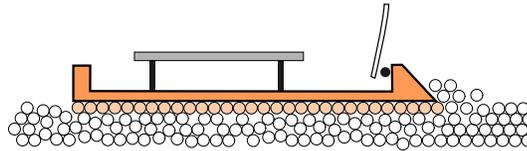


## Instabilités et fluctuations dans les écoulements granulaires

---



### Résumé

*L'étude du frottement entre un patin et un milieu granulaire a pris son essor dans les années 1990. Dans ce stage nous étudions les modes de déplacement d'un patin sur un lit de grains en fonction de plusieurs paramètres : sa masse, la raideur de la lame-ressort qui le tire, ou la vitesse à laquelle il est tracté. Le premier objectif est de caractériser la transition entre un mouvement par à-coups entre phases d'arrêt et phases de glissement (stick-slip) et un mouvement continu (steady-sliding). L'utilisation d'une table de translation assez longue permet d'étudier statistiquement les acquisitions de stick-slip obtenues, et d'envisager des paramètres pour caractériser la transition. Enfin, on montre que l'ajout de vibrations favorise la transition vers le régime de glissement continu.*

*Mots clefs : Granulaire, Stick-slip, Cisaillement, Steady-sliding*

Stage effectué sous la direction de **Valérie Vidal**  
co-encadré par **Jean-Christophe Géminard**.  
Laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon – UMR 5672  
✉ : 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07  
☎ : (+33) 4 72 72 83 75      ✉ : valerie.vidal@ens-lyon.fr



## Sommaire

	Page
Sommaire	c
Introduction	d
Remerciements	d
<b>I Problématique : à la recherche d'une transition <i>stick-slip</i> - <i>steady-sliding</i></b>	<b>1</b>
I.1 Les milieux granulaires utilisés . . . . .	1
I.2 Protocoles expérimentaux . . . . .	2
I.3 Vers un diagramme de phase de la transition <i>stick-slip</i> - <i>steady-sliding</i> . . . . .	4
I.4 Une amélioration nécessaire . . . . .	6
<b>II Analyse des signaux de <i>stick-slip</i>, caractéristiques et statistiques</b>	<b>6</b>
II.1 Signaux obtenus . . . . .	6
II.2 Quelles grandeurs d'intérêt? . . . . .	8
II.3 Traitement statistique des acquisitions . . . . .	10
<b>III Résultats obtenus : quel(s) paramètre(s) d'ordre de la transition?</b>	<b>13</b>
III.1 Recherche de la transition à raideur $k$ fixée . . . . .	13
III.2 Influence des autres paramètres du système . . . . .	16
III.3 Ajout contrôlé de vibrations dans le montage . . . . .	18
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>20</b>
<b>Références</b>	<b>20</b>
<b>Annexe A : Images de grains et détection des rayons</b>	<b>i</b>
<b>Annexe B : Étalonnage des capteurs et des lames.</b>	<b>ii</b>
<b>Annexe C : Modèle de <i>stick-slip</i> d'un solide sur une surface solide</b>	<b>iv</b>
<b>Annexe D : Photos du montage</b>	<b>vi</b>
<b>Annexe E : Phénomène de « washboard ».</b>	<b>vii</b>
<b>Annexe F : Simulations numériques.</b>	<b>viii</b>

## Introduction

---

Lorsqu'un patin est au contact d'un autre solide, le frottement peut être caractérisé par les coefficients de frottements statique  $\mu_s$  et dynamique  $\mu_d$ . Si le patin est translaté via un système apparenté à un ressort, on peut observer un régime instable dit de « *collé-glissé* » ou *stick-slip*, le patin n'avancant que par à-coups, lors des phases de glissement. En augmentant progressivement la vitesse de traction  $v_S$ , le patin se met à glisser, abandonnant toute phase de collage (*steady-sliding*). L'objet de ce stage est de mettre en évidence et de caractériser un phénomène similaire lors du contact avec des grains. Pour ce faire, on tracte un patin sur un milieu granulaire, de taille de grains variable, par contact avec une lame-ressort fixée sur une platine de translation. L'objectif est de rechercher un paramètre d'ordre caractéristique de la transition *stick-slip* vers *steady-sliding*, en s'intéressant aux distributions de différents paramètres régissant les phases de glissement et de collage. On s'intéresse également à l'influence d'une vibration imposée aux grains sur cette transition.

## Remerciements

---

Le stage s'est déroulé au sein du Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon (UMR 5672). L'équipe a été vraiment accueillante et bienveillante pendant mon travail au sein de l'unité.

Je remercie principalement Valérie, pour les heures passées devant un tableau face aux problèmes théoriques, et pour ses relectures nombreuses de ce rapport, prenant sûrement sur son temps de sommeil pour s'y atteler ; le tout dans une bonne humeur permanente, très agréable pour travailler.

Je remercie également Jean-Christophe, qui, en deux coups de cuiller à pot, déroule les calculs et les ordres de grandeurs, tout en suggérant un nombre incalculable d'améliorations et de perspectives pour l'expérience, intéressantes et captivantes.

Un grand coup de chapeau à Docteur Baptiste pour avoir pris le temps de peaufiner ses simulations malgré la soutenance de thèse qui s'approchait. Bon courage pour la suite !

Bravo également à Marc, de l'atelier des techniciens pour la création d'un nouveau patin en moins d'une semaine.

Merci à Vincent, co-stagiaire de M1, collègue de grains et d'expériences farfelues, ou de délires d'après-midi.

Merci à l'Éducation Nationale qui en fait voir de toutes les couleurs en ces moments de mutation vers un poste d'enseignant...

Merci à tous les collègues de l'ENS pour ces quatre années !

Merci à Robin, à M. et à Legoland.

Et puis, un grand merci à Romain d'être là.

## I. Problématique : à la recherche d'une transition *stick-slip* - *steady-sliding*

Le premier objectif de ce stage a été de mettre en évidence les deux régimes possibles de mouvement d'un patin de masse  $m$  au contact d'un milieu granulaire. L'un est une succession de phases de non-glissement (*stick*) et de glissement (*slip*). L'autre est un mouvement de translation continu (*steady-sliding*), sans aucune phase de *stick* apparente. De nombreuses publications sur le sujet [1–4] ont étudié le mouvement d'un patin sur un milieu granulaire, qu'il soit sec, immergé, sur des grains *mono-disperses* ou *poly-disperses*. Dans notre cas, nous avons privilégié l'étude de milieux granulaires secs, peu dispersés autour d'une taille de grains caractéristique (de l'ordre de quelques centaines de  $\mu\text{m}$ ). L'obtention d'un régime de *stick-slip* n'a pas été chose aisée, et le dispositif expérimental a dû être remanié de nombreuses fois avant de pouvoir l'atteindre.

### 1.1 Les milieux granulaires utilisés

On appelle *milieu granulaire* un milieu formé d'un ensemble de grains, de diamètres supérieurs à la centaine de  $\mu\text{m}$ . Ici, on utilisera un milieu « modèle » composé de billes de verre sphériques (*WHEELABRATOR*).

**États physiques.** Pouvant à la fois se comporter comme un solide (un tas de sable), un liquide (le sable d'un sablier), ou gazeux (une tempête de sable) – figure I.1, ces milieux ont du même coup des propriétés physiques différentes des fluides habituels, ou des solides indéformables.



(a) Solide.



(b) Liquide.



(c) Gazeux.

FIGURE I.1: Différents états physiques des milieux granulaires. Sources : <http://en.wikipedia.org/>

Dans le cas de grains d'une taille supérieure à une centaine de  $\mu\text{m}$ , on montre que l'on néglige les effets thermiques qui conduiraient à un mouvement brownien désordonné [5]. De plus, la densité élevée de particules dans un milieu granulaire conduit à privilégier l'étude de quantités moyennes, effectives, qui dépendent à la fois des propriétés réelles du matériau, et parfois de la géométrie des contacts entre les grains. Ce sera notamment le cas lors de l'étude d'un coefficient de frottement effectif, qui dépendra principalement de la géométrie du milieu granulaire.

**Hygrométrie.** La température ne joue pas de rôle dans l'agitation des grains au vu de leur taille. En revanche, le taux d'humidité de l'air, et principalement la fraction molaire de vapeur d'eau  $x_{\text{eau}}$  agit sur la cohésion du milieu granulaire. En effet, des ponts capillaires – créés suite à la présence de molécules d'eau condensées à l'état liquide – peuvent rendre le milieu plus cohésif. La présence d'un hygromètre mesurant le taux d'humidité  $\tau$  et la température  $\theta$  est devenue indispensable pour la reproductibilité des expériences<sup>1</sup>. La quantité d'intérêt  $x_{\text{eau}}$  est donnée par  $x_{\text{eau}} = \tau P_{\text{vap}}(\theta)/P_0$  où  $P_{\text{vap}}(\theta)$  est la pression de vapeur saturante de l'eau à la température  $\theta$ , et  $P_0$  est la pression atmosphérique. Les jours de beau temps,  $x_{\text{eau}} \sim 1,0\%$ , mais en cas de pluie  $x_{\text{eau}} \sim 1,5$  à  $2,0\%$ . Sauf indication contraire (III.2), les manipulations ont été effectuées par temps sec, et  $x_{\text{eau}} \sim 1,0\%$ .

<sup>1</sup>Vu les merveilleux mois d'avril et de mai que nous avons eu, le temps était très... cohésif.

**Notations et compacité.** Dans ce rapport, on notera  $d$  le diamètre moyen des grains utilisés, et  $\sigma_d$  l'écart-type de la distribution de diamètre du milieu étudié. On définit également la compacité  $\phi$  du milieu granulaire comme le rapport du volume occupé par les grains  $V_{\text{gra}}$  sur le volume occupé par l'empilement  $V_{\text{tot}}$ . Dans le cas d'un milieu sec, la masse de l'empilement  $m_{\text{tot}}$  est due pour quasi-totalité à la masse des grains  $m_{\text{gra}}$  qui le constitue. Alors, on peut introduire la masse volumique de l'empilement  $\rho$  telle que

$$\phi = \frac{V_{\text{gra}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{m_{\text{gra}}}{\rho_{\text{gra}}} \times \frac{\rho}{m_{\text{tot}}} \approx \frac{\rho}{\rho_{\text{gra}}},$$

où  $\rho_{\text{gra}} \approx 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  est la masse volumique du verre composant les grains.

**Mesures de dispersion.** Pour mesurer la dispersion en diamètre des grains, on prélève aléatoirement des échantillons que l'on observe sous un microscope (WILD MAKROSKOP M420, *HEERBRUGG*, objectif MAKROZOOM 1/5, *LEICA*). Les distributions ainsi trouvées sont données en **annexe A**. Un bilan des valeurs moyennes de  $d$  trouvées, ainsi que leur dispersion relative est présentée dans le tableau **I.A**. On obtient, en moyenne une dispersion relative de l'ordre de 10 %.

Jeu de grains (fournisseur), $\mu\text{m}$	160–200	315–400	615–800
$d$ ( $\mu\text{m}$ )	174	337	731
$\sigma_d$ ( $\mu\text{m}$ )	7	36	69
Dispersion relative $\frac{\sigma_d}{d}$	4,1 %	10,7 %	9,5 %

TABLE **I.A**: Dispersion en taille des grains utilisés.

## I.2 Protocoles expérimentaux

**Montage de cisaillement.** Le montage est schématisé figure **I.2**, et photographié en **annexe D** (figures **D.1** et **D.2**) Un bâti sur lequel est ancré une fine lame métallique se translate à vitesse constante  $v_S$ . Cette *lame-ressort* vient alors tirer le patin sur le milieu granulaire, et est du coup légèrement défléchie. Le contact entre lame et patin est ponctuel, grâce à une bille collée à l'avant de celui-ci. Les grains sont disposés dans une cuve de plexiglas, sur quelques millimètres de hauteur.

Les lames-ressort sont de fines lames de taille  $5 \times 1$  cm, coupées dans des plaques d'aluminium, allant de 0,1 à 0,5 mm d'épaisseur. Elles sont d'autant plus flexibles qu'elles sont fines. Une extrémité est en contact avec le patin, l'autre étant encastrée au niveau du bâti. La position du point d'encastrement est modifiable, ce qui permet de jouer sur la raideur effective des lames, à épaisseur fixée. La détermination de la raideur est décrite en **annexe B**. Le patin est fabriqué en plexiglas, et sa surface en contact avec les grains est de  $9 \times 6$  cm. On colle sous le patin une fine couche de grains de taille identique à ceux composant le milieu : on s'affranchit ainsi des effets du matériau composant le patin, et l'on n'étudie alors plus qu'un frottement grain sur grain.

**Capteurs.** Cinq capteurs inductifs (IPRM 12I9505/S14, *Baumer*) permettent d'avoir accès aux distances entre le bâti et les différents éléments du montage.

- Le premier,  $K_{\text{lame}}$ , mesure la distance qui le sépare de la lame ce qui permet d'en connaître la déflexion. Connaissant la raideur de celle-ci, on remonte du même coup à la force exercée par le patin sur la lame-ressort.

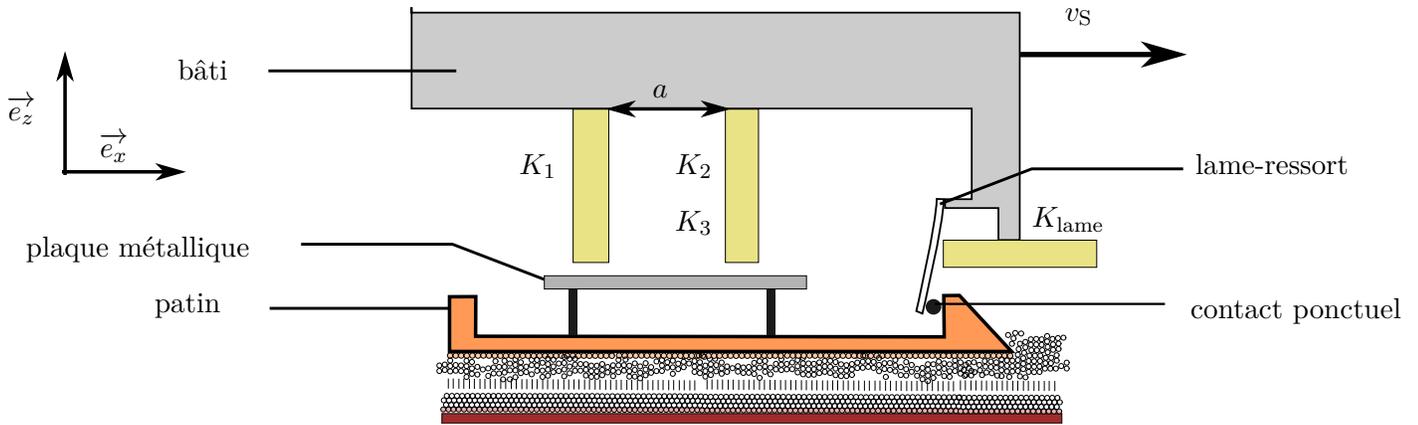


FIGURE I.2: Représentation schématique du dispositif de cisaillement. Le bâti avance à une vitesse constante  $v_S$ , et on a 5 capteurs inductifs :  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  (à l'arrière-plan) pour déterminer la position de la plaque métallique surplombant le patin, et  $K_{\text{lame}}$  pour déterminer la déflexion de la lame-ressort, et donc la force exercée par le patin sur celle-ci. Un capteur de référence  $K_{\text{ref}}$  est situé à l'arrière du bâti. Une photo du montage est donnée en figure D.2, annexe D.

- Trois autres capteurs ( $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$ ) permettent de détecter la position tridimensionnelle d'une plaque en aluminium ( $5 \times 5 \times 0,1$  cm) fixée sur le patin. Ainsi, on peut déterminer les variations d'altitude de ce dernier, ainsi que son *roulis* (mouvement de rotation autour de l'axe de translation) et son *tangage* (cambrage avant ou arrière du patin). L'utilisation d'un unique capteur vertical a déjà été utilisée précédemment, notamment pour observer des effets de dilatance [2–4, 6].
- A l'arrière de la table de translation, on a vissé une réglette de hauteur fixée. Un capteur de référence  $K_{\text{ref}}$ , lié à la table de translation et faisant face à cette réglette, permet de mesurer l'éventuel roulis du bâti qui se translate, et de corriger l'altitude mesurée par les capteurs  $K_i$ ,  $i \in \{1, 3\}$ .

Le principe de l'étalonnage des capteurs (distance – tension) est présenté en **annexe B**.

**Intérêt du montage.** L'originalité du montage réalisé pendant ce stage est, d'une part, la course laissée disponible pour l'avancée du patin. La table de translation permet de déplacer le patin sur environ 30 cm. Les anciennes réalisations expérimentales ne permettaient une translation que de 4 à 5 cm seulement. L'intérêt est donc, à partir d'une même condition initiale, de pouvoir multiplier les événements de *stick-slip* sur une même course du patin. On peut alors procéder à un meilleur traitement statistique des données, ce qui permet d'affiner les études quantitatives du phénomène. D'autre part, l'utilisation de trois capteurs inductifs au dessus du patin plutôt qu'un seul est une amélioration notable : on peut connaître le roulis et le tangage du patin en plus de son altitude.

**Limitations en translation.** Pour faire avancer le bâti le long de la table de translation, on utilise un moteur pas-à-pas (RS 440-458, *RadioSpares*), couplé à un réducteur 25/1 ou 50/1. Le couplage entre le moteur et la table est effectué via un accouplement à soufflet (MFB-20C, *NBC*) qui est rigide en torsion, mais élastique en compression, ce qui limite le bruit saccadé du moteur pas-à-pas dans la table de translation. Avec ce dispositif, on peut imposer des vitesses  $v_S \in [10 ; 300] \mu\text{m.s}^{-1}$ .

- La limite basse ( $10 \mu\text{m.s}^{-1}$ ) est liée à la fréquence des impulsions envoyées au moteur, qui doit être assez grande pour éviter de sentir des à-coups dans la vibration. Le plus grand réducteur adaptable que nous possédons, est celui de 50/1, ce qui limite la vitesse minimale.

- La limite haute ( $300 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) est liée à la fréquence maximale des impulsions supportées par le moteur. Au-dessus de cette fréquence (typiquement 400 Hz), le système mécanique entraîné n'arrive pas à suivre la vitesse de rotation, du fait de son inertie. L'utilisation d'un réducteur plus faible n'est pas non plus possible, le couple maximal supportable étant insuffisant pour mettre en translation la table sans abîmer le moteur<sup>2</sup>.

**Préparation de la couche de grains.** Les grains sont disposés au fond d'une cuve en plexiglas ( $50 \times 15 \times 4$  cm), sur une épaisseur d'environ 4 à 5 mm. Cette cuve est elle-même fixée sur une plaque métallique (en dural,  $62 \times 33 \times 2$  cm), sur laquelle est également vissée la table de translation. Le protocole de préparation de la couche de grains avant une mesure est le suivant : on mélange les grains avec un pinceau, puis avec une raclette (schéma en **annexe D**, figure **D.3**), on lisse la couche superficielle dans le sens du cisaillement. En quelque sorte, on « précisaille » la couche de grains. De cette manière, on arrive à obtenir des acquisitions reproductibles.

### 1.3 Vers un diagramme de phase de la transition *stick-slip* - *steady-sliding*

**Le phénomène de *stick-slip*.** Lors du contact d'un solide 1 sur un solide 2, les lois du frottement, énoncées par Coulomb et Amonton, précisent que :

- si  $T < \mu_s N$ , alors  $\vec{v}_g(1/2) = \vec{0}$  : il n'y a pas de glissement, on est en phase de *stick*,
- si  $\vec{v}_g(1/2) \neq \vec{0}$  (phase de *slip*), alors  $T = \mu_d N$  ;

avec  $\vec{v}_g(1/2)$ , vitesse de glissement du solide 1 par rapport au solide 2, ainsi que  $\vec{T}$ , force de frottement tangentielle et  $\vec{N}$ , force de frottement normale à la surface de contact entre les solides. Les coefficients  $\mu_s$  et  $\mu_d$ , respectivement de frottement statique et dynamique, sont, dans le cas de solides indéformables, des constantes dépendant uniquement de la nature des matériaux composant les solides.

On peut décrire théoriquement le mouvement d'un patin, tracté par un bâti via un ressort, qui évolue sur une surface solide, et dont les coefficients de frottement statique et dynamique sont donnés. Cette étude est détaillée dans l'**annexe C**. En figure **C.2** sont donnés les chronogrammes obtenus pour la force exercée par le ressort, et pour la position du patin. On voit que le patin a des phases d'arrêt : il reste collé (phase de *stick*), tandis que le ressort accumule de l'énergie en s'étirant. Une fois la force de traction suffisante, le patin est mis en mouvement, il glisse (phase de *slip*). Le ressort se recontracte alors, jusqu'à l'arrêt du patin, et le cycle recommence. On n'observe jamais de *steady-sliding* dans ce modèle théorique.

**Cas d'un milieu granulaire.** Dans le cas d'un milieu granulaire, le problème est plus complexe : le contact se fait sur plusieurs grains à la fois. Les lois d'Amonton-Coulomb sont conservées sur chaque contact grain/grain, mais ceux-ci sont susceptibles de se réarranger au fur et à mesure du déplacement du patin. Les coefficients de frottement du patin sur les grains ne sont plus constants et peuvent dépendre de la compacité  $\phi$  du milieu, c'est-à-dire de sa géométrie, ainsi que de la vitesse du patin.

Nasuno *et al.* [1] ont montré que l'on observait des régimes différents de mouvement du patin, selon la valeur des paramètres  $k$ ,  $m$  et  $v_S$ . La figure **I.3**, extraite de [1], montre les trois régimes de déplacement : *stick-slip*, dominance inertielle, et *steady-sliding*. À masse et raideur effective fixées, l'augmentation de la vitesse de translation permet de franchir successivement ces trois états. Cela suggère la possibilité d'établir un diagramme de phase, de paramètres  $v_S$  et  $k$  (en se plaçant à masse de patin fixée), détaillant les domaines d'existence de ces trois mouvements.

Une simulation numérique a été proposée par Lacombe *et al.* [7] dont le tracé, avec des paramètres explicitement choisis pour correspondre aux données de [1], est donné en figure **I.4**, accompagné des données expérimentales de ce stage et de Nasuno *et al.* Deux éléments sont incongrus. D'abord, certaines valeurs de couples ( $v_S, k$ ) où Nasuno *et al.* obtiennent un régime de *stick-slip* tombent dans le domaine de *steady-sliding* chez Lacombe *et*

<sup>2</sup>Le moteur avertissant alors de sa mort prochaine par un bruit d'agonie plutôt impressionnant.

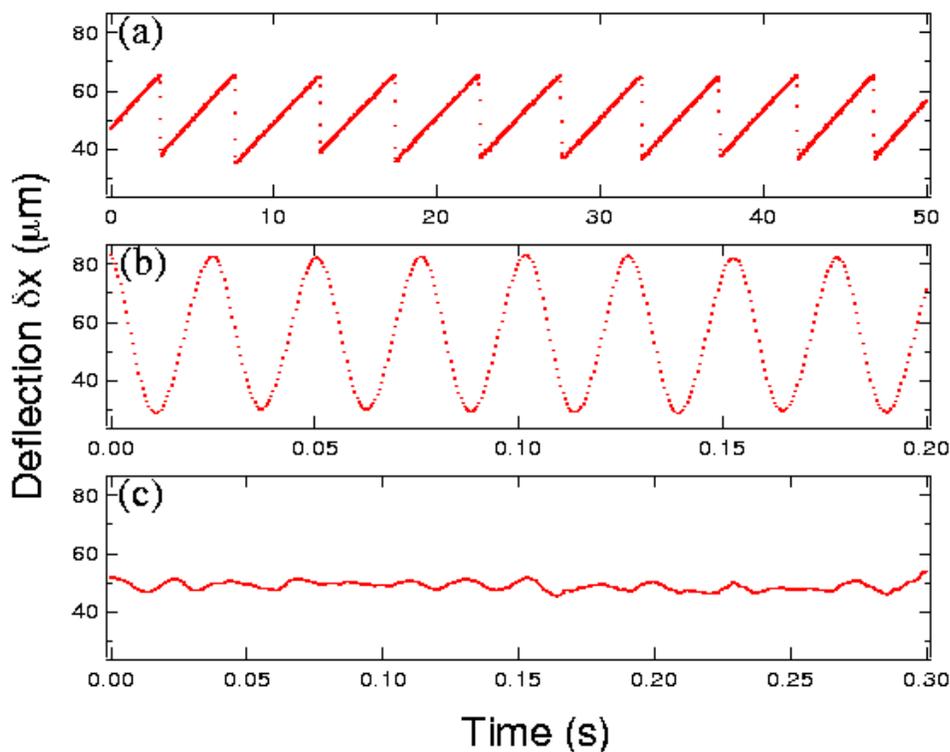


FIGURE I.3: Flexion de la lame-ressort en fonction du temps. Extrait de [1].

(a) Mouvement de *stick-slip* pour  $v_S = 5,67 \mu\text{m.s}^{-1}$ ; (b) Mouvement dominé par les effets inertiels pour  $v_S = 5,67 \text{ mm.s}^{-1}$ ; (c) Mouvement de glissement continu du patin pour  $v_S = 11,33 \text{ mm.s}^{-1}$ . Dans tous les cas  $k = 1077 \text{ N.m}^{-1}$  et  $m = 10,9 \text{ g}$ .

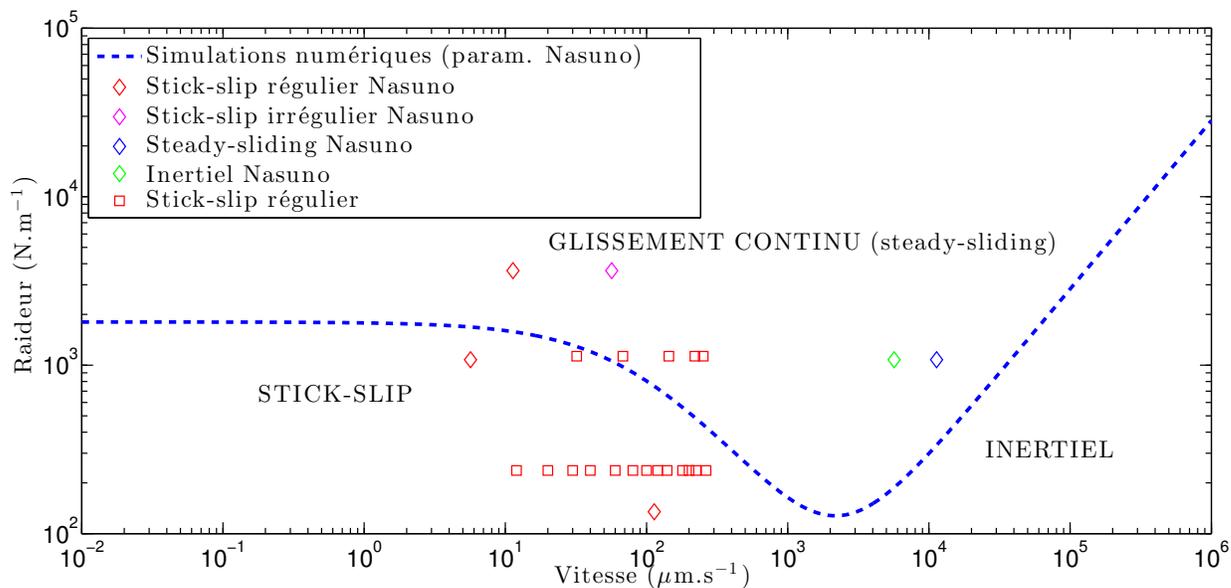


FIGURE I.4: Diagramme de phase  $(v_S, k)$  numérique proposé par Lacombe *et al.* [7], dont les paramètres sont choisis, apparemment, pour correspondre aux données de Nasuno *et al.* [1] représentées par des losanges. Cela ne semble pas correspondre. Nos points expérimentaux sont représentés par des carrés.

*al.* Ensuite, la transition vers le glissement continu ne se fait pas en passant par un régime inertiel, lorsqu'on augmente  $v_S$  à  $k$  constant mais dans le sens inverse. Cela démontre la difficulté théorique à modéliser les phénomènes de frottement sur un lit de grains.

Au début de ce stage, nous avons choisi les paramètres de l'expérience ( $m, k, v_S$ ) pour s'approcher au mieux des données de Nasuno *et al.* afin d'observer le régime de *stick-slip*. Pourtant, il était impossible d'obtenir le moindre arrêt du patin : nous ne trouvions qu'un glissement continu. C'est alors que nous avons modifié l'expérience dans l'espoir de voir ce fameux phénomène. Jusqu'à finalement réussir <sup>3</sup>.

## I.4 Une amélioration nécessaire

**Flottabilité.** La première idée a été de prendre en considération la flottabilité du patin, c'est-à-dire de choisir la surface et la masse du patin pour éviter un trop grand enfoncement naturel de celui-ci. Estimons l'énergie nécessaire à un grain pour se déplacer de sa taille :  $E_1 \approx \rho_{\text{gra}} d^3 g d = \rho_{\text{gra}} g d^4$ . Si le patin s'enfonce de la taille d'un grain, il perd une énergie  $m g d$ , ce qui, ramené à chaque grain en contact avec lui, vaut  $E_2 = mgd/N_{\text{contact}}$ , avec  $N_{\text{contact}} \approx S/d^2$  si  $S$  est la surface du patin. Si ces énergies sont équilibrées, le patin ne s'enfoncera pas trop rapidement. Le rapport des énergies vaut  $m/\rho_{\text{gra}} d S \approx 5$  dans le montage final ( $m = 33,2$  g,  $d = 337$   $\mu\text{m}$ ,  $S = 54$   $\text{cm}^2$ ). Initialement, le patin, en inox, avait une masse de 50 g, et une taille réduite ( $7 \times 4$  cm). Le rapport de flottabilité valait alors 20 environ. Le changement vers un patin en plexiglas a réduit cette valeur, et rendu au patin une meilleure flottaison. Cela n'a pas toujours permis d'observer du *stick-slip*.

**Vibrations** La seconde idée est venue suite à la mise en mouvement manuelle de la table de translation. On observe dans ce cas un régime de *stick-slip* très net. Les vibrations induites par le moteur sur la plaque en dural ont suffi à anéantir le *stick-slip*, en mettant légèrement en mouvement la couche de grains. Voilà un facteur de plus à rajouter dans un diagramme de phase ! La fixation du moteur au mur, afin de le découpler de la table sur laquelle repose l'expérience, a permis de s'affranchir de ce bruit. L'obtention des régimes de *stick-slip* a alors été plus aisée.

À partir de cette découverte, nous avons choisi d'étudier également l'influence des vibrations sur les régimes de mouvement du patin. Cela sera décrit plus amplement dans la partie III.3.

## II. Analyse des signaux de *stick-slip*, caractéristiques et statistiques

### II.1 Signaux obtenus

Pour chaque course du patin, on acquiert les signaux des différents capteurs, que l'on convertit en distances. On obtient alors à la fois :

- la flèche  $\Delta x$  de la lame, à partir de la tension délivrée par  $K_{\text{lame}}$  (figure II.1).
- pour chaque capteur  $K_i$ , la distance  $d_i$  qui le sépare de la plaque métallique sur le patin, ce qui permet de connaître :

– l'altitude moyenne du patin  $z = \frac{(d_2 + d_3)/2 + d_1}{2}$  (figure II.2a),

– l'angle de tangage  $\alpha = \tan^{-1} \left[ \frac{(d_2 + d_3)/2 - d_1}{a} \right]$  (figure II.2b),  $a$  étant défini figure I.2.

On prend soin au préalable de corriger les distances  $d_i$  obtenues en tenant compte du capteur  $K_{\text{ref}}$ . La reconstitution de la position du patin dans l'espace est donnée figure II.3. Le roulis du patin est totalement négligeable (de l'ordre d'une minute d'angle).

<sup>3</sup>au bout d'un mois et demi... :(

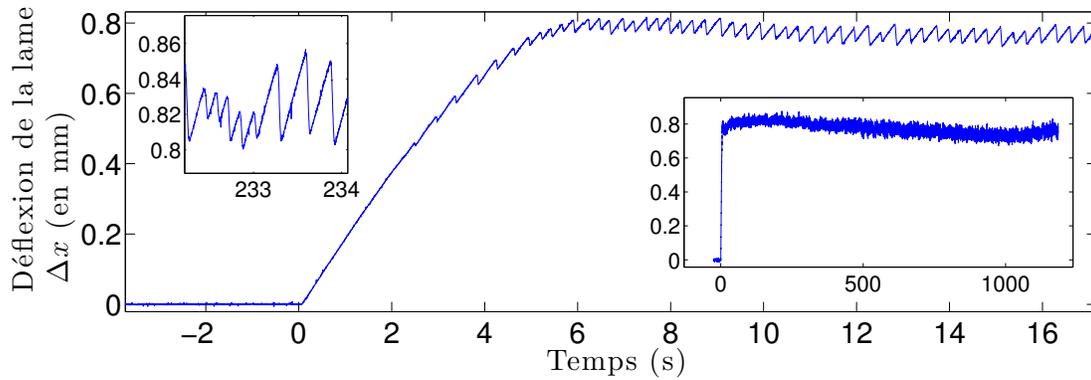


FIGURE II.1: Chronogrammes de la flèche  $\Delta x$ . On voit que le système commence les phases de *stick-slip* à partir d'une certaine valeur de flèche, donc de force. En encarts, le détail de plusieurs évènements de *stick-slip*, ainsi que le signal sur toute sa durée. **Paramètres** :  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $v_S = 200 \text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$ ,  $d = 337 \text{ }\mu\text{m}$ .

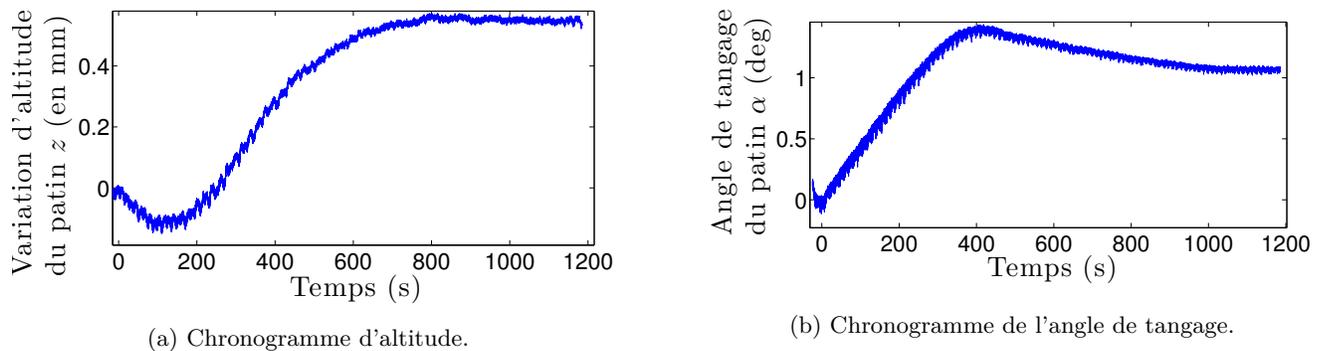


FIGURE II.2: Chronogrammes de l'altitude  $z$  du patin et de l'angle de tangage  $\alpha$ . On observe une variation d'altitude à très grande échelle. Cette variation est corrélée à l'évolution de l'angle  $\alpha$ .

**Paramètres** :  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $v_S = 200 \text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$ ,  $d = 337 \text{ }\mu\text{m}$ .

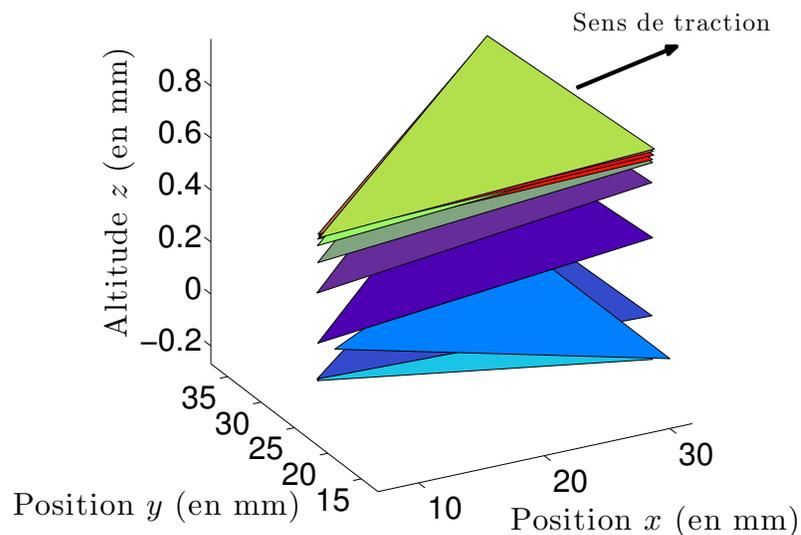


FIGURE II.3: Représentation du patin dans l'espace le long de sa course (de  $t = 0$  en bleu clair, à  $t_{\max} = 1200$  en rouge). La position  $x$  est dans le référentiel du patin.

**Paramètres** :  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $v_S = 200 \text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$ ,  $d = 337 \text{ }\mu\text{m}$ .

**Déflexion de la lame.** Dès que la lame entre en contact avec le patin, elle commence à fléchir. La flexion  $\Delta x$  vaut  $v_S t$  au début : le patin reste immobile à cause des frottements, la distance patin-bâti est seulement celle parcourue par le bâti. Ensuite, on quitte cette linéarité en temps, et la lame reste fléchie autour d'une valeur moyenne de l'ordre du millimètre. Dans ce régime, on observe les phases de *stick* où la flèche augmente linéairement en temps ; ainsi que les phases de *slip* où le patin avance plus vite que le bâti et la flèche diminue.

**Variation d'altitude.** À chaque mise en mouvement du patin, dans les phases de *slip*, le milieu granulaire se dilate et le patin monte (figure II.4). Cela est lié aux réarrangements des grains sous le patin. La mesure de l'altitude correspond donc aussi à une mesure de dilatance.

L'allure générale de la courbe d'altitude est en revanche plus compliquée à expliquer. L'observation de la dynamique du patin avec une caméra embarquée sur le bâti mobile a permis de montrer qu'il s'agit d'un phénomène à grande longueur d'onde. Le patin va charrier des grains, qu'il va accumuler sous forme de bourrelet devant lui jusqu'à passer par dessus : il crée alors une bosse. Ce phénomène est le même que celui qui apparaît lors du passage de voitures sur un chemin de terre : la succession des véhicules crée des rides de terre et le chemin est de moins en moins carrossable. Cette forme particulière vaut le nom donné à ces routes de « washboard roads »<sup>4</sup>. L'apparition de ces bosses a été étudiée par Baptiste Percier dans la cadre de sa thèse à l'ENS de Lyon [8]. Les images des simulations de notre montage expérimental, issues du code numérique implémenté par Baptiste, ainsi que des photos du patin sont données en **annexe E**.

## II.2 Quelles grandeurs d'intérêt ?

**Mise en équation du problème.** Le patin est soumis à quatre forces : son poids  $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$ , le rappel du ressort  $\vec{F} = k\Delta x \vec{e}_x$  ainsi que les forces de frottement  $\vec{N} = N \vec{e}_z$  et  $\vec{T} = -T \vec{e}_x$ , respectivement normale et tangentielle à la surface en contact avec les grains. Ces dernières correspondent à la résultante totale des frottements des grains en contact avec le patin. Les équations du mouvement s'écrivent, si  $x$  est la position du patin et  $z$  son altitude,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = k\Delta x - T = k(x - v_S t) - T \\ m\ddot{z} = N - mg \end{cases} .$$

Lorsque le patin est immobile (phase de *stick*),  $z$  est quasiment constant, et  $\ddot{z}$  est alors très petit devant  $g$ . On peut raisonnablement écrire  $N = mg$ . Le patin étant immobile ( $\ddot{x} = 0$ ), on a également  $T = k(x - v_S t) = F$ . On peut alors définir un paramètre  $\mu_{\text{eff}}$ , coefficient effectif de friction, qui est le rapport  $T/N$ , et qui croît linéairement avec  $t$  en phase de *stick* :  $\mu_{\text{eff}}^{\text{stick}} = \frac{k}{mg}(x - v_S t)$ , où  $x$  est fixé (patin collé).

En phase de glissement, les lois d'Amontou-Coulomb prédisent que sur chaque grain  $i$  en contact avec le patin, le coefficient  $\mu_D = T_i/N_i$  est constant. Le résultat n'est pas généralisable sur le coefficient effectif, car il dépend de la géométrie des grains et de leur agencement. Lors du *slip*, Nasuno *et al.* [1] ont montré que ce coefficient

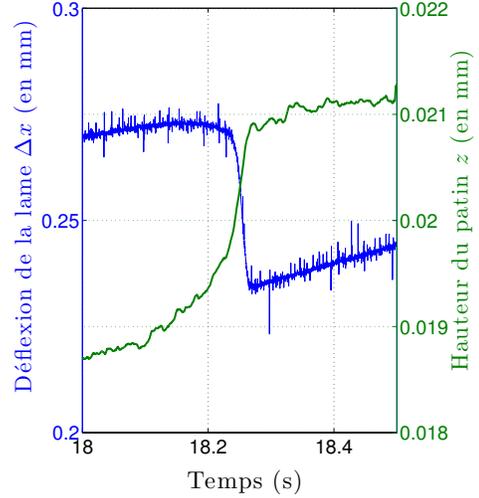


FIGURE II.4: Sur un évènement, chronogramme d'altitude et de déflexion de la lame.

**Paramètres :**  $k = 1130 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $v_S = 40 \mu\text{m.s}^{-1}$ ,  $d = 337 \mu\text{m}$ .

<sup>4</sup>qui vient de la forme des planches à laver, utilisées également comme instruments à percussion...

évaluait avec la vitesse du patin  $\dot{x}$  (cf. figure II.11 plus loin). On peut supposer qu'il dépend également de la compacité locale du système  $\phi(x)$ <sup>5</sup>. Ainsi,  $\mu_{\text{eff}}^{\text{slip}} = T/N \equiv \mu(\dot{x}, \phi(x))$

Pendant cette même phase, le patin peut avoir une accélération verticale non négligeable devant  $g$ . On a alors  $N = m(g + \ddot{z})$ . L'équation de mouvement du patin s'écrit donc

$$\ddot{x} = \frac{k}{m}(x - v_{\text{st}}t) - \mu_{\text{eff}}(g + \ddot{z}), \quad \text{d'où, de manière générale : } \mu_{\text{eff}} = \frac{\frac{k}{m}\Delta x - \ddot{x}}{g + \ddot{z}}.$$

**Traitement des signaux.** À partir de l'altitude  $z$  du patin, on peut calculer son accélération verticale  $\ddot{z}$  pour la comparer à  $g$ . Le résultat est donné en figure II.5. La valeur maximale atteinte par  $\ddot{z}$  est de l'ordre du  $\text{mm.s}^{-2}$ , négligeable devant  $g$ . Cela sera le cas dans toutes les expériences de ce stage.

On peut aussi récupérer la position  $x$  du patin, en calculant  $x = v_{\text{st}}t - \Delta x$ . On trace alors la vitesse  $\dot{x}$  du patin, ainsi que son accélération  $\ddot{x}$  (cf. figure II.6a). La prise en compte de  $\ddot{x}$  change faiblement  $\mu_{\text{eff}}$  : la figure II.6b présente son tracé dans les deux cas (avec  $\ddot{x}$  ou non), en négligeant toujours  $\ddot{z}$ .

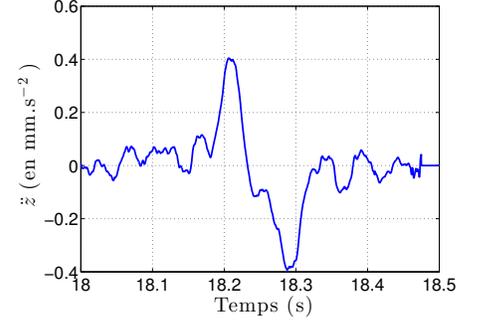
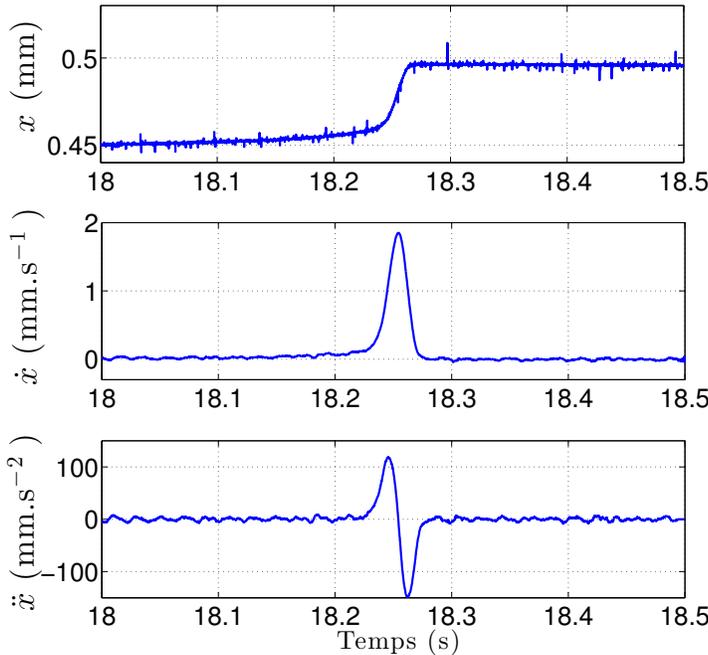
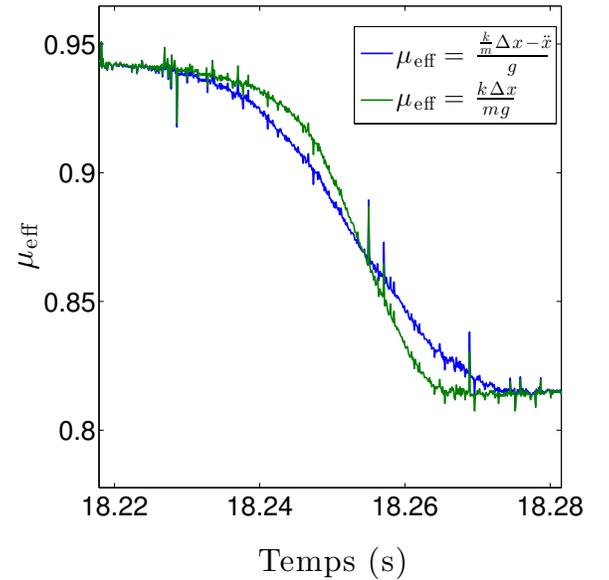


FIGURE II.5: Chronogramme de l'accélération verticale. Mêmes paramètres qu'en II.4.



(a) Position, vitesse et accélération.



(b) Deux tracés de  $\mu_{\text{eff}}$ .

FIGURE II.6: (a) Chronogramme de la position  $x$ , de la vitesse  $\dot{x}$  et de l'accélération  $\ddot{x}$  du patin. (b) Tracé de  $\mu_{\text{eff}}$  en tenant compte ou non de  $\ddot{x}$  dans son expression. Mêmes paramètres qu'en II.4.

Cette fonction  $\mu_{\text{eff}}$  sera notre paramètre d'étude car elle contient les informations sur la nature du milieu granulaire. Le traitement statistique des événements de *stick-slip* se fera donc avec  $\mu_{\text{eff}} = \left(\frac{k}{m}\Delta x - \ddot{x}\right)/g$ .

<sup>5</sup>A priori,  $\phi(x)$  est inversement proportionnel à  $z(x)$ , au sens où le patin repose sur le lit de grains. Dans un volume de surface au sol  $\Sigma$ , si on suppose le nombre de grains fixé,  $\phi \approx V_{\text{gra}}/(\Sigma z)$  si  $V_{\text{gra}}$  est le volume réel occupé par les grains.

### II.3 Traitement statistique des acquisitions

**Nombre d'évènements.** Lors de la course du patin le long de la cuve, le système va enchaîner de nombreuses phases de *stick-slip*. L'acquisition de  $\mu_{\text{eff}}$  sur l'intégralité du parcours permet d'étudier de nombreux paramètres, à des échelles statistiques importantes. La figure II.7 montre le nombre d'évènements de *stick-slip* en fonction de la vitesse de traction  $v_S$  pour une même distance parcourue  $L = 2,5$  cm. Sur la course totale du patin, dix fois plus longue, on peut s'attendre à un nombre d'évènements de l'ordre de 5 000.

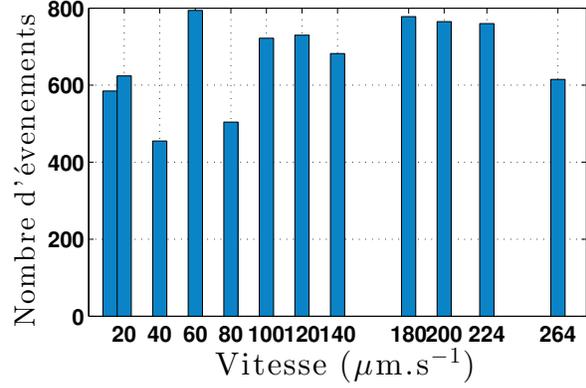


FIGURE II.7: Nombre d'évènements de *stick-slip* sur une distance  $L = 2,5$  cm pour différentes valeurs de  $v_S$ .

**Param.**  $k = 273$  N.m $^{-1}$ ,  $m = 33,2$  g,  $d = 337$   $\mu\text{m}$ .

**Détection des *slip* et *stick*.** La partie technique de l'analyse des signaux est de déterminer à quel instant on se trouve en phase de *stick* ou de *slip*. Le paramètre de détection choisi est la pente de la fonction  $\mu_{\text{eff}}$  au fil du temps. Grossièrement, lors d'un *slip* le paramètre  $\mu_{\text{eff}}$  diminue, et lors des *stick* il croît. Une étude systématique des changements de signe de la dérivée  $\dot{\mu}_{\text{eff}}$  permet d'avoir une localisation approchée des débuts et fins de chaque évènement. Cette étude doit cependant se faire sur une courbe fortement lissée, sous peine de détecter les changements de monotonie liés au bruit.

On affine la détection, en se plaçant dans une plage de temps proche des points relevés, et en déterminant ensuite, dans cet intervalle, l'extremum du signal non lissé (un maximum si on cherche un début de *slip*, un minimum pour une fin de *slip*). En figure II.8, on montre le résultat d'une telle détection sur un signal.

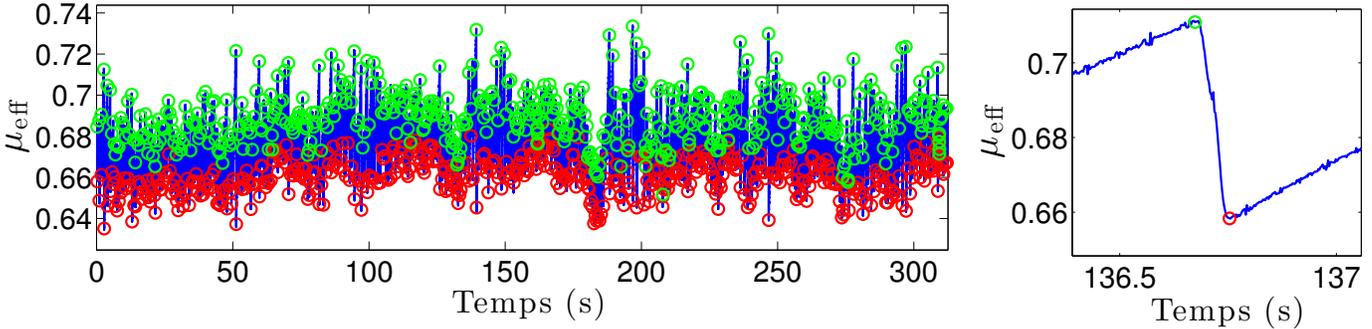


FIGURE II.8: Illustration de la détection des débuts de *slip* (cercles verts) et des fins de *slip* (cercles rouges) sur un extrait d'acquisition de  $\mu_{\text{eff}}$ . Longueur d'acquisition  $L \approx 25$  cm, pour une durée d'environ 50 min.

**Paramètres :**  $k = 273$  N.m $^{-1}$ ,  $m = 33,2$  g,  $v_S = 80$   $\mu\text{m.s}^{-1}$ ,  $d = 337$   $\mu\text{m}$ .

**Distributions d'intérêt.** Fort du nombre d'évènements obtenus sur une course du patin, on peut construire les distributions de plusieurs grandeurs d'intérêt :

- la valeur de  $\mu_{\text{eff}}$  atteinte lors du début de *slip*, que l'on notera  $\mu_{\text{max}}$ . C'est à chaque fois la valeur seuil atteinte pour la transition entre glissement et non glissement. Contrairement au cas solide-solide, où ce seuil  $\mu_s$  est constant, ici, du fait de l'agencement géométrique des grains, sa valeur peut fluctuer. La distribution des  $\mu_{\text{max}}$  pour l'acquisition précédente est donnée figure II.10a. Une proposition d'ajustement gaussien est donné dans cette même figure. On a  $\langle \mu_{\text{max}} \rangle = 0,688$  et  $\sigma_{\mu_{\text{max}}} = 0,017$ , soit une dispersion de l'ordre de 2%.

- la valeur moyenne de  $\mu_{\text{eff}}$  lors d'un *slip* que l'on notera  $\mu_{\text{moy}}$ . On la trouve en prenant la moyenne entre les valeurs de  $\mu_{\text{eff}}$  en début et en fin de *slip*. Dans le cas solide-solide, cette valeur moyenne est constante : elle correspond à la valeur moyenne autour de laquelle oscille  $\mu_{\text{eff}}$  pendant la phase de *slip*. De la même manière, dans le cas d'un contact multiple avec des grains, ce paramètre n'est pas forcément constant. La distribution des  $\mu_{\text{moy}}$  pour l'acquisition précédente est donnée figure **II.10b**, avec un ajustement gaussien où  $\langle \mu_{\text{moy}} \rangle = 0,677$  et  $\sigma_{\mu_{\text{moy}}} = 0,012$ , soit une dispersion de l'ordre de 2%.
- le temps  $\Delta t_{\text{slip}}$  mis par le patin pour s'arrêter. Dans le cas d'un frottement solide-solide, ce temps est une demi-période de sinus environ (voir **annexe C**), qui oscille à la pulsation du système mécanique  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Les paramètres expérimentaux donnent  $T/2 = \pi/\omega_0 \approx 0,04$  s dans notre cas. Le temps observé en figure **II.10c** est plus long que dans le cadre d'un frottement solide-solide. Le patin met donc plus longtemps à s'arrêter : cela vient probablement du mouvement des grains. On acquiert également  $\Delta t_{\text{stick}}$ , temps d'arrêt du patin et on construit la distribution du rapport  $r = \Delta t_{\text{slip}}/\Delta t_{\text{stick}}$ , utile par la suite.
- la distance  $\ell_{\text{slip}}$  sur laquelle évolue le patin pendant un *slip*. Sa distribution est donnée en figure **II.10d**. Elle est liée à l'amplitude du coefficient  $\mu_{\text{eff}}$ , c'est-à-dire à  $\mu_{\text{max}} - \mu_{\text{moy}}$ . En effet (en supposant  $\ddot{x}$  négligeable),

$$\mu_{\text{max}} - \mu_{\text{moy}} = \frac{\mu_{\text{max}} - \mu_{\text{min}}}{2} = \frac{k}{2mg} (v_{\text{st}} t_{\text{début}} - x_{\text{début}}) - \frac{k}{2mg} (v_{\text{st}} t_{\text{fin}} - x_{\text{fin}}) = \frac{k}{2mg} (\ell_{\text{slip}} - v_{\text{S}} \Delta t_{\text{slip}}).$$

Cela est clairement visible sur la figure **II.9**. La pente trouvée est de  $2,45 \cdot 10^3 \mu\text{m}$ , ce qui correspond à la valeur  $2mg/k \approx 2,4 \cdot 10^3 \mu\text{m}$ .

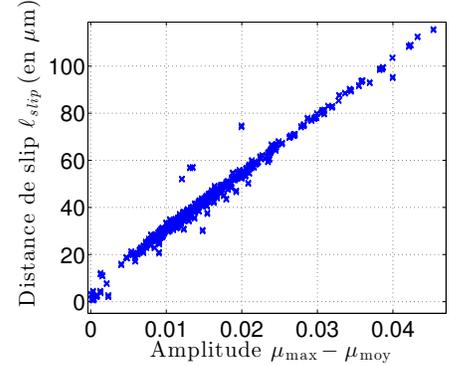


FIGURE **II.9**: Corrélation entre distance de slip et amplitude de  $\mu_{\text{eff}}$ . On trouve une pente de  $2,45 \cdot 10^3 \mu\text{m}$ .

Paramètres identiques à **II.8**.

**Comparaison à Nasuno *et al.* [1]** Si on compare les courbes obtenues avec celles de Nasuno *et al.*, on se rend compte que les distances parcourues par le patin pendant un *slip* sont bien plus faibles dans notre expérience. Dans [1],  $\ell_{\text{slip}} \sim 3d$ , ce qui assure un déplacement sur la taille de plusieurs grains. Dans notre cas  $\ell_{\text{slip}} \sim 0,1d$  : on reste globalement au contact des mêmes grains sur chaque évènement.

Quand on compare le coefficient de friction  $\mu_{\text{eff}}$  en fonction de la vitesse du patin  $\dot{x}$  le temps d'un *slip*, on comprend mieux la différence. La courbe issue de [1] est représentée en figure **II.11**, celle obtenue durant le stage en figure **II.12**. D'après [1], pendant la phase d'accélération, le coefficient de frottement diminue de manière monotone (de **B** à **C** ou **C'**), puis, pendant la décélération, il reste stable un instant pour tomber rapidement à sa valeur en **A**. Cela montre l'importance de l'histoire du mouvement du patin sur le coefficient  $\mu_{\text{eff}}$ . Dans notre cas, on n'explore pas une gamme de vitesse suffisamment large, et le diagramme obtenu se situe dans la partie en haut à gauche du diagramme de Nasuno. On n'atteint donc pas, sur chaque *slip*, cette phase de décélération où  $\mu_{\text{eff}}$  reste constant. L'humidité, ou bien la présence de vibrations résiduelles dans le système (bien plus grand que celui de Nasuno) pourraient en être la cause.

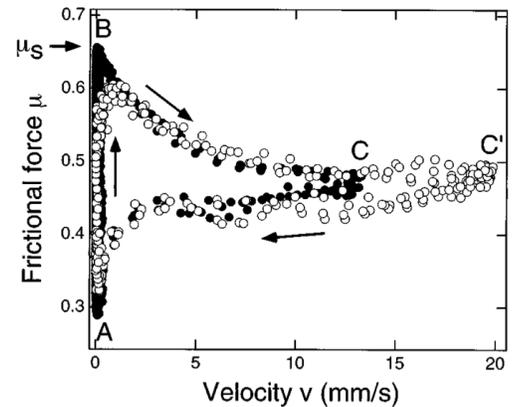


FIGURE **II.11**: Coefficient de frottement  $\mu_{\text{eff}}$  fonction de la vitesse du patin  $\dot{x}$  proposé par Nasuno *et al.* Extrait de [1]. **Param.**  $k = 135 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 10,9 \text{ g}$ ,  $d \approx 90 \mu\text{m}$ .  $\bullet$  :  $v_{\text{S}} = 113 \mu\text{m.s}^{-1}$ ,  $\circ$  :  $v_{\text{S}} = 5,667 \text{ mm.s}^{-1}$ .

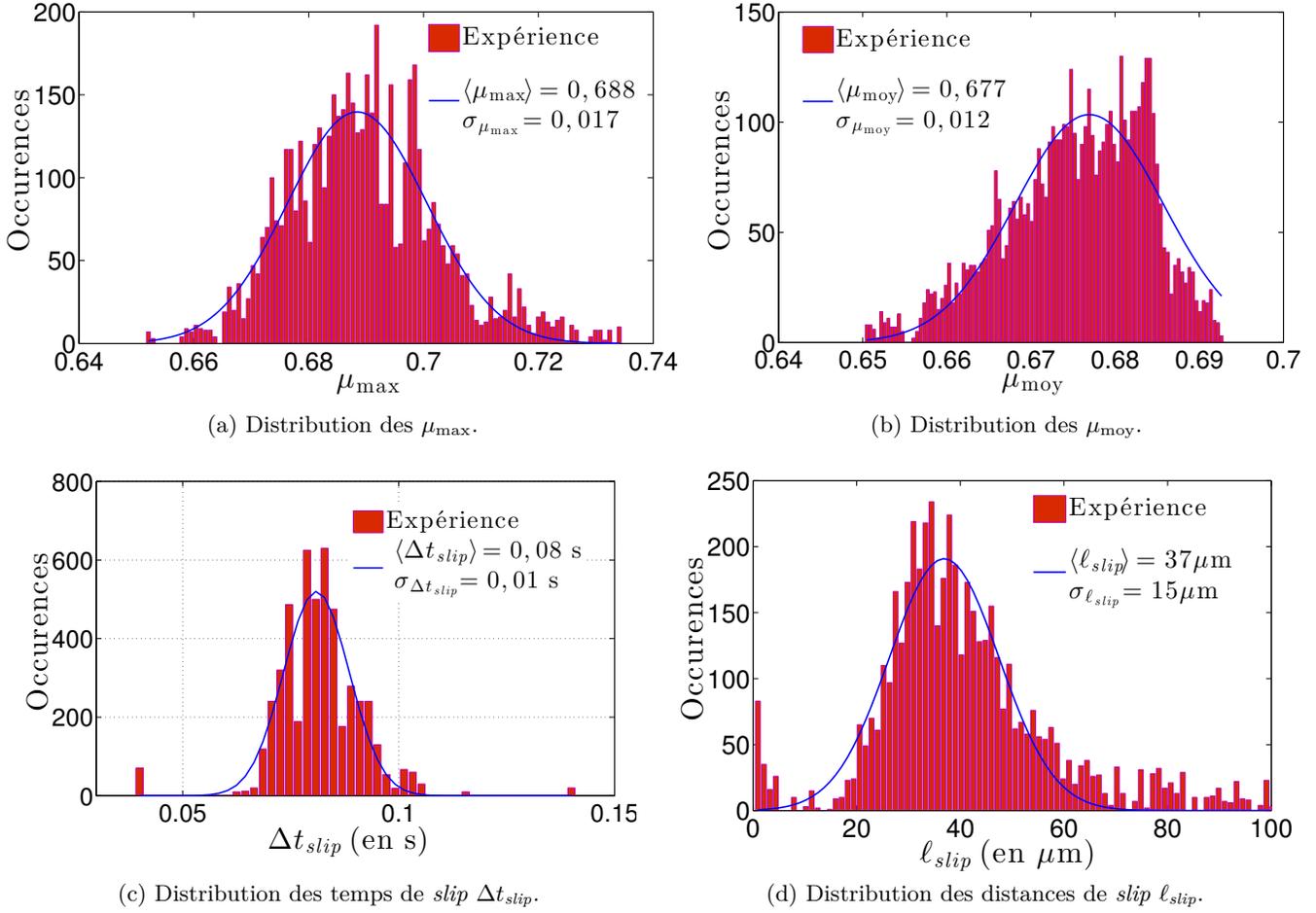


FIGURE II.10: Distributions des paramètres d'étude du *stick-slip*. Nombre d'évènements  $N \sim 5000$ . Paramètres identiques à II.8.

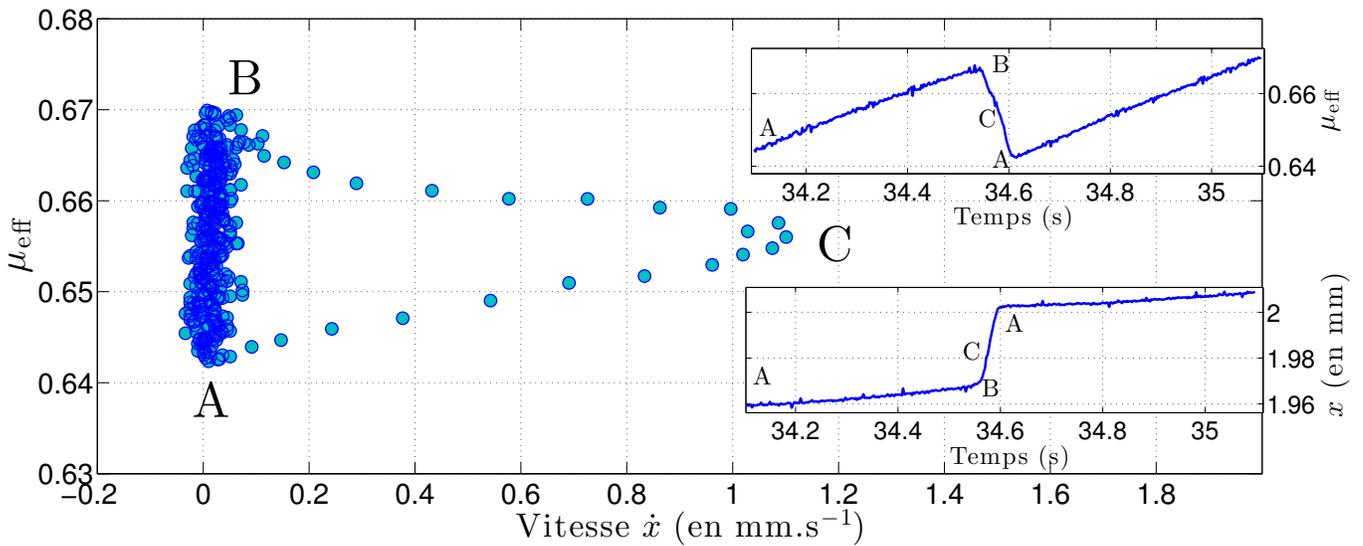


FIGURE II.12: Tracé de  $\mu_{\text{eff}}$  en fonction de la vitesse du patin  $\dot{x}$ . En encarts, chronogrammes de  $\mu_{\text{eff}}$  et de la position  $x$  sur cet évènement. À mettre en regard de la figure II.11 issue de [1]. Paramètres identiques à II.8.

### III. Résultats obtenus : quel(s) paramètre(s) d'ordre de la transition ?

Cherchons les paramètres qui permettent, *a priori*, de décrire la transition que l'on recherche. D'abord, l'amplitude du *stick-slip*,  $\Delta\mu = \mu_{\max} - \mu_{\text{moy}}$ , est censée décroître lorsque l'on se rapproche du *steady-sliding* (cf. figure I.3). De la même manière, le temps de *slip*, devrait progressivement se rapprocher du temps de *stick*, lorsque l'on passe, lors de la transition, dans un régime où  $\mu_{\text{eff}}(t)$  est sinusoïdal. L'étude de l'évolution du rapport  $r = \Delta t_{\text{slip}}/\Delta t_{\text{stick}}$  devrait donc renseigner sur la transition (il devrait tendre vers 1). L'allure des distributions des deux paramètres précédents est donnée ci-dessous (figure III.1).

On s'intéressera également au diagramme  $(\mu_{\text{eff}}, \dot{x})$ , comme celui de la figure II.11. En effet, lorsque le système est en *steady-sliding*, la vitesse est quasi-constante et l'amplitude diminue. On devrait alors se ramener à un seul point  $(\mu_{\text{crit}}, v_S)$  sur le diagramme. Un outil intéressant, mais non implémenté pendant ce stage serait un calcul de l'aire moyenne parcourue par période de *stick-slip*. Celle-ci devrait tendre vers 0 à la transition.

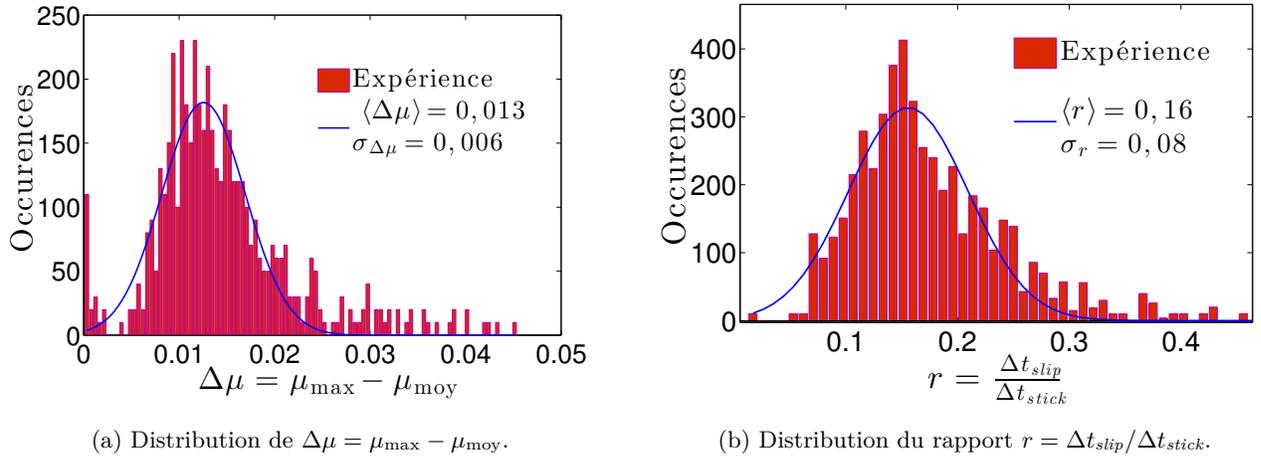


FIGURE III.1: Distributions des paramètres de transition  $\Delta\mu$  et  $r$ . Paramètres identiques à II.8.

#### III.1 Recherche de la transition à raideur $k$ fixée

Pour des raisons pratiques, on choisit dans chaque série de mesures de se placer à raideur  $k$  fixée (pour deux valeurs calibrées :  $k_1 = 237 \pm 10 \text{ N.m}^{-1}$  et  $k_2 = 1130 \pm 50 \text{ N.m}^{-1}$ ). On fait alors varier la vitesse de translation  $v_S$  et on établit, pour chaque acquisition, les distributions de  $\Delta\mu$  et de  $r$ .

**Évolution de l'amplitude  $\Delta\mu = \mu_{\max} - \mu_{\text{moy}}$ .** Pour une raideur  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ , les distributions d'amplitude évoluent avec la vitesse  $v_S$  comme présenté sur la figure III.2 ci-contre. On voit que l'amplitude diminue progressivement (à l'exception du dernier point). Le comportement exact n'est pas évident à décoder, car les distributions de  $\Delta\mu$  sont assez larges (jusqu'à 50% de la valeur moyenne). La position perturbante du dernier point à vitesse élevée ( $v_S = 264 \mu\text{m.s}^{-1}$ ) vient d'un problème de détection qui commence à survenir à haute vitesse. La détection du début de *slip* prend en compte le maximum de  $\mu_{\text{eff}}$ , mais lorsque la vitesse est grande, le patin se met en mouvement avant que  $\mu_{\text{eff}}$  n'atteigne un maximum (on détecte un  $\mu_{\max}$  trop élevé).

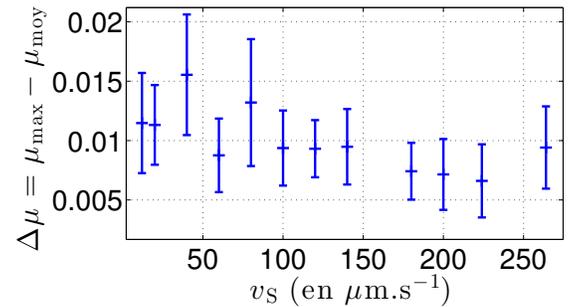


FIGURE III.2: Évolution de l'amplitude  $\Delta\mu$  avec la vitesse de traction. Paramètres :  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $d = 337 \mu\text{m}$ .

**Évolution du rapport**  $r = \Delta t_{slip}/\Delta t_{stick}$ . Ce rapport vaut théoriquement, dans le cadre d'un frottement solide-solide (cf. **annexe C**)

$$r_{théo} = \frac{\beta}{2}(\pi + 2 \arctan \beta) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\omega_0 v_S}{(\mu_S - \mu_D)g}.$$

Dans notre cas,  $\mu_S - \mu_D$  s'apparente à l'amplitude  $\Delta\mu$ . Pour  $v_S \sim 100 \mu\text{m.s}^{-1}$ , avec  $\omega_0 \approx 85 \text{ rad.s}^{-1}$  (valeurs de  $k$  et de  $m$  de l'expérience),  $\beta \approx 0,07$ . On peut ainsi négliger l'arc-tangente devant  $\pi$ . On a représenté figure **III.3**, l'évolution de  $r$  avec  $v_S$ , tout autre paramètre étant fixé. Les pointillés représentent la valeur théorique  $r_{théo}$ , en prenant pour  $\Delta\mu$  la valeur moyenne expérimentale observée.

Le rapport  $r$  augmente petit à petit (encore une fois, à l'exception du dernier point), et suit quasiment la courbe théorique. La transition vers un régime où temps de *slip* et temps de *stick* sont égaux n'est pas atteinte, mais on s'en rapproche de plus en plus. D'après les simulations de Lacombe *et al.*, on ne devrait pas y arriver encore à ces valeurs de couple ( $k, v_S$ ) – cf. figure **I.4**. L'amplitude  $\Delta\mu$  et le rapport  $r$  sont corrélés puisque les données suivent la courbe théorique. Un seul des paramètres d'étude suffit donc ( $\Delta\mu$  ou  $r$ ), vu qu'ils sont reliés entre eux par une formule analytique. En **annexe F**, on présente les résultats des simulations numériques effectuées par Baptiste Percier, qui conduisent à une allure similaire du rapport  $r$  avec la vitesse (figure **F.2**).

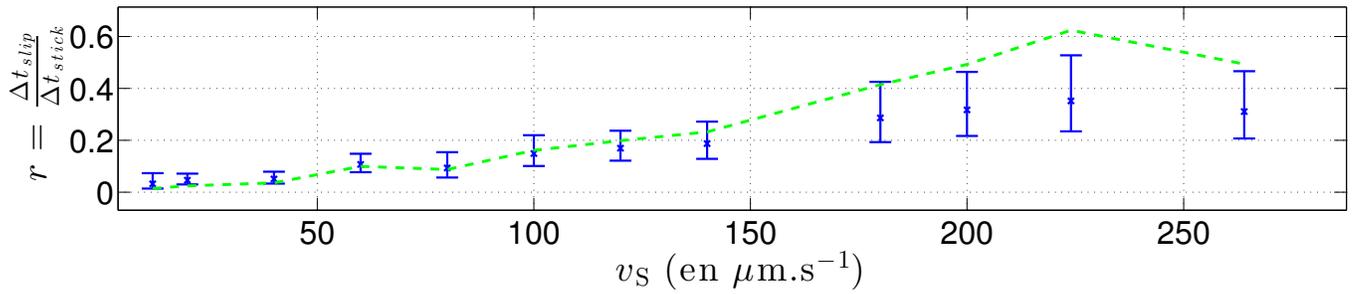


FIGURE **III.3**: Évolution du rapport  $r = \Delta t_{slip}/\Delta t_{stick}$  pour différentes vitesses de translation du bâti  $v_S$ . En pointillés, le rapport théorique  $r_{théo}$  calculé avec les valeurs de  $\Delta\mu$  obtenues expérimentalement.

**Paramètres** :  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $d = 337 \mu\text{m}$ .

#### Allure du diagramme ( $\mu_{eff}, \dot{x}$ )

En figure **III.4** ci-contre est présentée le diagramme ( $\mu_{eff}, \dot{x}$ ), pour trois échantillons de mesure de  $\mu_{eff}$ , à trois vitesses différentes. Il est peu évident de juger avec précision l'évolution des phases de *slip* car on prend à chaque fois moins d'une dizaine d'évènements successifs pris au hasard. On voit en revanche que les valeurs de  $\mu_{moy}$  et de  $\mu_{max}$  diminuent quand  $v_S$  augmente. Cela signifie qu'il faut attendre une plus faible valeur de  $T$ , à  $N$  égal, pour mettre en mouvement le patin. Cela laisse présager que, s'il existe,  $\mu_{crit}$  est plus faible que 0,56 dans ce cas.

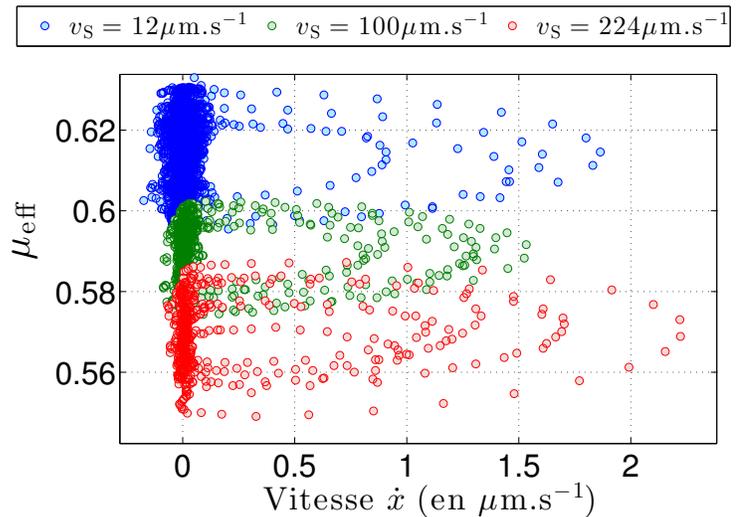


FIGURE **III.4**: Évolution de  $\mu_{eff}$  avec la vitesse du patin  $\dot{x}$  sur plusieurs évènements successifs.

**Paramètres** :  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $d = 337 \mu\text{m}$ .

**Influence de la raideur.** Pour une autre lame-ressort, on a procédé à la mesure des mêmes grandeurs. Ces valeurs sont reportées sur la figure **III.5**. Pour une lame plus raide, l'amplitude  $\Delta\mu$  décroît apparemment plus rapidement. Ce n'est cependant qu'une tendance, qui confirmerait néanmoins la diminution de la vitesse de transition lorsque la raideur du patin augmente (prédite par Lacombe *et al.* [7]). La différence sur le rapport des temps de *stick* et de *slip* n'est pas flagrante. Dans les gammes de vitesse étudiées on n'atteint dans tous les cas pas la transition recherchée.

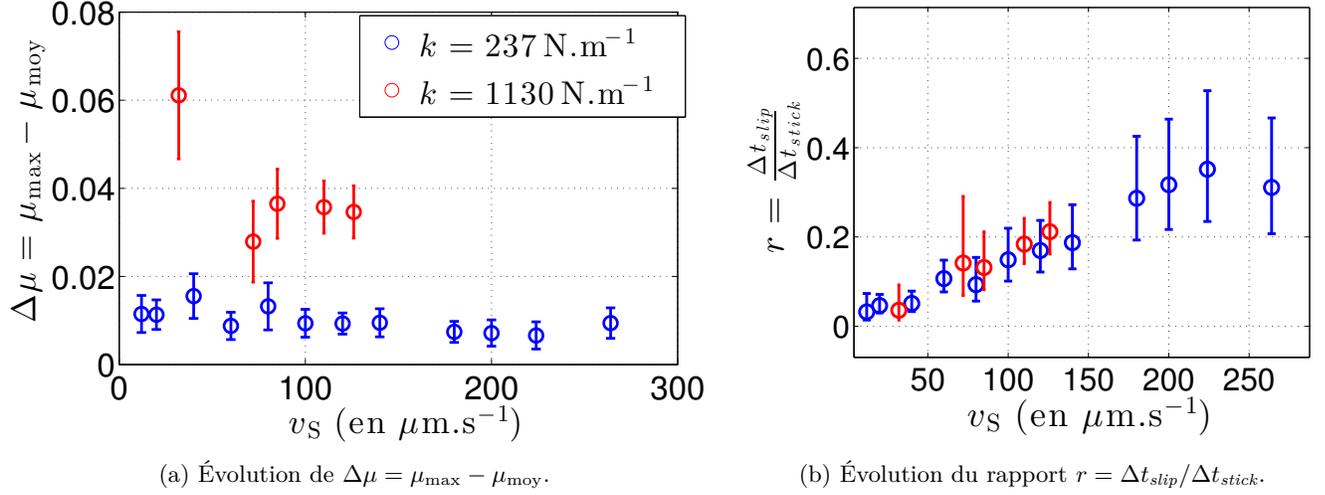


FIGURE **III.5**: Évolution de l'amplitude  $\Delta\mu = \mu_{\max} - \mu_{\text{moy}}$  et du rapport  $r = \Delta t_{\text{slip}}/\Delta t_{\text{stick}}$  pour différentes vitesses de translation du bâti  $v_S$  et deux raideurs différentes  $k = 273 \pm 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  et  $k = 1130 \pm 50 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ .

**Paramètres :**  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $d = 337 \mu\text{m}$ .

Un point intéressant lors du changement de raideur est de s'intéresser à l'évolution du temps de *slip*, qui est censé se comporter en  $\sqrt{m/k}$  (cf partie II.2). On a tracé en **III.6** l'évolution de  $\Delta t_{\text{slip}}$  pour les 2 raideurs, ainsi que la valeur théorique  $\pi\sqrt{m/k}$  (celle d'un frottement solide/solide). À grande vitesse et dans les deux cas, on tend à se rapprocher de cette valeur, c'est-à-dire que le temps mis avant l'arrêt du patin se rapproche de celui mis par un même système, en contact avec un solide indéformable plutôt que des grains. La mise en mouvement des grains serait-elle plus « ressentie » par le patin à faible vitesse? En tout cas, la raideur n'a pas d'influence sur cette tendance : elle ne fait que changer l'échelle des temps de *slip*, via le changement de pulsation  $\sqrt{k/m}$ .

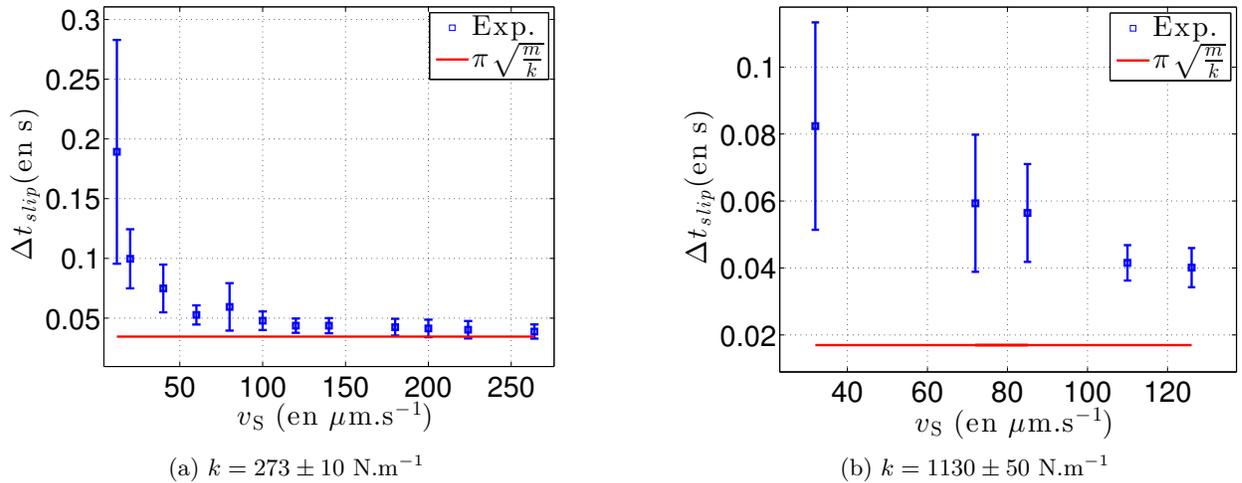


FIGURE **III.6**: Évolution du temps de *slip*  $\Delta t_{\text{slip}}$  pour différentes vitesses de translation du bâti  $v_S$  et pour deux raideurs différentes de la lame-ressort. **Paramètres :**  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $d = 337 \mu\text{m}$ .

### III.2 Influence des autres paramètres du système

Les paramètres que l'on vient d'étudier sont ceux présentés dans le diagramme de Lacombe *et al.* [7]. Mais, on peut également s'intéresser aux autres paramètres, fixés jusqu'à présent, et regarder leur influence, sinon sur les statistiques, au moins sur les chronogrammes de  $\mu_{\text{eff}}$ .

**Influence de l'humidité.** Le taux d'humidité joue un rôle essentiel sur la cohésion des grains, et ainsi, sur leur facilité à être mis en mouvement. Jusqu'à présent, toutes les acquisitions présentées ont été obtenues pour une fraction molaire  $x_{\text{eau}}$  d'eau dans l'air de l'ordre de 1,0%. On présente en figure III.7 deux acquisitions de  $\mu_{\text{eff}}$ , l'une pour  $x_{\text{eau}} = 1,0\%$ , l'autre pour  $x_{\text{eau}} = 1,5\%$ . La différence est flagrante sur l'amplitude du *stick-slip*, et peut ainsi être source d'erreurs selon s'il pleut ou non. Si l'on s'intéresse à l'évolution de  $\Delta\mu$  et de  $r$  avec la vitesse pour les deux valeurs de  $x_{\text{eau}}$ , on obtient la figure III.8. Le comportement est identique : seule l'amplitude  $\Delta\mu$  est en moyenne plus élevée. Cela signifie que la valeur seuil  $\mu_{\text{max}}$  à atteindre est plus élevée : les grains sont plus difficiles à mettre en mouvement. Le rapport  $r$  est plus faible : cela s'explique par la durée allongée des temps de *stick* (l'humidité n'influant que peu sur le temps d'un *slip*, l'augmentant même légèrement – fig. III.9) liée à la cohésion des grains.

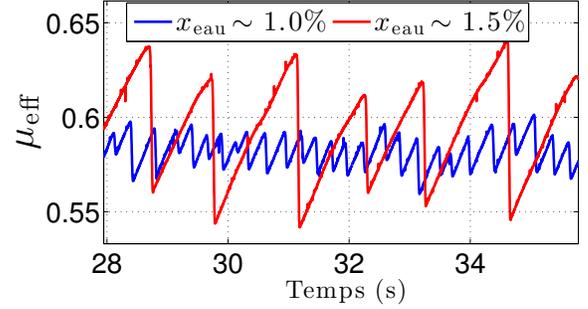
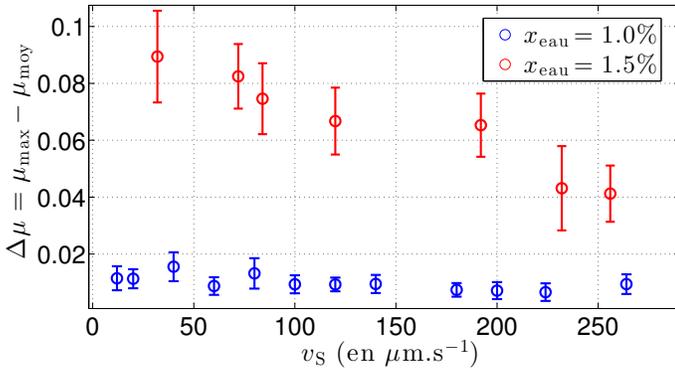
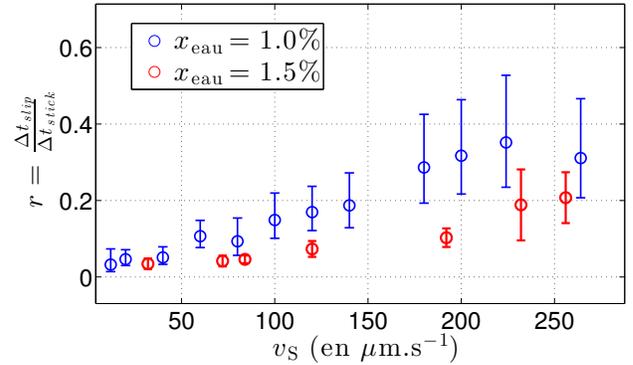


FIGURE III.7: Deux acquisitions de  $\mu_{\text{eff}}$  pour des fractions molaires d'eau dans l'air différentes.

**Paramètres :**  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $v_S = 120 \text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$ ,  $d = 337 \text{ }\mu\text{m}$ .



(a) Évolution de  $\Delta\mu = \mu_{\text{max}} - \mu_{\text{moy}}$ .



(b) Évolution du rapport  $r = \Delta t_{\text{slip}} / \Delta t_{\text{stick}}$ .

FIGURE III.8: Évolution de l'amplitude  $\Delta\mu = \mu_{\text{max}} - \mu_{\text{moy}}$  et du rapport  $r = \Delta t_{\text{slip}} / \Delta t_{\text{stick}}$  pour différentes vitesses  $v_S$  et deux fractions molaires en eau  $x_{\text{eau}}$  différentes. **Paramètres :** identiques à III.7.

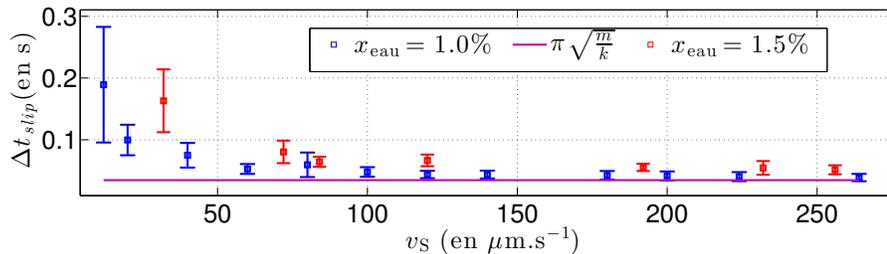


FIGURE III.9: Évolution du temps de slip  $\Delta t_{\text{slip}}$  pour deux  $x_{\text{eau}}$  différents. **Param.** identiques à III.7.

**Influence de la masse du patin.** On peut changer la masse du patin en ajoutant des poids en plastique que l'on vient insérer au milieu du patin, sous la plaque métallique. L'avantage est que cela ne fausse pas la mesure des capteurs inductifs au-dessus, l'inconvénient, c'est que l'on n'augmente que peu le poids du patin (de 33,2 g à 53,2 g). Les acquisitions de  $\mu_{\text{eff}}$  sont très semblables, et même l'évolution de  $\Delta\mu$  et de  $r$  sont très similaires. On présente l'évolution de  $r$  pour 3 masses différentes. L'évolution de masse du patin n'est peut-être pas assez significative pour pouvoir déceler un changement dans les statistiques de  $\mu_{\text{eff}}$ .

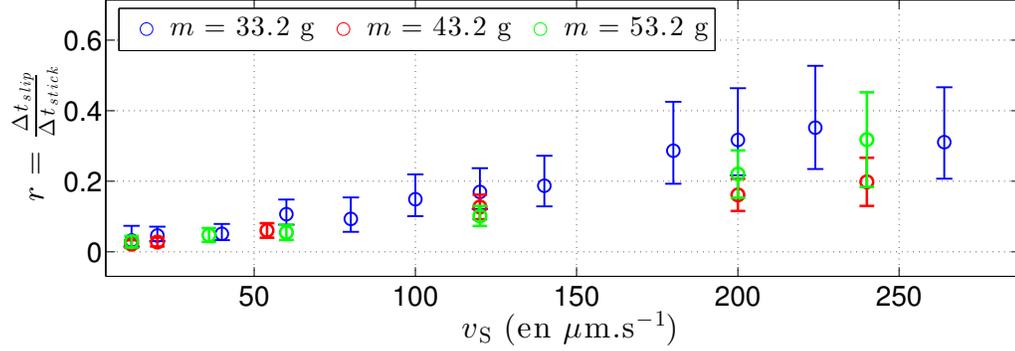
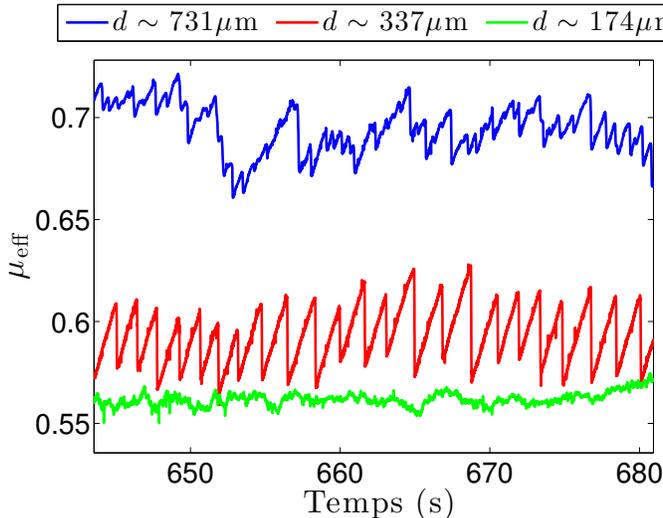


FIGURE III.10: Évolution du rapport  $r = \Delta t_{\text{slip}}/\Delta t_{\text{stick}}$  pour différentes vitesses de translation du bâti  $v_S$  et trois masses de patin différentes. **Paramètres** :  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $d = 337 \mu\text{m}$ .

**Influence de la taille des grains.** Le choix de la taille de grains est important car il est caractéristique du nombre de contacts qu'a le patin, de surface fixée, avec le milieu granulaire. À priori, plus ce nombre est important, plus on peut moyenniser sur les contacts pour obtenir des informations sur les grains. On noie ainsi les événements extraordinaires (glissement trop tardif, agglomérat de grains) dans la masse des autres événements. On représente en figure III.11 les allures de  $\mu_{\text{eff}}$  pour trois échantillons de taille de grains :  $d = 174 \mu\text{m}$ ,  $d = 337 \mu\text{m}$  et  $d = 731 \mu\text{m}$ . Le signal est beaucoup plus bruité quand les grains sont gros. On calcule de plus la distance moyenne de *slip* dans chacun des cas ; le résultat est donné dans la table III.A. On ne glisse jamais en moyenne sur plus d'une taille de grain (cf. partie II).



$d$ ( $\mu\text{m}$ )	174	337	731
$\langle \ell_{\text{slip}} \rangle$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sim 10$	37	18
$\langle \ell_{\text{slip}} \rangle / d$	$\sim 0,08$	0,11	0,025

TABLE III.A: Longueur moyenne de *slip* pour différentes tailles de grains. On ne glisse pas sur plus d'un neuvième d'une taille de grain.

FIGURE III.11: Trois acquisitions de  $\mu_{\text{eff}}$  pour des tailles de grains différentes. **Paramètres** :  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $v_S = 40 \mu\text{m.s}^{-1}$ .

### III.3 Ajout contrôlé de vibrations dans le montage

La difficulté d'obtention d'un *stick-slip* en début de stage a éveillé l'intérêt d'étudier l'influence des vibrations sur la transition entre *stick-slip* et *steady-sliding*. Les deux paramètres en plus sont alors l'amplitude  $\Gamma$  de l'accélération et la fréquence  $f_{\text{vib}}$  de celle-ci. Des études théoriques ont été faites sur le sujet [9, 10], mais très peu d'expériences ont été menées (au vu de la difficulté à quantifier  $\Gamma$ ). Pour ajouter des vibrations, il a cependant fallu modifier le montage expérimental.

**Modification du montage.** On rajoute directement sur la plaque en dural un pot vibrant (4810, *Brüel et Kjøer*) alimenté par un générateur de fonction amplifié en puissance (amplificateur type 2706, *Brüel et Kjøer*) qui délivre un signal sinusoïdal. Un accéléromètre (Modèle 3035BG, *Dytran Instruments, INC.*) permet de mesurer l'accélération du pot. La vibration se transmet au bâti comme à la cuve, et on peut alors voir l'influence de l'ajout de vibration au fond du lit de grains dans les fluctuations de  $\mu_{\text{eff}}$ . Un étalonnage rapide, car difficile (les réflexions sont nombreuses dans la plaque et dans la cuve), permet d'avoir un lien entre accélération du pot et accélération au fond du lit de grains <sup>6</sup>.

**Allure de  $\mu_{\text{eff}}$ .** Les signaux obtenus sont donnés en figure III.12. On voit que l'effet d'une forte accélération est à la fois de tuer le *stick-slip* pour passer progressivement dans une phase où il n'y a pas d'arrêt du patin, ainsi que de réduire considérablement la valeur moyenne  $\mu_{\text{moy}}$ . Cela confirme la tendance observée lors de l'augmentation de la vitesse de traction figure III.4, à savoir une diminution de  $\mu_{\text{moy}}$  en s'approchant de la transition. Si on retire la valeur moyenne des signaux de  $\mu_{\text{eff}}$ , pour en étudier le spectre, on voit clairement disparaître la fréquence liée à la période du *stick-slip*. Les courbes de puissance spectrale sont données en figure III.13. De celles-ci on pourrait espérer tirer un paramètre d'ordre pour étudier la transition souhaitée. Il faudrait cependant obtenir des données plus quantitatives.

**Influence de  $f_{\text{vib}}$ .** La fréquence de vibration n'a pas vraiment d'influence, à accélération constante : on conserve toujours du *stick-slip*, et même les statistiques obtenues sur  $\mu_{\text{eff}}$  ne diffèrent pas. On a représenté les variations de  $\Delta t_{\text{slip}}$  et de l'amplitude  $\Delta\mu$  à amplitude d'accélération  $\Gamma$  constante en figure III.14. C'est donc l'accélération de vibration qui est le paramètre important, et on ne voit pas d'effet lié au changement de fréquence dans la gamme d'étude (50 à 150 Hz). En ajoutant une vibration supposée verticale, on ajoute un terme en plus à l'équation du principe fondamental de la dynamique sur  $\vec{e}_z$ , dont l'amplitude influe énormément. Ici, les mesures se veulent qualitatives, mais en remaniant le montage pour permettre de le faire vibrer verticalement par dessous, on devrait obtenir des mesures plus quantitatives.

**Diagramme  $(\dot{x}, \mu_{\text{eff}})$ .** En regardant l'allure de ce diagramme (figure III.15), on voit que cet outil peut être utilisé pour décrire la transition. L'aire parcourue par cycle diminue en ajoutant des vibrations, et l'on diminue vers une valeur critique  $\mu_{\text{crit}} < 0,5$ . Les vibrations ont une réelle influence sur le phénomène de friction granulaire, et on comprend mieux pourquoi un faible bruit a pu nous empêcher d'apercevoir un seul *stick-slip*.

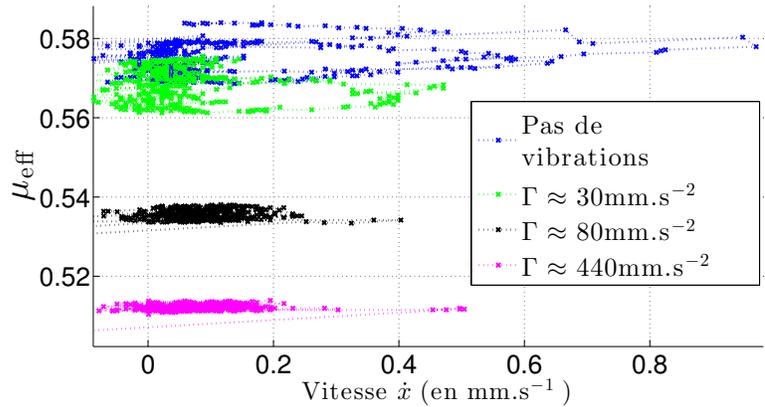


FIGURE III.15: Diagramme  $(\dot{x}, \mu_{\text{eff}})$  avec  $f_{\text{vib}} = 150$  Hz constant. Paramètres : comme en III.12.

<sup>6</sup>Pour différentes intensités communiquées au pot vibrant, on relie les accélérations du pot  $a_{\text{pot}}$  à celles relevées au niveau du lit de grains  $a_{\text{gra}}$  : on linéarise la courbe ainsi obtenue. On pourra alors, en mesurant  $a_{\text{pot}}$ , en déduire directement  $a_{\text{gra}}$ . Comme l'expérience n'est pas prévue pour ajouter des vibrations, on pose simplement le pot sur la gauche de la cuve. Du coup, l'accélération n'est pas la même partout dans la cuve à cause de l'atténuation. On se contente donc de faibles courses du patin (1 à 2 cm), et la calibration précédemment décrite est effectuée dans la zone où se situe le patin.

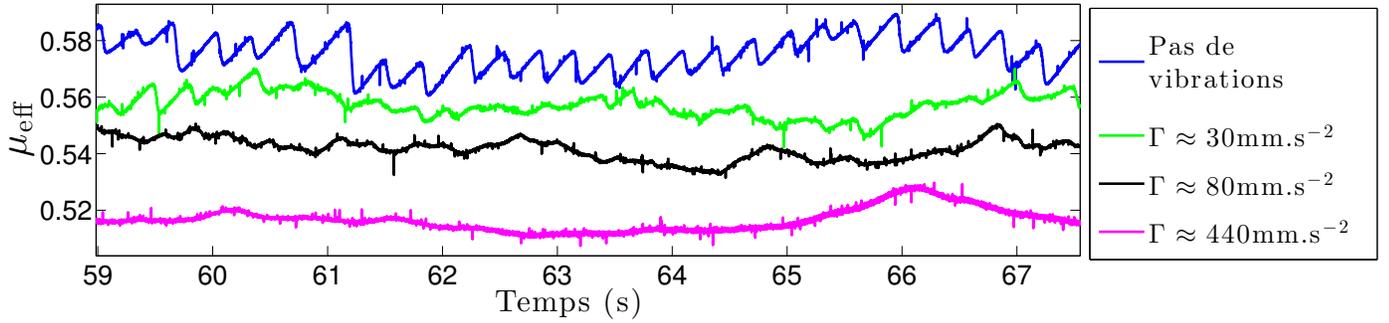


FIGURE III.12: Chronogramme de  $\mu_{\text{eff}}$  pour différentes amplitudes de l'accélération, à fréquence constante  $f_{\text{vib}} = 150$  Hz. Paramètres :  $k = 273$  N.m $^{-1}$ ,  $m = 33,2$  g,  $d = 337$   $\mu\text{m}$ ,  $v_S = 80$   $\mu\text{m.s}^{-1}$ .

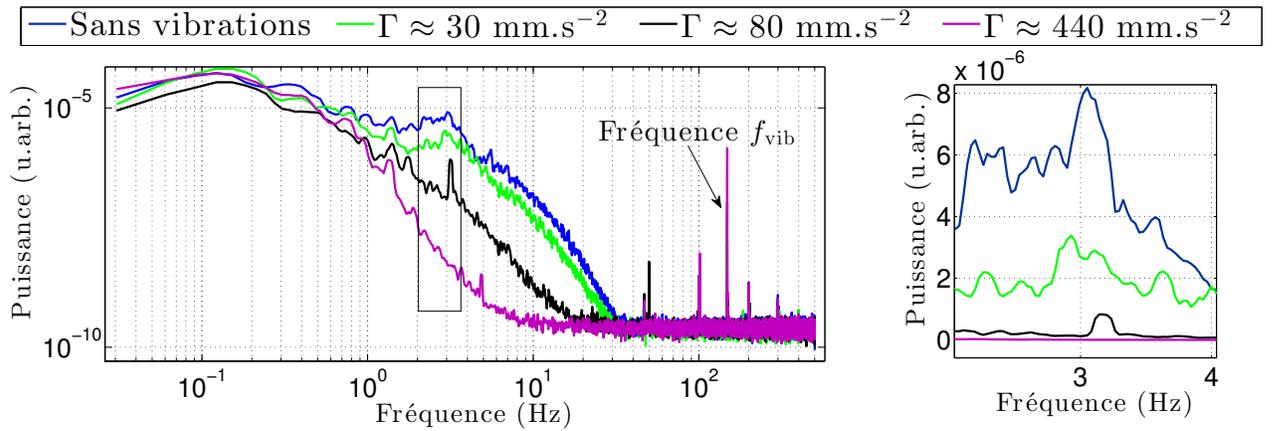
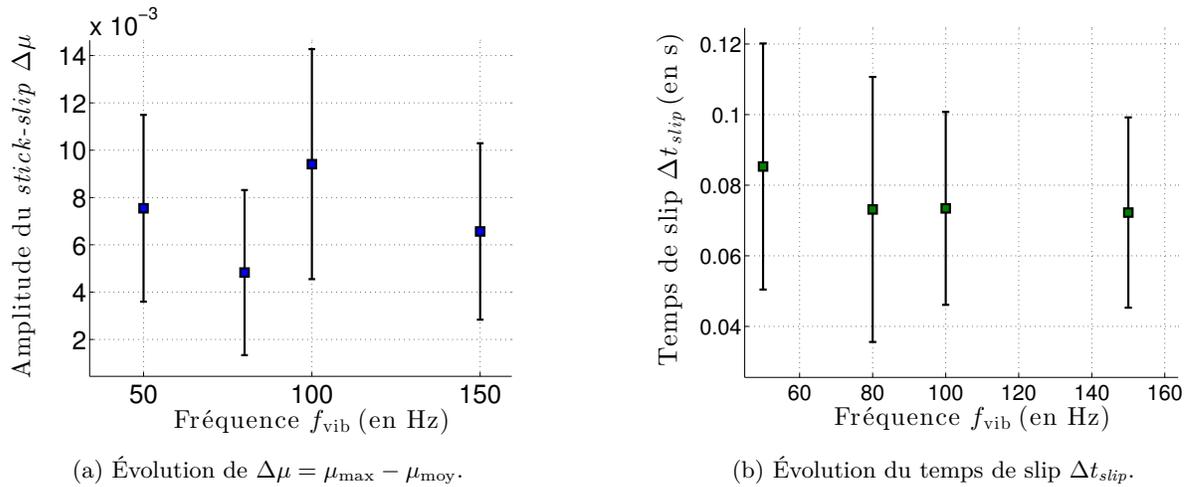


FIGURE III.13: Spectre en puissance des  $\mu_{\text{eff}}$  pour différentes amplitudes de l'accélération, à fréquence constante  $f_{\text{vib}} = 150$  Hz. La fréquence liée au *stick-slip* diminue quand on vibre plus fort (cf. encart). On distingue clairement la fréquence de vibration  $f_{\text{vib}}$  dans les signaux.

Paramètres :  $k = 273$  N.m $^{-1}$ ,  $m = 33,2$  g,  $d = 337$   $\mu\text{m}$ ,  $v_S = 80$   $\mu\text{m.s}^{-1}$ .



(a) Évolution de  $\Delta\mu = \mu_{\text{max}} - \mu_{\text{moy}}$ .

(b) Évolution du temps de slip  $\Delta t_{\text{slip}}$ .

FIGURE III.14: Évolution de l'amplitude  $\Delta\mu = \mu_{\text{max}} - \mu_{\text{moy}}$  et du temps de slip  $\Delta t_{\text{slip}}$  pour différentes fréquences de vibrations  $f_{\text{vib}}$  à  $\Gamma \approx 30$  mm.s $^{-2}$  constant.

Paramètres :  $k = 273$  N.m $^{-1}$ ,  $m = 33,2$  g,  $d = 337$   $\mu\text{m}$ ,  $v_S = 80$   $\mu\text{m.s}^{-1}$ .

## Conclusion et perspectives.

Les paramètres régissant les modes de mouvement d'un patin sur un ensemble de grains sont nombreux. Taille des grains, raideur, vitesse de traction et masse du patin sont ceux qui semblent le plus évident. Cela fait déjà de nombreuses acquisitions pour l'établissement d'un diagramme des régimes de *stick-slip* et *steady-sliding*. À ceux-ci, on l'a vu, se rajoutent les vibrations (amplitude et fréquence) ainsi que l'humidité de l'air.

Nous avons mis en évidence dans ce stage l'importance d'une étude statistique d'un tel système, ce qui permet d'accéder aux valeurs moyennes comme aux fluctuations des paramètres du *stick-slip*. De plus, nous avons pu étudier l'influence des paramètres extérieurs sus-cités (vibrations, humidité) sur la dynamique du système.

Les perspectives d'étude sont nombreuses : maintenant que le montage est exploré sous différents angles, on peut s'atteler à plusieurs pistes. Une étude approfondie des vibrations est envisageable, en mettant, par exemple, l'ensemble du montage sur un pot vibrant, afin de quantifier exactement les vibrations en évitant les réflexions dans la plaque. Une étude en milieu immergé peut également être menée, avec comme paramètre supplémentaire la viscosité du fluide. Enfin, l'acquisition à la rentrée d'un moteur à courant continu de très haut couple, permettra d'explorer de nouvelles gammes de vitesse, en évitant de plus les vibrations inhérentes à un moteur pas-à-pas. Le lien avec le numérique et les simulations de Baptiste Percier n'a pas été majeur dans cette étude, mais il serait très intéressant de réfléchir à utiliser ces dernières, afin de pouvoir balayer rapidement les gammes de tous les paramètres pour établir un diagramme numérique – à confronter avec l'expérience.

Une chose importante que m'aura apprise ce stage : le monde des milieux granulaires est visible et bien palpable, et les équations qui régissent chaque grain sont bien connues. Mais pourtant, les phénomènes globaux restent inexpliqués, et le champ d'expérimentation est immense.

## Références

- [1] S. Nasuno, A. Kudrolli, A. Bak, and J. P. Gollub, *Time-resolved studies of stick-slip friction in sheared granular layers*, Physical Review E **58** (1998), no. 2, 2161–2171.
- [2] J.-C. Géminard and W. Losert, *Frictional properties of bidisperse granular matter : Effect of mixing ratio*, Physical Review E **65** (2002), no. 4, 041301.
- [3] W Losert, J.-C. Géminard, S. Nasuno, and J. P. Gollub, *Mechanisms for slow strengthening in granular materials*, Physical Review E **61** (2000), no. 4, 4060–4068.
- [4] J.-C. Géminard, W. Losert, and J. P. Gollub, *Frictional mechanics of wet granular material*, Physical Review E **59** (1999), no. 5, 5881–5890.
- [5] B. Andréotti, Y.L. Forterre, and O. Pouliquen, *Les milieux granulaires entre fluide et solide*, Savoirs actuels, EDP Sciences, 2011.
- [6] T. Divoux, *Bruit et fluctuations dans les écoulements de fluides complexes*, Phdthesis, École Normale Supérieure de Lyon, 2009.
- [7] F. Lacombe, S. Zapperi, and H.J. Herrmann, *Dilatancy and friction in sheared granular media*, The European Physical Journal E **2** (2000), 181–189.
- [8] B Percier, S Manneville, and Taberlet, *Modeling a washboard road : From experimental measurements to linear stability analysis*, Physical Review E **87** (2013), no. 1, 012203.
- [9] R. Capozza, A. Vanossi, A. Vezzani, and S. Zapperi, *Suppression of friction by mechanical vibrations*, Physical Review Letters **103** (2009), no. 8, 085502.
- [10] F. Giacco, E. Lippiello, and M. Pica Ciamarra, *Solid-on-solid single-block dynamics under mechanical vibration*, Physical Review E **86** (2012), no. 1-2, 016110.

## Annexe A : Images de grains et détection des rayons

Voici les mesures de dispersion en diamètre des jeux de grains ainsi que les images de chaque échantillon. Les cercles bleutés sont les grains détectés par le code MATLAB.

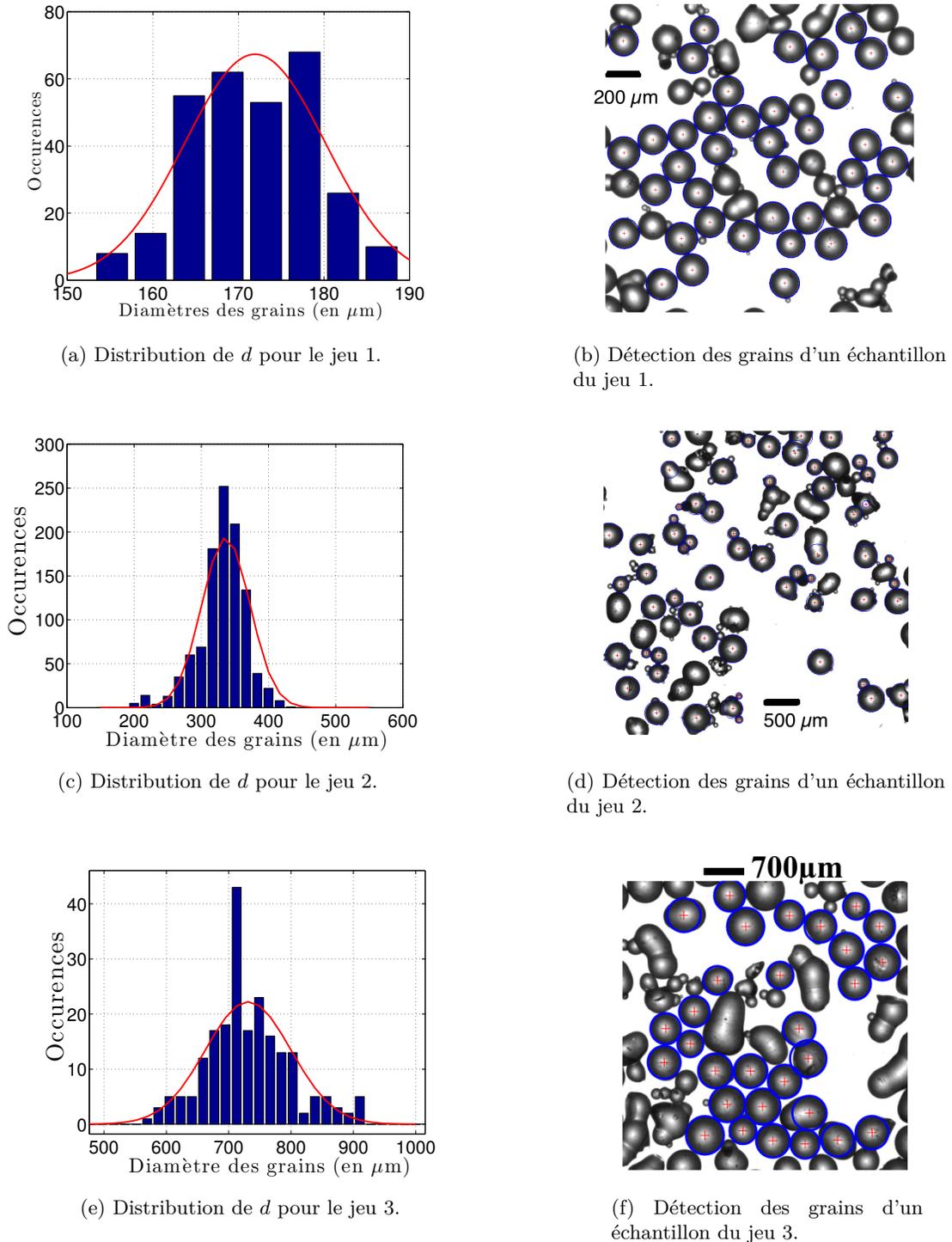


FIGURE A.1: Distributions des diamètres et photographies pour trois jeux de grains donnés par le fournisseur. Jeu 1 (160–200  $\mu\text{m}$ ) :  $d = 174 \pm 7 \mu\text{m}$  ; Jeu 2 (315–400  $\mu\text{m}$ ) :  $d = 337 \pm 36 \mu\text{m}$  ; Jeu 3 (615–800  $\mu\text{m}$ ) :  $d = 731 \pm 69 \mu\text{m}$ .

## Annexe B : Étalonnage des capteurs et des lames.

**Étalonnage des capteurs inductifs.** Les différents capteurs du montage fonctionnent par induction mutuelle. Alimentés par un courant de fonctionnement  $i_0$ , ils vont créer un champ magnétique susceptible d'induire un courant  $i_{\text{ind}}$  sur la surface métallique face à laquelle ils sont positionnés. Ce courant  $i_{\text{ind}}$  va induire un champ  $B_{\text{ind}}$ , qui va être perçu par le capteur, le courant sortant de ce dernier étant modifié par le champ induit :  $i = i_0 + \Delta i(B_{\text{ind}})$ . En mesurant la tension aux bornes d'une résistance traversée par ce courant  $i$ , on a accès à une mesure de cette induction mutuelle. Celle-ci va dépendre principalement de la distance du capteur à la surface métallique, mais également de la nature du métal observé. Ainsi, l'étalonnage de ces capteurs (tension – distance) doit se faire *in situ*, ou au moins avec la même surface métallique que celle utilisée dans l'expérience.

Pour l'étalonnage des capteurs  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$ , une platine de translation avec un vernier permet de construire une courbe d'étalonnage tension  $V$  – distance  $d$ . Pour ce faire, on approche les capteurs de la plaque située au dessus du patin jusqu'au contact. En s'éloignant progressivement, on mesure à la fois la distance à la cible  $d$  et la tension  $V$ . Le résultat est donné figure **B.2**. On voit que ces capteurs ont une plage de linéarité entre 1 et 2,5 mm. Pour plus de précisions (dans le cas où l'on veut mesurer  $d > 3$  mm), on utilise l'ajustement  $d(V)$  qui sert de conversion. On suppose que le capteur de référence suit exactement la même loi (ses variations en altitude sont de l'ordre du centième de millimètre).

Pour l'étalonnage du capteur  $K_{\text{lame}}$ , un problème se pose. La surface de la lame est fléchée, et la distance à la lame n'est pas la même en haut et en bas du capteur : cela nous empêche d'utiliser la calibration précédente. De plus, selon l'altitude du patin (qui est susceptible de varier), la déflexion risque de changer (cf. figure **B.1**) : le contact avec la bille ne se fait pas au même endroit sur la lame.

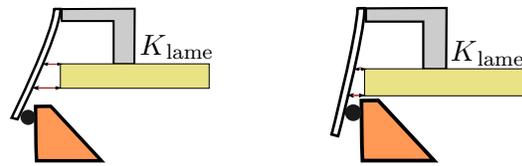


FIGURE **B.1**: Différentes positions du capteur inductif devant la lame-ressort

La solution se trouvera lors de l'acquisition des courbes, en reliant tension mesurée et vitesse de translation du bâti. Ce qui nous intéresse est la position du patin (et donc de la bille) par rapport au bâti. On obtient celle-ci par l'intermédiaire de la déflexion de la lame-ressort. Juste après le contact entre la lame et la bille, le bâti est en mouvement à la vitesse  $v_S$  par rapport au patin, immobile grâce aux forces de frottement. Le patin s'éloigne donc à la même vitesse du capteur, et la lame commence à fléchir. La variation de tension aux bornes du capteur, liée à la flexion de la surface qu'il voit, est alors calibrée comme étant la variation de position du patin par rapport au bâti (à la vitesse  $v_S$ ). On obtient alors une conversion entre la tension  $V$  et la flèche  $\Delta x$  (cf. figure **B.3**). De cette manière, on s'affranchit des contraintes géométriques liées à la flexion de la lame, qui seront prises en compte dans la raideur effective  $k$  de la lame-ressort.

**Détermination de la raideur effective de la lame-ressort.** Pour déterminer les raideurs effectives, on utilise un capteur de force (composé de jauges de déformation, DFS-BTA, *Vernier*), préalablement étalonné ( $0,2 \text{ V.N}^{-1}$ ). On place le capteur de force à la place du patin, en le fixant à la cuve. On fait avancer le bâti à une vitesse  $v_S$  connue. En mesurant la force exercée par la lame sur le capteur de force (on fixe une bille sur celui-ci pour se mettre dans le cas d'un contact ponctuel), on peut alors remonter à la raideur effective  $k$ .

Sur un intervalle de temps  $\Delta t$ , le bâti aura avancé de  $v_S \Delta t$ . La différence de position entre le bâti et la bille (immobile) est alors  $\Delta x = v_S \Delta t$ . La variation de force est  $\Delta F = k v_S \Delta t$ . La pente du chronogramme de force (cf. figure **B.4**) donne alors le produit  $k v_S$ , donc  $k$ . Dans les expériences, on utilise deux lames différentes (d'épaisseurs  $e_1 = 0,25 \text{ mm}$  et  $e_2 = 0,40 \text{ mm}$ ), encadrées à  $L = 3 \text{ cm}$  de l'extrémité au contact du patin, et de raideur  $k_1 = 237 \pm 10 \text{ N.m}^{-1}$  et  $k_2 = 1130 \pm 50 \text{ N.m}^{-1}$ .

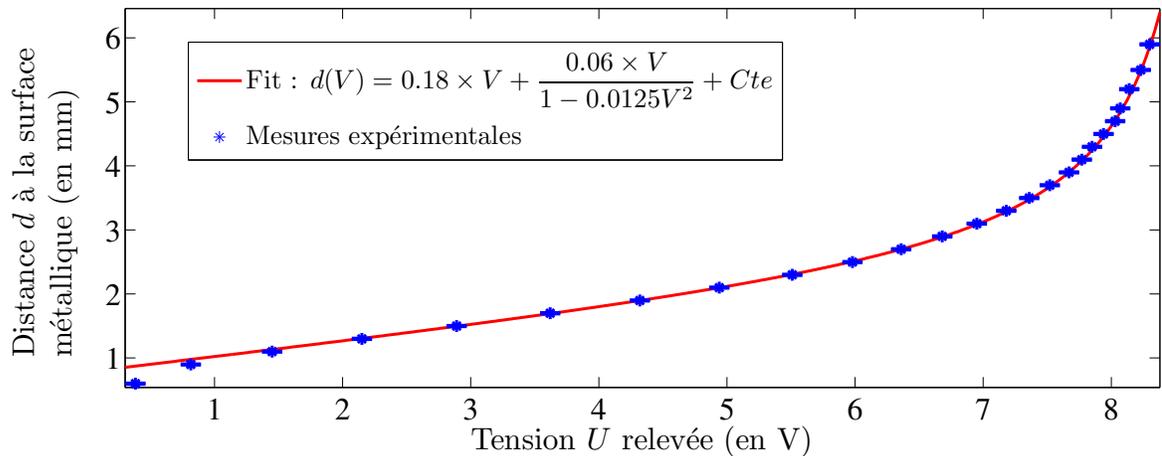


FIGURE B.2: Calibration du capteur inductif  $K_1$ . Le résultat est similaire pour les autres capteurs. Un ajustement est proposé, permettant de retrouver la distance à partir d'une tension relevée.

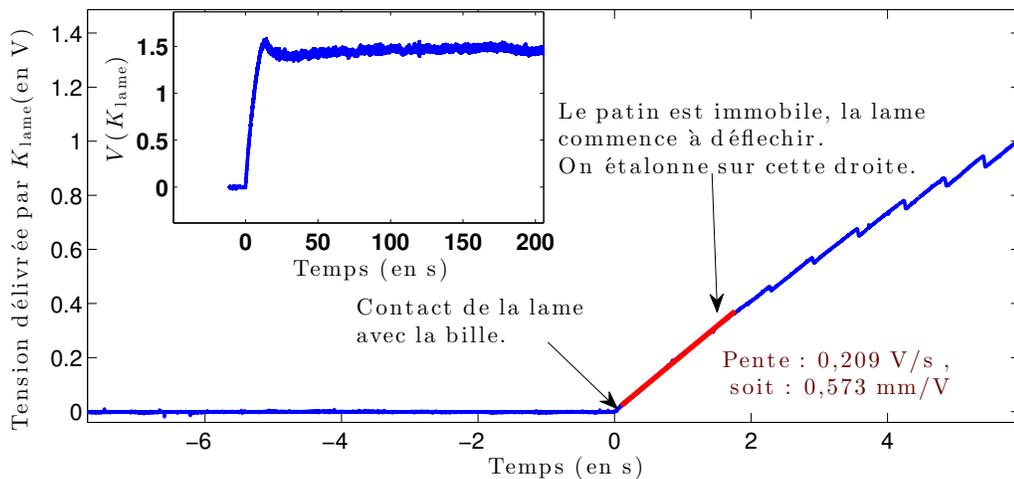


FIGURE B.3: Chronogramme de tension délivrée par le capteur  $K_{\text{lame}}$  et principe de son étalonnage (en encart, acquisition totale).

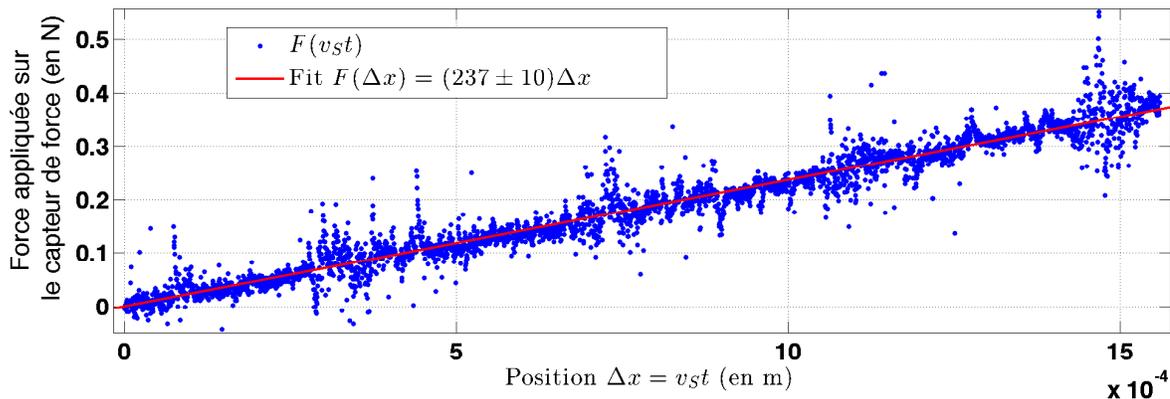


FIGURE B.4: Étalonnage de la lame ressort ( $e_1 = 0,25$  mm) via le chronogramme  $F(v_{st})$ .

## Annexe C : Modèle de stick-slip d'un solide sur une surface solide

Considérons un patin de masse  $m$ , posé sur une surface plane fixe et lié à un ressort de raideur  $k$ . Ce dernier est attaché à un bâti se déplaçant à une vitesse constante  $v_S$  par rapport à la surface fixe. On suppose que les surfaces en contact sont faites du même matériau, caractérisé par un coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  et statique  $\mu_s$ . Notons  $\vec{N}$  la réaction normale, et  $\vec{T}$  la réaction tangentielle à la surface du patin (cf. figure C.1).

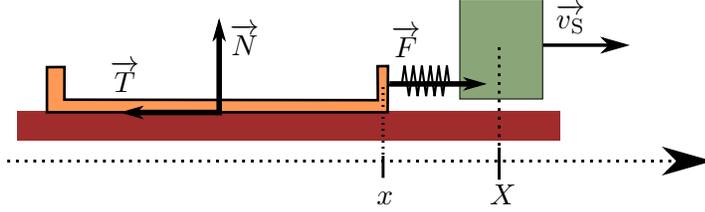


FIGURE C.1: *Stick-slip* entre deux surfaces solides.

Tout au long de la trajectoire, on suppose que le patin ne décolle pas. Nécessairement  $N = mg$  avec  $\vec{g}$  le champ de pesanteur, supposé uniforme à l'échelle de l'expérience. Lorsque le patin est immobile, la force exercée par le ressort  $\vec{F}$  est opposée à  $\vec{T}$ .

Supposons que le ressort soit initialement à sa longueur à vide  $l_0$ , et le patin sans vitesse initiale. Posons par ailleurs  $x(t=0) = 0$ . Alors,  $X(t=0) = l_0$ . Il n'y a pas de force de rappel  $F(t=0) = k(X - x - l_0) = 0$  et le patin est immobile :  $T(t=0) = F(t=0) = 0$ . A  $t=0$ , on est dans le cas où  $T < \mu_s N = \mu_s mg$ , il n'y a donc pas glissement, le patin reste immobile tant que  $T$  n'atteint pas cette valeur. Au fur et à mesure que le bâti avance, le ressort se tend et  $F$  augmente. Le patin reste immobile, on a donc

$$X(t) = l_0 + v_S t, \quad \text{d'où} \quad T(t) = F(t) = k v_S t.$$

La réaction tangentielle atteint  $\mu_s mg$  à  $t_1 = \frac{\mu_s mg}{k v_S}$ . À ce moment, le patin n'est plus collé au support et se met à glisser. D'après les lois du frottement solide,  $T(t > t_1) = \mu_d mg$ . Le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe de déplacement donne

$$m\ddot{x} = -\mu_d mg + k(X - x + l_0), \quad \text{d'où} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}v_S t - \mu_d g.$$

On trouve la solution, en posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , et en définissant la phase  $\varphi$  en  $t = t_1$  :

$$x(t) = A \cos(\omega_0(t - t_1) + \varphi) + v_S t - \frac{\mu_d mg}{k}.$$

Avec la condition initiale  $x(t_1) = 0$ , on trouve

$$A \cos \varphi = \frac{\mu_d mg}{k} - v_S t_1 = \frac{(\mu_d - \mu_s)mg}{k} = \frac{(\mu_d - \mu_s)g}{\omega_0^2},$$

et avec  $\dot{x}(t_1) = 0$ ,

$$A\omega_0 \sin \varphi = v_S ;$$

$$\text{d'où} \quad \tan \varphi = \frac{v_S \omega_0}{(\mu_d - \mu_s)g} \quad \text{et} \quad A^2 = \left( \frac{(\mu_d - \mu_s)g}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{v_S}{\omega_0} \right)^2.$$

Pendant le temps de glissement, le patin « rattrape » le bâti. La force de rappel du ressort est alors

$$F(t > t_1) = k(X(t) - x(t) - l_0) = \mu_d mg + kA \cos(\omega_0(t - t_1) + \varphi).$$

Comme  $A\omega_0 = \frac{v_S}{\sin \varphi} \geq v_S$ , on aura forcément annulation de la vitesse  $\dot{x}$ . Alors, quand  $\dot{x} = 0$ ,  $T$  ne sera plus fixée et pourra prendre la valeur  $T(t_2) = F(t_2)$ , où  $t_2$  est l'instant où le patin a une vitesse nulle :

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{\omega_0} \left[ \arcsin \left( \frac{v_S}{A\omega_0} \right) - \varphi \right].$$

Nécessairement  $t_2 \neq t_1$ . La première solution possible est  $\arcsin \left( \frac{v_S}{A\omega_0} \right) = \pi - \varphi$ . Alors,

$$x(t_2 = t_1 + \frac{\pi - 2\varphi}{\omega_0}) = -A \cos \varphi + v_S t_2 - \frac{\mu_d m g}{k} \quad \text{soit} \quad F(t_2) = (2\mu_d - \mu_s) m g$$

La norme  $T$  n'est plus fixée, car il n'y a plus glissement. On a alors  $T(t_2) = F(t_2)$  (équilibre mécanique). Le patin s'immobilise-t-il et reste-t-il dans une phase de *stick*? Pour cela il faut que la condition de non glissement  $T(t_2) < \mu_s m g$  soit vérifiée. Or,  $\mu_s > \mu_d$ , donc  $T(t_2) = F(t_2) < \mu_s m g$  : le patin s'immobilise donc. On reprend alors une phase de *stick* jusqu'à ce que la norme de la force de réaction tangentielle, donc la norme de la force de rappel du ressort, vaille  $\mu_s m g$ . Ceci intervient au temps  $t_3$ , tel que

$$\Delta F_{\text{stick}} = k v_S (t_3 - t_2) = \mu_s m g - (2\mu_d - \mu_s) m g, \quad \text{soit} \quad t_3 = t_2 + 2 \frac{\mu_s - \mu_d}{k v_S} m g.$$

Le rapport théorique entre temps de *slip* et temps de *stick* vaut

$$r_{\text{théo}} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} = \frac{\pi - 2\varphi}{\omega_0} \times \frac{k v_S}{2(\mu_s - \mu_d) m g},$$

soit

$$r_{\text{théo}} = \frac{\beta}{2} (\pi + 2 \arctan \beta) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\omega_0 v_S}{(\mu_s - \mu_d) g}.$$

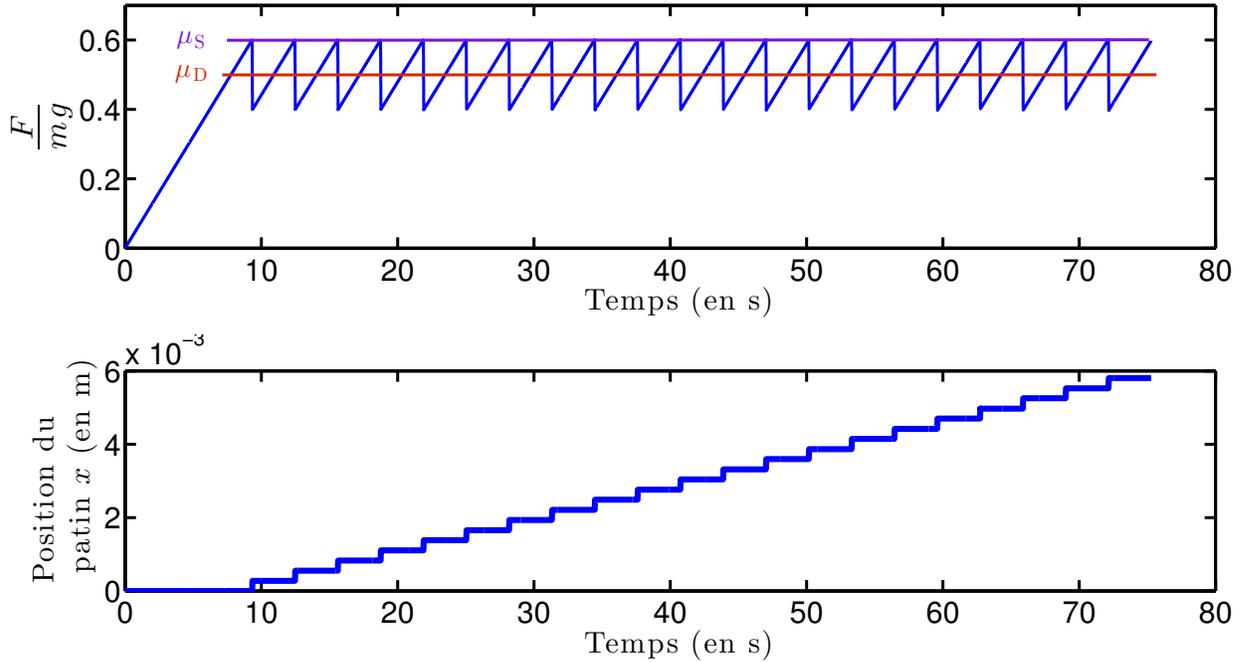


FIGURE C.2: Chronogramme de la force exercée par la lame sur le patin, adimensionnée par  $mg$ , ainsi que de la position du patin. **Paramètres** :  $v_S = 88 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $k = 237 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $m = 33 \text{ g}$ .

## Annexe D : Photos du montage

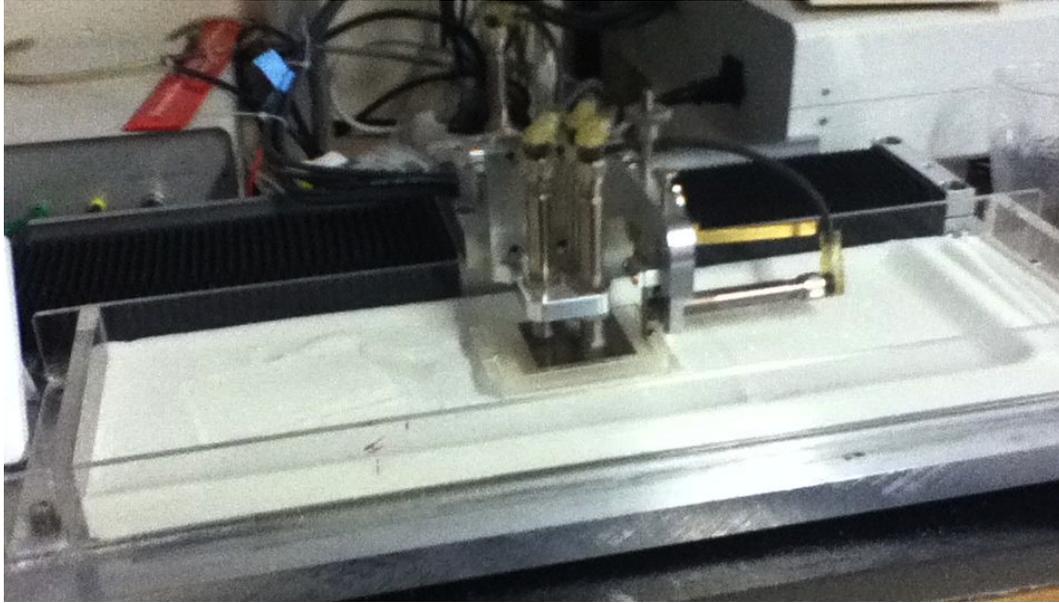


FIGURE D.1: Vision globale des différents éléments du montage expérimental. Cuve de taille 30 cm environ.

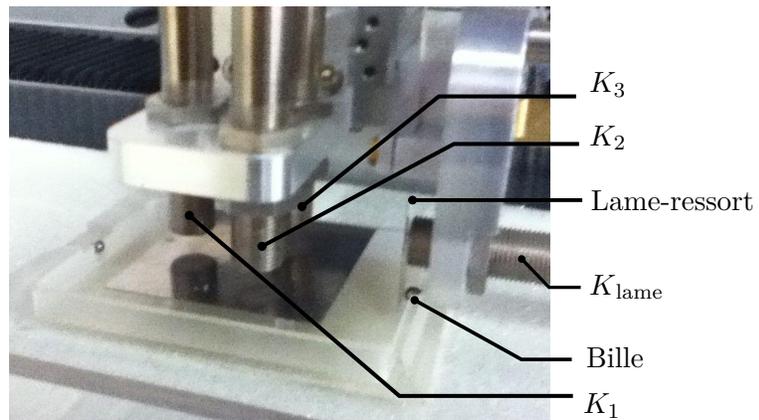


FIGURE D.2: Zoom sur le patin et les capteurs inductifs.

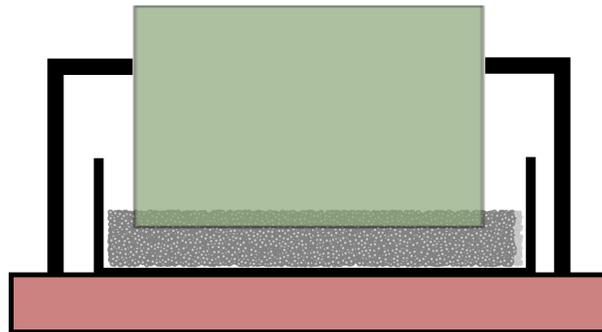


FIGURE D.3: Schéma de la raclette utilisée

## Annexe E : Phénomène de « washboard »

Pour bien comprendre le phénomène, voici différentes images prises par une webcam au cours de l'avancée du patin – figure **E.1**. Celle-ci est solidarisée du bâti. On donne les chronogrammes d'angle de tangage  $\alpha$  et d'altitude  $z$  (figure **E.2**) en plus pour mieux relier les courbes aux images. De plus, on présente les images issues des simulations de Baptiste Percier qui aident à comprendre la formation des bosses (figure **E.3**).

En **A**, le patin commence à charrier des grains, et ce, de plus en plus (**B**). À un moment il prend tellement d'angle à cause des grains devant lui qu'il va pouvoir passer par-dessus (**C**). L'angle va diminuer et l'on recommencera à charrier des grains (**D**).

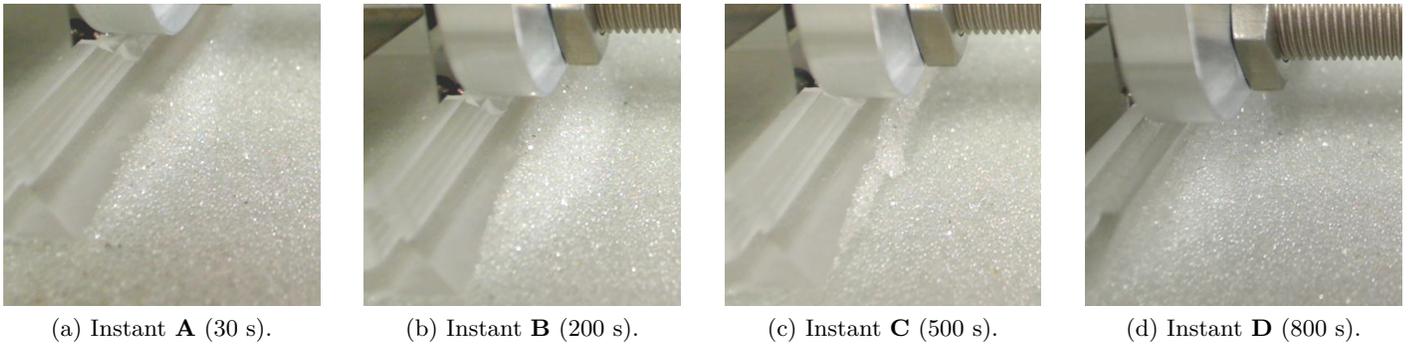


FIGURE **E.1**: Photographies du patin prises à quatre instants successifs.

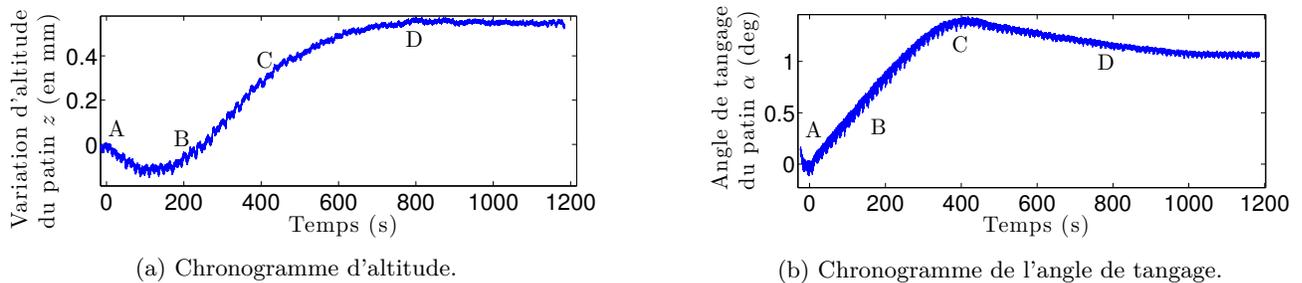


FIGURE **E.2**: Chronogrammes de l'altitude du patin et de l'angle de tangage  $\alpha$ .

**Paramètres** :  $k = 273 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 33,2 \text{ g}$ ,  $v_S = 200 \text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$ ,  $d = 337 \text{ }\mu\text{m}$ .

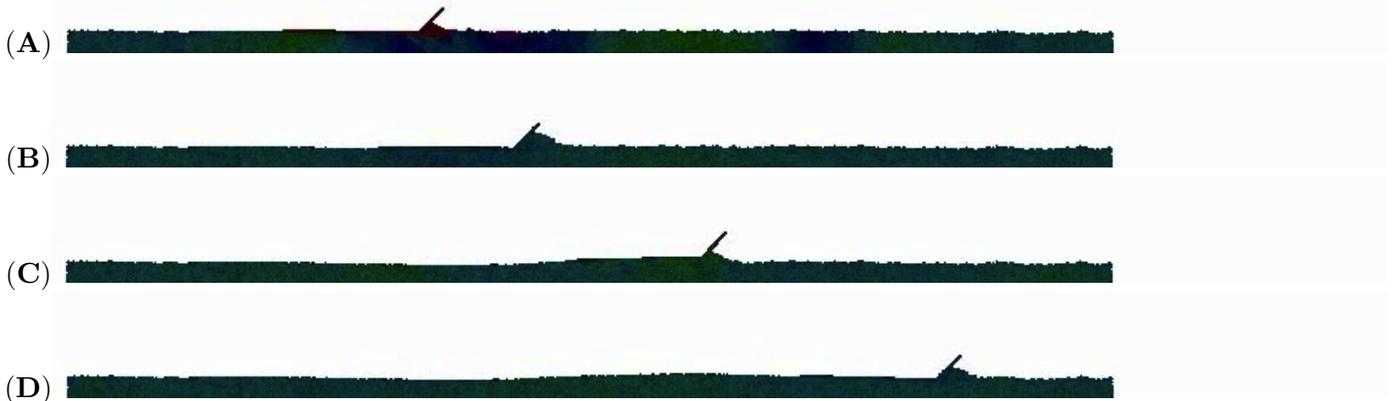


FIGURE **E.3**: Simulations aux mêmes paramètres que **E.2**. (Baptiste Percier)

## Annexe F : Simulations numériques

Cette série de simulations a été effectuée par Baptiste Percier dans le cadre de sa thèse au laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon. Le code utilisé permet de calculer, sur chaque grain, les forces exercées ainsi que les moments. En intégrant sur des pas de temps réguliers le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique, on peut déterminer la trajectoire de chacun des grains. On obtient alors les courbes ci-dessous (figure **F.1**). Les valeurs de  $k$  et de  $m$  sont délicates à choisir car la simulation ne prend pas en compte la troisième dimension. Un patin numérique de masse équivalente au patin réel serait alors trop lourd. Le patin choisi fait 300 fois la masse d'un grain de la simulation, soit  $m_{\text{patin}} \approx 9,3 \text{ mg}$  si on prend  $d = 300 \text{ }\mu\text{m}$ . La raideur est de  $k = 50,8 \text{ mN.m}^{-1}$ . La pulsation  $\omega_0 = \sqrt{k/m_{\text{patin}}} \approx 74 \text{ rad.s}^{-1}$  est la même que celle de l'expérience.

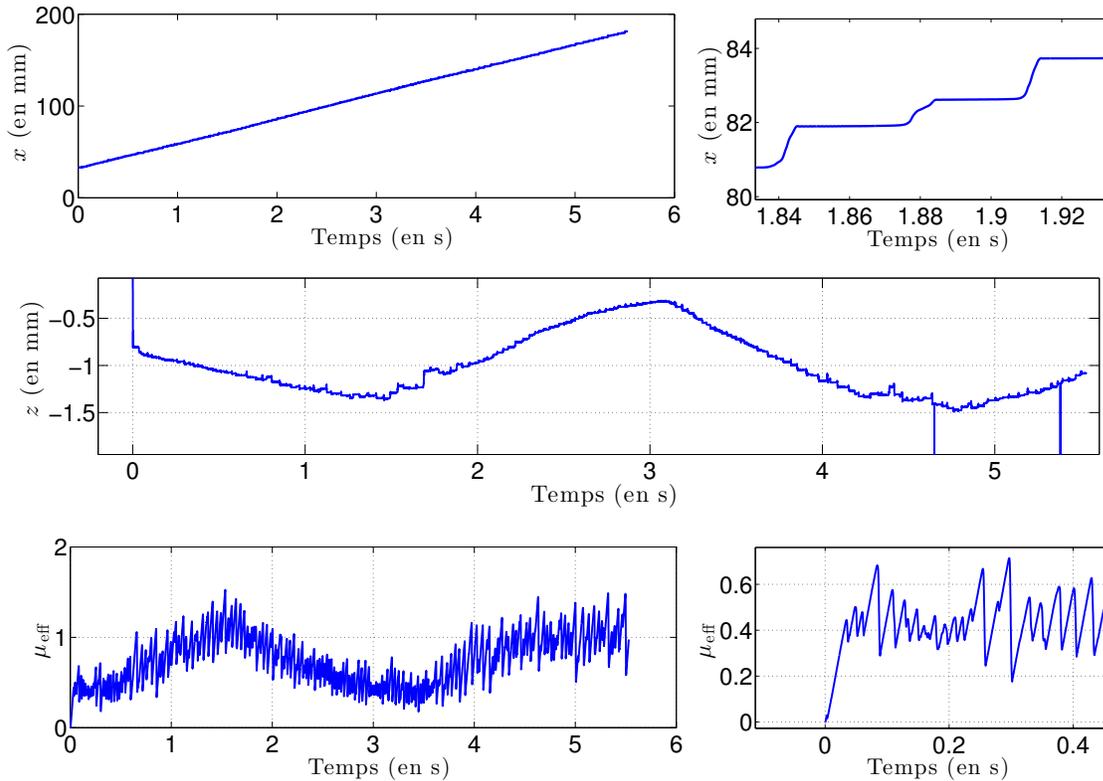


FIGURE **F.1**: Résultat des simulations de position du patin  $x$ , d'altitude  $z$  et du paramètre  $\mu_{\text{eff}}$ , pour une raideur  $k = 50,8 \text{ mN.m}^{-1}$ , une masse  $m_{\text{patin}} \approx 9,3 \text{ mg}$ , pour 20000 grains de taille  $d = 300 \text{ }\mu\text{m}$  et  $v_S \approx 280 \text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$ .

On observe les mêmes caractéristiques que sur nos acquisitions, à savoir un *stick-slip* irrégulier, et le phénomène de « wahshboard ». De plus, en étudiant la variation du rapport  $r = \Delta t_{\text{slip}}/\Delta t_{\text{stick}}$  – figure **F.2**, on retrouve les mêmes caractéristiques que celles décrites en III.1 dans le rapport.

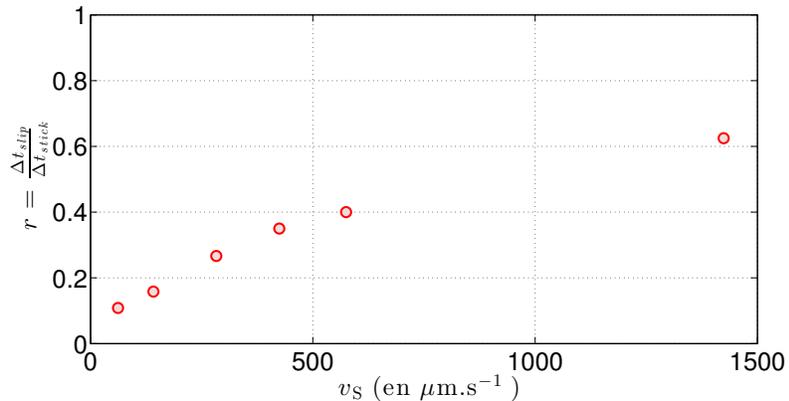


FIGURE **F.2**: Évolution de  $r$  avec  $v_S$ . Mêmes paramètres.