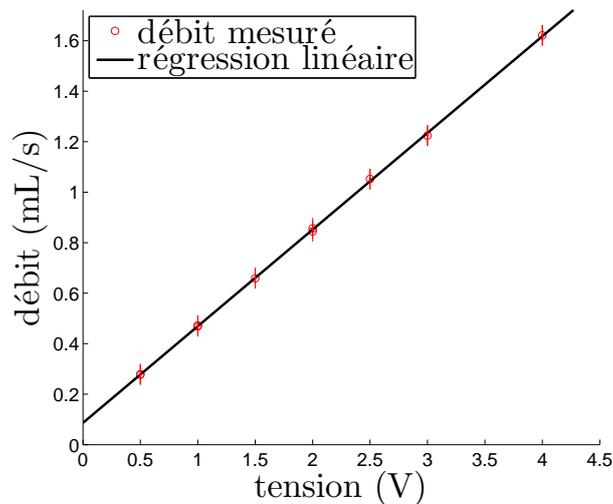


FIGURE 13: Débit volumique d'air injecté par le contrôleur en fonction de la tension appliquée à ses bornes. Par régression linéaire, on obtient la loi : $Q = 3,83(\pm 0,05) \cdot 10^{-1} V + 8,7(\pm 1,1) \cdot 10^{-2}$, avec un coefficient de corrélation $R^2 = 99,9\%$.

La loi qui lie Q à V est linéaire. Par régression linéaire, on obtient une calibration du contrôleur : $Q = 3,83(\pm 0,05) \cdot 10^{-1} V + 8,7(\pm 1,1) \cdot 10^{-2}$, avec un coefficient de corrélation $R^2 = 99,9\%$.

Annexe B : détermination du volume des tuyaux

Pour obtenir le volume des tuyaux flexibles V_{tuyaux} dans lesquels passe l'air avant d'être injecté sous le milieu granulaire, nous avons mesuré la variation de pression dans ceux-ci lors de l'injection d'air.

La mesure de la pression est réalisée en intégrant au montage un capteur de pression (FGP instrumentation P211, gamme : 0-350 mbar, résolution : 0,1 mbar) relié à une interface Labview, au niveau des tuyaux reliant le contrôleur de débit à la cellule de Hele-Shaw. Nous fermons à l'aide d'une pince l'injecteur à la base du milieu granulaire, l'air injecté par le contrôleur occupe alors uniquement V_{tuyaux} , ce qui a pour effet d'augmenter la pression dans les tuyaux.

En considérant que l'air est un gaz parfait, on a $PV_{\text{tuyaux}} = n_{\text{air}}RT$. Or le contrôleur injecte de l'air avec un débit volumique $Q \approx 0,469$ mL/s constant, la quantité d'air évolue alors telle que $\frac{dn}{dt} = \frac{Q}{V_{\text{mol}}}$ avec $V_{\text{mol}} = 24,79$ L/mol le volume molaire de l'air à 25°C. En prenant la différentielle de la loi des gaz parfaits, on obtient :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{QRT}{V_{\text{mol}}V_{\text{tuyaux}}} = \text{cste} . \quad (17)$$

En mesurant la pression dans le système après la pose de la pince, on obtient la courbe de la figure 14.

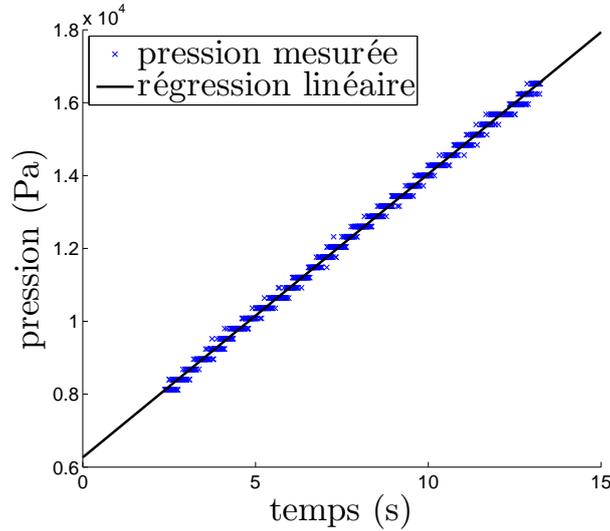


FIGURE 14: Évolution de la pression dans les tuyaux après fermeture de l'injecteur à la base du milieu granulaire.

La pression évolue bien linéairement avec le temps, en réalisant une régression linéaire sur la courbe, on obtient un coefficient directeur : $\frac{dP}{dt} = 778$ Pa/s.

A l'aide de la formule précédente, on déduit le volume des tuyaux : $V_{\text{tuyaux}} \approx 61$ mL.

Annexe C : étude expérimentale de la hauteur de fracture

L'étude expérimentale de la hauteur de fracture pour nos 9 conditions expérimentales est présentée sur la figure 15.

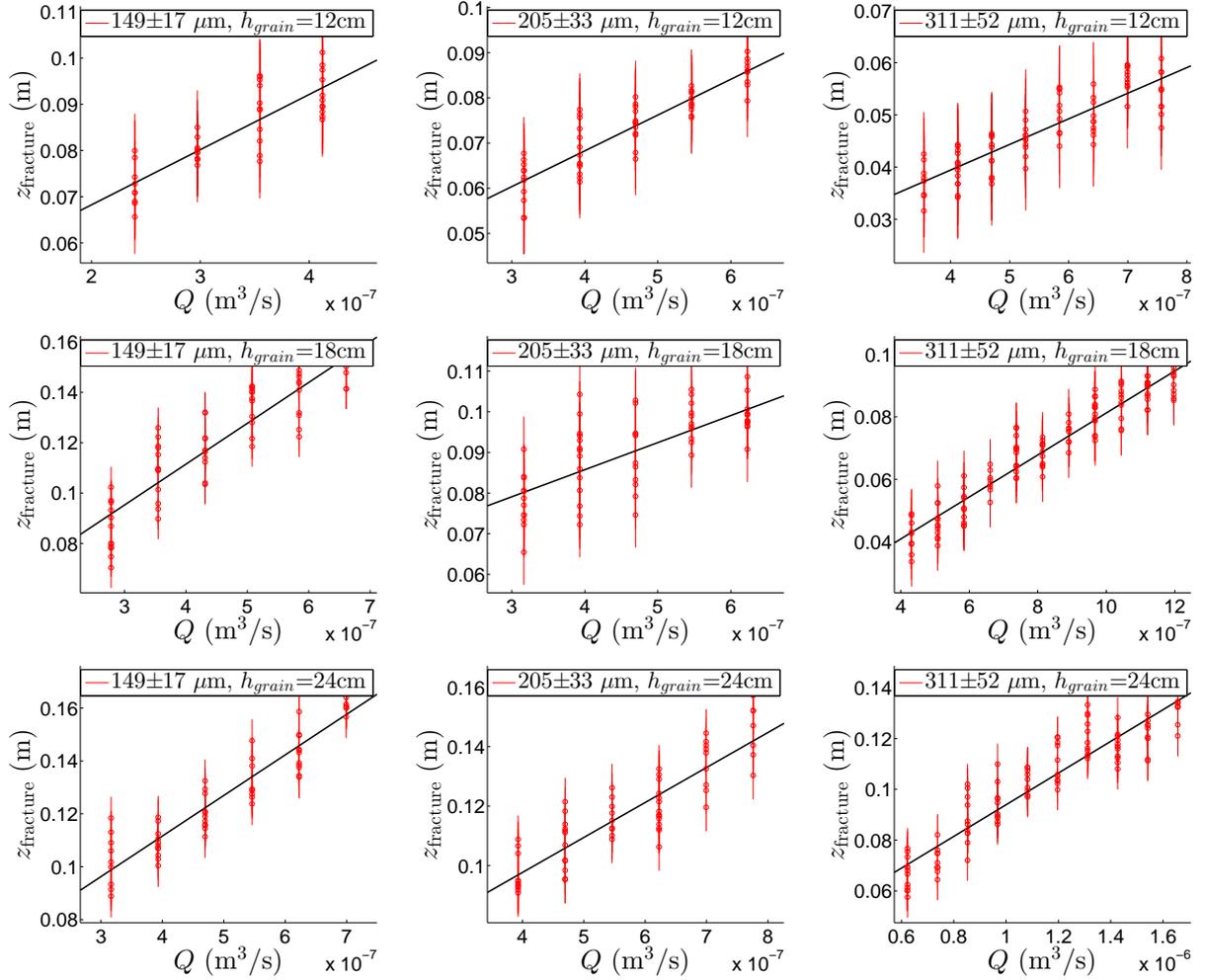


FIGURE 15: Hauteurs de transition doigt d'air/fracture dans le milieu granulaire en fonction du débit injecté, pour 3 hauteurs de grains et 3 diamètres de grains.

Les résultats de la régression linéaire pour toutes les courbes de la forme $z_{\text{fracture}} = aQ + b$ sont présentés sur la table 3.

taille des grains (μm)	h_{grain} (cm)	a (s/m^2)	b (m)	R^2
149	12	$1,2 \pm 0,2 \cdot 10^5$	$4,4 \pm 0,7 \cdot 10^{-2}$	0,84
149	18	$1,6 \pm 0,1 \cdot 10^5$	$4,7 \pm 0,4 \cdot 10^{-2}$	0,88
149	24	$1,5 \pm 0,1 \cdot 10^5$	$5,0 \pm 0,4 \cdot 10^{-2}$	0,93
205	12	$7,9 \pm 1,0 \cdot 10^4$	$3,7 \pm 0,5 \cdot 10^{-2}$	0,89
205	18	$6,7 \pm 0,9 \cdot 10^4$	$5,9 \pm 0,5 \cdot 10^{-2}$	0,71
205	24	$1,2 \pm 0,1 \cdot 10^5$	$5,1 \pm 0,5 \cdot 10^{-2}$	0,88
311	12	$6,7 \pm 0,7 \cdot 10^4$	$2,0 \pm 0,4 \cdot 10^{-2}$	0,85
311	18	$6,6 \pm 0,3 \cdot 10^4$	$1,4 \pm 0,3 \cdot 10^{-2}$	0,95
311	24	$6,2 \pm 0,2 \cdot 10^4$	$3,2 \pm 0,3 \cdot 10^{-2}$	0,93

TABLE 3: Résultats de la régression linéaire pour toutes les courbes de la forme $z_{\text{fracture}} = aQ + b$, avec R^2 le coefficient de corrélation de la courbe.

Annexe D : étude expérimentale de la largeur du doigt d'air

L'étude expérimentale de la largeur du doigt à la fracture pour nos 9 conditions expérimentales est présentée sur la figure 16.

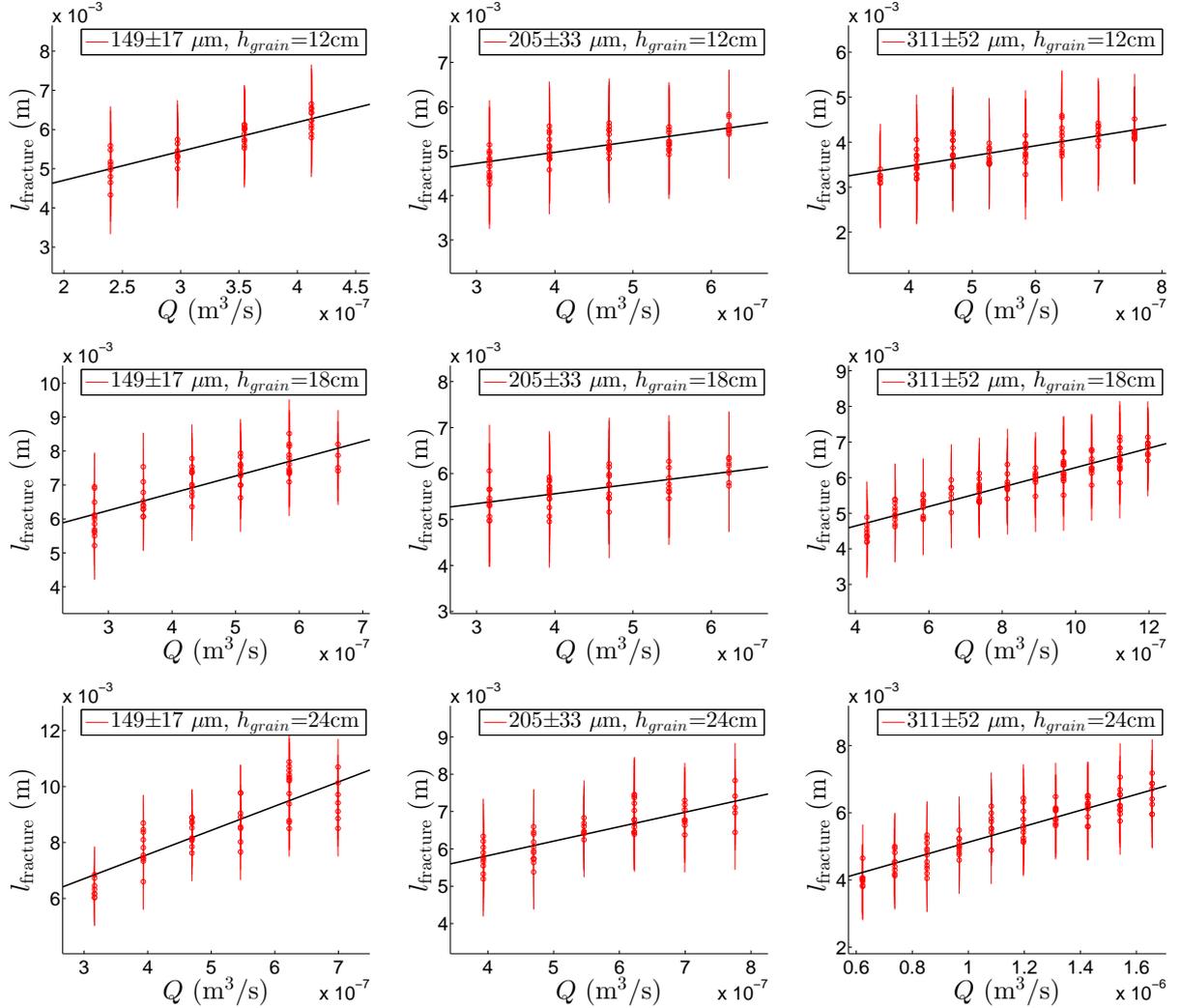


FIGURE 16: Largeur du doigt d'air avant la transition doigt/fracture du milieu granulaire en fonction du débit injecté, pour 3 hauteurs de grains et 3 diamètres de grains.

Les résultats de la régression linéaire pour toutes les courbes de la forme $l_{\text{fracture}} = cQ + d$ sont présentés sur la table 4

taille des grains (μm)	h_{grain} (cm)	c (s/m^2)	d (m)	R^2
149	12	$7,4 \pm 2,5 \cdot 10^3$	$3,2 \pm 0,8 \cdot 10^{-3}$	0,87
149	18	$5,1 \pm 1,1 \cdot 10^3$	$4,7 \pm 0,5 \cdot 10^{-3}$	0,81
149	24	$8,7 \pm 1,1 \cdot 10^3$	$4,1 \pm 0,6 \cdot 10^{-3}$	0,83
205	12	$2,5 \pm 1,2 \cdot 10^3$	$4,0 \pm 0,6 \cdot 10^{-3}$	0,71
205	18	$2,1 \pm 1,4 \cdot 10^3$	$4,7 \pm 0,6 \cdot 10^{-3}$	0,61
205	24	$3,9 \pm 1,1 \cdot 10^3$	$4,3 \pm 0,6 \cdot 10^{-3}$	0,79
311	12	$2,3 \pm 0,8 \cdot 10^3$	$2,6 \pm 0,5 \cdot 10^{-3}$	0,77
311	18	$2,7 \pm 0,4 \cdot 10^3$	$3,5 \pm 0,3 \cdot 10^{-3}$	0,91
311	24	$2,4 \pm 0,3 \cdot 10^3$	$2,7 \pm 0,4 \cdot 10^{-3}$	0,90

TABLE 4: Résultats de la régression linéaire pour toutes les courbes de la forme $l_{\text{fracture}} = cQ + d$, avec R^2 le coefficient de corrélation de la courbe.

Annexe E : modélisation de la zone fluide

Nous présentons ici une seconde modélisation possible de l'évolution horizontale du doigt d'air.

Lors des précédentes études sur ce dispositif [7], il a été observé qu'en régime stationnaire, une zone fluide de forme parabolique se forme par remontée successive de bulles d'air à travers la couche de grains immergés (figure 17). Les grains dans cette zone fluide peuvent être déplacés ou comprimés, tandis que ceux en dehors restent immobiles durant toutes les ascensions. Cette parabole, visible à l'oeil nu sur le dispositif expérimental, a pour équation $z_{para} = kx_{para}^2$, avec k un coefficient qui ne dépend que du diamètre des grains [7].

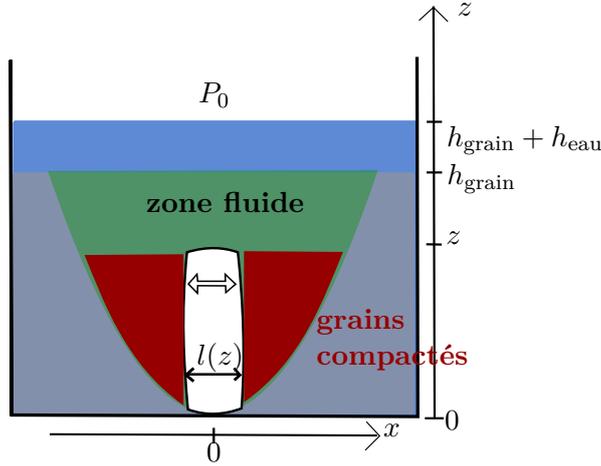


FIGURE 17: Modélisation de l'extension latérale du doigt d'air avec le concept de zone fluide, seuls les grains situés dans la zone fluide (en orange) sont comprimés.

À partir des acquisitions vidéos réalisées et pour chaque taille de grains, nous déterminons ce coefficient k (table 5).

diamètre des grains	k
$149 \pm 17 \mu\text{m}$	$46 \pm 2 \text{m}^{-1}$
$205 \pm 33 \mu\text{m}$	$37 \pm 2 \text{m}^{-1}$
$311 \pm 52 \mu\text{m}$	$35 \pm 2 \text{m}^{-1}$

TABLE 5: Coefficient k de l'équation de la parabole de la zone fluide pour nos 3 tailles de grains.

Nous pouvons déterminer la compacité ϕ_x des grains comprimés dans la zone fluide pour un doigt de hauteur z et de largeur l . Le volume initial de grains compressibles V_i est calculé à partir de l'aire comprise dans la parabole, on obtient :

$$V_i = 2x_{para}ze - e \int_{-x_{para}}^{x_{para}} dx.kx^2 = \frac{4z^{3/2}e}{3\sqrt{k}}. \quad (18)$$

On déduit ensuite la compacité : $\phi_x = \phi_{ini} \frac{V_i}{V_i - V_{doigt}} = \phi_{ini} \frac{1}{1 - \frac{3l}{4} \sqrt{\frac{k}{z}}}$.

Le gradient de pression horizontal se calcule entre la surface latérale du doigt d'air et le contour parabolique de la zone fluide. Considérons un doigt d'air dont le front est à la hauteur z , pour un élément de sa surface latérale dz' à l'altitude z' , le gradient s'exprime : $\vec{\nabla}P(z') \approx \frac{P_{para}(z') - P}{x_{para}(z') - \frac{l}{2}} \vec{e}_x$, avec $P_{para}(z')$ la pression dans le milieu granulaire à l'altitude z' :

$$P_{para}(z') = P_0 + g\rho_{eau}h_{eau} + g(\rho_{grain}\phi_x + \rho_{eau}(1 - \phi_x))(h_{grain} - z'). \quad (19)$$

En toute rigueur il faudrait calculer un gradient moyen en l'intégrant sur chaque élément dz' en prenant en compte sa distance par rapport à la parabole, mais il apparaît rapidement des problèmes mathématiques dans la résolution dus à des divergences aux alentours de $z' \rightarrow 0$. Nous allons alors approximer ce résultat en considérant que le volume de grains compressibles V_i est réparti de manière uniforme selon z' , c'est-à-dire que : $x_{para}(z') - \frac{l}{2} \approx \frac{(V_i - \frac{lze}{2})}{ze}$ est indépendant de la hauteur de notre élément de surface z' (mais dépend de z la hauteur totale du doigt). On obtient alors un gradient de pression horizontale moyen :

$$\left| \vec{\nabla} P_{moy}(z) \right| \approx \frac{1}{z} \int_0^z dz' \frac{P_{para}(z') - P(t)}{\frac{4}{3} \sqrt{\frac{z}{k} - \frac{l}{2}}} \quad (20)$$

$$\approx \frac{P_0 + g\rho_{eau}h_{eau} + g(\rho_{grain}\phi_x + \rho_{eau}(1 - \phi_x))(h_{grain} - \frac{z}{2}) - P(t)}{\frac{4}{3} \sqrt{\frac{z}{k} - \frac{l}{2}}} . \quad (21)$$

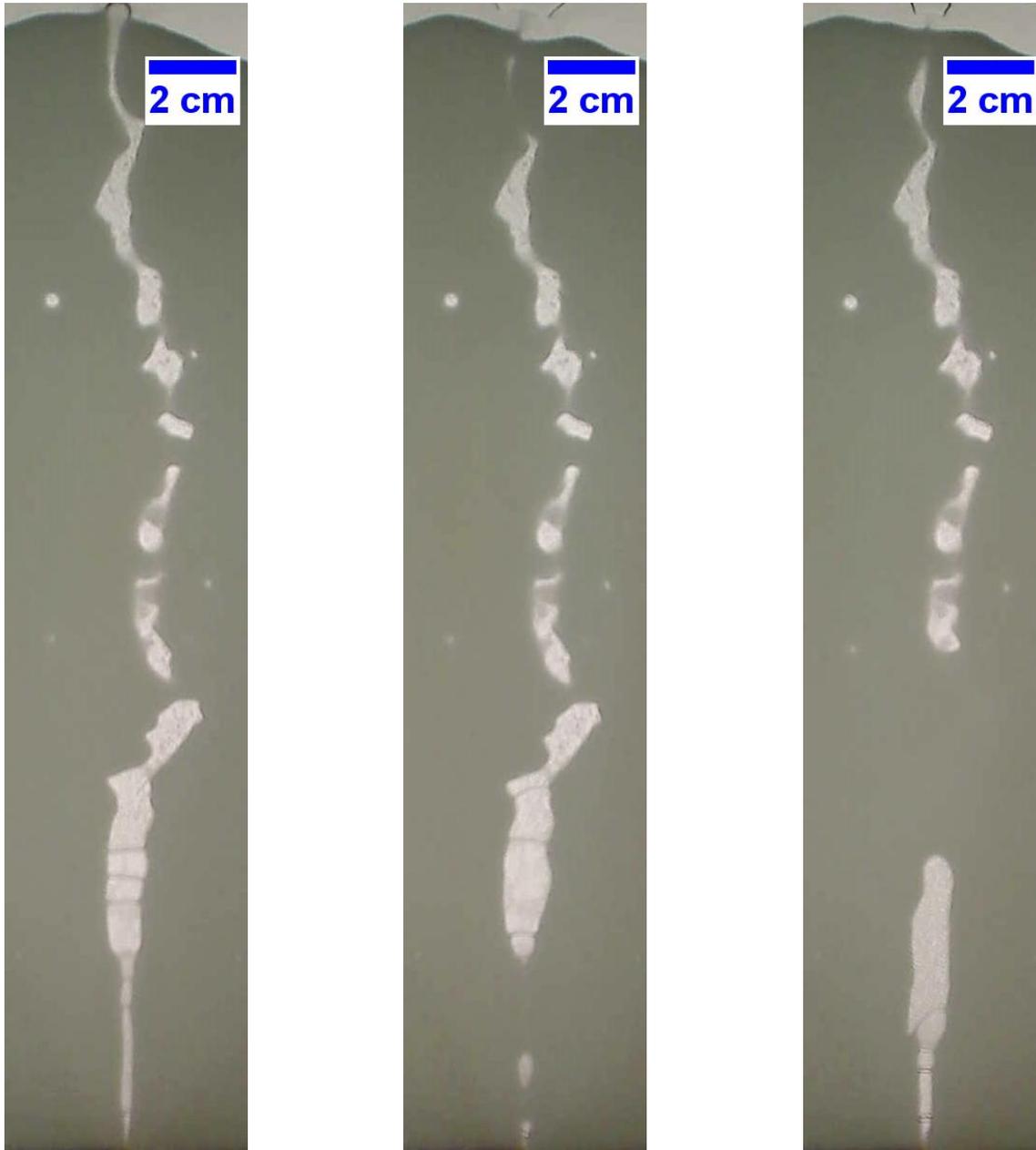
L'équation différentielle que vérifie l serait finalement :

$$\frac{dl(t)/2}{dt} = - \frac{e^2}{12\eta_{eau}} \frac{(1 - \phi_x/\phi_{max})^3}{\exp(-2,34\phi_x)} \left| \vec{\nabla} P_{moy} \right| . \quad (22)$$

Bien que plus complète, cette modélisation présente plusieurs problèmes, tels que des divergences en $z = 0$ et $l = 0$ lors de la résolution de l'équation différentielle sur l . De plus, la construction d'un modèle semi-empirique avec la prise en compte de la zone fluide n'est pas possible.

Annexe F : étapes après la transition doigt/fracture

Les différentes étapes qui se déroulent après une transition doigt/fracture (décrites dans la partie 4.2) sont visibles sur les photos de la figure 18.



étape 1 : l'air du doigt s'échappe après la transition doigt/fracture

étape 2 : la chute de pression dans le doigt le sépare de l'injecteur, il forme une bulle

étape 3 : le doigt suivant croît avec une bulle au-dessus de lui

FIGURE 18: Différentes étapes après une transition doigt/fracture.