
Friction granulaire :

Régimes dynamiques et diagramme d'état

Résumé : *Lorsqu'un système masse-ressort est tracté sur un substrat solide fixe, on peut observer l'alternance de phases d'arrêt et de phases de glissement. Ce phénomène est nommé "stick-slip" (en français "collé-glissé").*

Dans le cas du cisaillement en milieu granulaire, des travaux précédents ont montré, que dans certaines conditions, il est possible d'annihiler cette alternance de collés et de glissés et d'aboutir à d'autres régimes. Effectivement, ils évoquent l'existence d'oscillations inertielles (régies par le système masse-ressort) ou encore d'un régime de "steady-sliding" (ou "glissement continu"). Bien que les transitions entre ces différents régimes aient déjà été un peu étudiées, aucun diagramme des régimes n'a encore été établi expérimentalement à ce jour. Il est intéressant de replacer, d'un point de vue expérimental, les zones correspondant aux trois régimes dans un diagramme raideur-vitesse de traction.

Nous avons réalisé l'étude expérimentale d'un système constitué d'un patin tracté par l'intermédiaire d'une lame-ressort de raideur k à vitesse constante v sur un lit de grains. Pour différentes raideurs, nous avons exploré une large gamme de vitesses de traction et nous avons caractérisé les différents régimes où les deux paramètres k et v semblent gouverner la dynamique du système.

Les expériences réalisées au cours du stage semblent démentir l'existence d'un régime inertiel pur. A faible vitesse de traction, le système avance par à-coups (stick-slip), puis il existe une vitesse critique au-delà de laquelle il y a toujours un glissement continu du patin.

Mots clefs : *granulaire, stick-slip, inertiel, steady-sliding, transition, cisaillement*

Stage encadré par :

Valérie Vidal et Henri Lastakowski

valerie.vidal@ens-lyon.fr

henri.lastakowski@ens-lyon.fr

Laboratoire de Physique (UMR CNRS 5672)

ENS de Lyon

46, allée d'Italie

F-69364 LYON CEDEX 07, FRANCE

<http://www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE/>

Table des matières

1	Introduction	1
2	Présentation de l'expérience	2
2.1	Matériel et dispositif expérimental	2
2.2	Caractérisation des grains	3
2.3	Reproductibilité	5
2.4	Incertitudes	5
3	Résultats	6
3.1	Différentes dynamiques du patin	6
3.2	Caractérisation des transitions	6
3.2.1	Transition stick-slip/régime inertiel	6
3.2.2	Transition vers le steady-sliding	8
3.2.3	Etude de la fréquence moyenne du signal	10
3.3	Diagramme $k - v$	13
3.4	Normalisation	14
4	Discussion	16
5	Conclusion et perspectives	18
	Bibliographie	19
	Annexes	20

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement Valérie et Henri pour leur implication, leurs conseils et leur sympathie. Je remercie également Jean-Christophe Géminard, à l'origine de l'expérience sur laquelle j'ai travaillé. Enfin, un grand merci à toute l'équipe du labo pour l'accueil et la bonne humeur permanente !

1 Introduction

Dans le cas du déplacement sur un solide S_2 d'un solide S_1 de masse m relié à un ressort de raideur k dont la seconde extrémité avance à vitesse v constante (FIGURE 1a), on constate l'existence d'un mouvement saccadé : le "stick-slip". Cette alternance de "collés" et de "glissés" caractérisée par des phases d'arrêt complet de S_1 entrecoupées par des phases de glissement se comprend aisément à partir des lois de Coulomb qui font intervenir les coefficients de frottement statique μ_s et dynamique μ_d (cf Annexe A). Tant que la force tangentielle T entre les deux solides est inférieure à une force seuil $F_s = \mu_s mg$, S_1 reste immobile. Dès que $T = F_s$, il y a initiation d'un glissement durant lequel T prend une valeur constante $F_d = \mu_d mg$ jusqu'à annulation de la vitesse. Au moment où la vitesse s'annule, un nouveau cycle de "collé" ("stick")-"glissé" ("slip") recommence. A grande vitesse de traction, les phases d'arrêt deviennent infiniment courtes.

(À noter que suivant les lois de Coulomb, μ_s et μ_d sont des constantes, cependant Marone [1] pointe une faible dépendance de μ_s en $\log(t_c)$ où t_c est le temps de contact, et de μ_d en $\log(v)$.)

Dans le cas des milieux granulaires, en pratique, Nasuno et al. [2] évoquent l'existence de trois régimes différents (FIGURE 1b) lorsqu'un solide S_1 est tracté sur un lit de grains. Pour des faibles vitesses de traction, on retrouve bien le stick-slip typique de la friction solide-solide. Cependant, à des vitesses intermédiaires, les auteurs observent un régime oscillant de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ régi par le système masse-ressort constitué par le ressort et S_1 . Dans ce régime, appelé régime inertiel, l'allongement du ressort suit une sinusoïde et la vitesse s'annule de façon ponctuelle, c'est-à-dire que les phases d'arrêt sont infiniment courtes. Enfin, pour des très grandes valeurs de v , Nasuno et al. [2] rapportent un glissement continu ("steady-sliding"), caractérisé par l'absence d'annulation de la vitesse. Dans ce régime, l'allongement du ressort subit des fluctuations plus désordonnées sans périodicité apparente.

Lacombe et al. [3] ont établi numériquement un diagramme $k-v$ des régimes (FIGURE 2a) reprenant les paramètres expérimentaux de Nasuno et al. [2], cependant les données ne semblent pas concorder. L'objectif de ce stage était d'établir expérimentalement un diagramme $k-v$ des régimes de friction granulaire, ce qui n'a jamais été fait auparavant. Afin de mener à bien ce projet, nous avons travaillé sur un dispositif permettant de tirer un patin sur une couche granulaire à l'aide d'une lame-ressort avançant à vitesse constante v ; et nous avons étudié le signal de déflexion de la lame qui nous permet de remonter à la dynamique résolue en temps du patin.

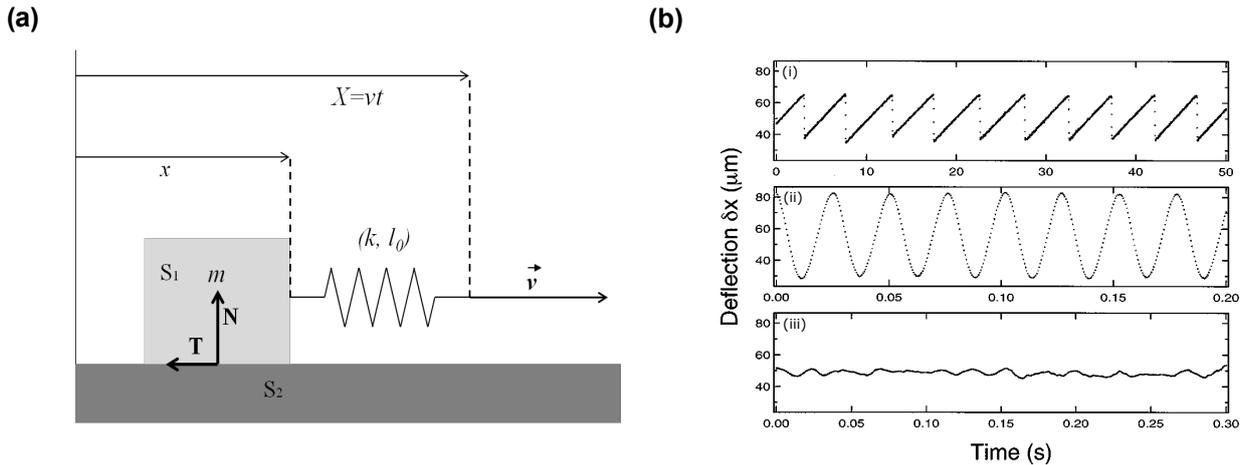


FIGURE 1 – (a) Schéma d'un système masse-ressort dans le cas de la friction solide/solide, (b) Friction granulaire : trois signaux de déflexion d'une lame-ressort présentés par Nasuno et al. [2] [$k = 1077$ N/m, $d = 70 - 110$ μm , $m = 10.90$ g] : (i) stick-slip [$v = 5.67$ $\mu\text{m/s}$], (ii) régime inertiel [$v = 5.67$ mm/s], (iii) steady-sliding avec fluctuations [$v = 11.33$ mm/s].

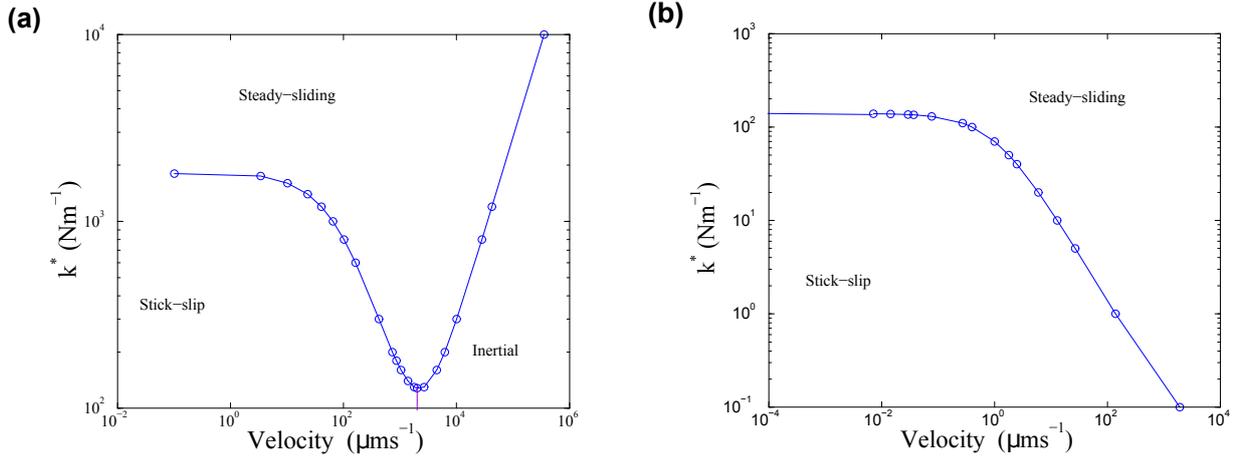


FIGURE 2 – Diagrammes des phases de l'article de Lacombe et al. [3] établis numériquement : (a) en milieu granulaire sec avec les paramètres de Nasuno et al. [2], (b) en milieu granulaire humide. On peut remarquer que l'ordre d'apparition des régimes en (a) pour $k = 1077 \text{ N/m}$ ne concorde pas avec les résultats présentés en FIGURE 1b.

2 Présentation de l'expérience

2.1 Matériel et dispositif expérimental

L'expérience consiste à tracter un patin en plexiglas possédant une surface de contact rectangulaire ($9 \times 6 \text{ cm}^2$) (FIGURE 3a) qui vient cisailer une couche de grains remplissant une hauteur h (de quelques centimètres) d'une cuve rectangulaire ($50 \times 15 \text{ cm}^2$). Ce récipient est fixé à un bâti métallique posé horizontalement sur une table. En outre, est attachée au bâti, sur toute la longueur de la cuve, une platine de translation (Schnaefler Technologies Sechnr) reliée à un moteur, permettant le déplacement d'une pièce métallique au-dessus de la surface de grains parallèlement à la longueur, et à hauteur fixée. Cette pièce possède un site de fixation pouvant accueillir, en encastrement, une lame métallique parallélépipédique qui acquiert alors un comportement analogue à celui d'un ressort, dont la raideur peut être déterminée à partir des caractéristiques intrinsèques du matériau et des dimensions de la lame [4]. Une bille collée sur le patin permet d'assurer un contact ponctuel avec la lame-ressort en un point assez proche de son extrémité libre. Lorsque le moteur est mis en marche, l'extrémité encastree de la lame se déplace à vitesse constante, et grâce au contact ponctuel, le patin est entraîné. Afin de mesurer la déflexion Δx de la lame, on utilise un capteur inductif (Baumer, IPRM 12I9505/S14), rapide et précis (possédant une résolution de l'ordre de $0.05 \mu\text{m}$ et permettant des fréquences d'acquisition de 1000 à 10000 Hz) relié à un ordinateur. Les acquisitions se font par le biais du logiciel Labview. Au cours de nos expériences, nous avons utilisé trois lames ($5 \times 1 \text{ cm}^2$), en acier inoxydable (de densité 7.7) d'épaisseurs 150, 250 et $400 \mu\text{m}$. La détermination de la raideur des lames est expliquée en Annexe B. Afin de limiter au maximum les vibrations qui ont une influence sur le stick-slip [5], les pieds du bâti reposent sur de la mousse, et les moteurs pas-à-pas utilisés lors de la mise en place de l'expérience il y a quelques années, ont été remplacés par des moteurs à courant continu (Crouzet, 5N.m, 17W, 24V, 3000RPM) reliés à la platine de translation par un découpleur mécanique (accouplement à soufflet MFB-20C, NBC) et alimentés en tension par une alimentation variable (ALF2902M, 5V-29V) reliée à un oscilloscope (Agilent Technologies, DSO1024A, 200MHz) afin de contrôler la tension délivrée. L'utilisation sur les moteurs de 5 réducteurs différents (Crouzet 1.04RPM, 10RPM, 100RPM ; Drive-System Europe, DSMP420-24-14-B-F : 420RPM et DSMP420-24-4-B-F : 1445RPM) dont la calibration est expliquée en Annexe C, permet de balayer quasiment intégralement une gamme de vitesses de translation s'étendant d'environ $20 \mu\text{m/s}$ à 7 cm/s .

Afin de limiter le phénomène d'accumulation des grains à l'avant lors du déplacement [2], le patin a été biseauté. Pour assurer un contact grains/grains, une unique couche des mêmes grains que ceux présents dans la cuve est collée sous la surface inférieure du patin avec du scotch double-face (Advance).

Cette couche étant propre à chaque batch de grains, la masse du patin n'est pas la même pour chaque gamme de diamètres. Les différentes masses sont reportées dans la TABLE 1.

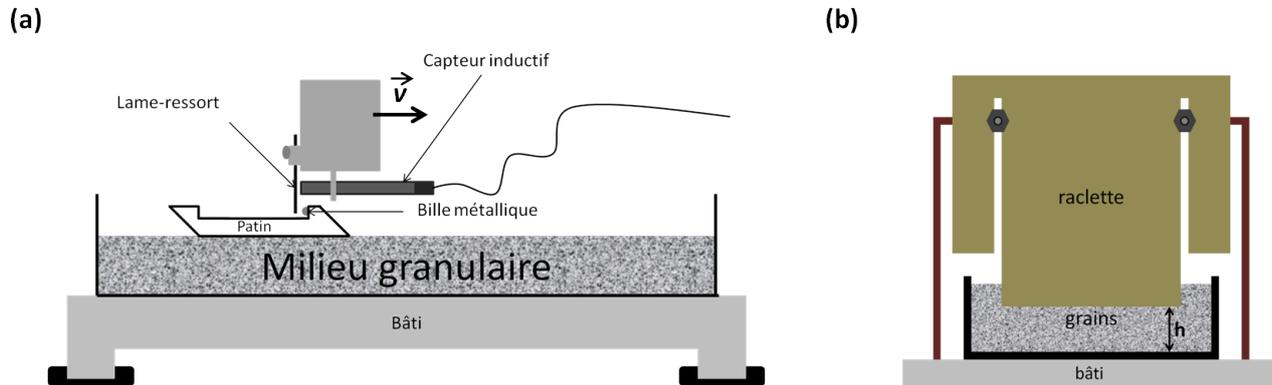


FIGURE 3 – (a) Dispositif expérimental. (b) Schéma en coupe de la cuve avec la raclette permettant de pré-cisailler les grains et d'imposer la hauteur de la couche granulaire.

Pour préparer le système de la manière la plus reproductible possible, la couche de grains est pré-cisaillée à l'aide d'une raclette représentée en FIGURE 3b. Cette dernière permet, entre autres, d'avoir une hauteur de grains constante ($h \simeq 1.5$ cm) lors des acquisitions successives. Le dernier lissage des grains se fait systématiquement dans le sens de déplacement du patin.

Pour éviter de casser un élément à haute vitesse (notamment pour éviter tout choc de la pièce en translation en bout de platine), un dispositif de sécurité consiste à relier l'alimentation au moteur par des jonctions de fils dénudés puis torsadés dont la longueur est étudiée pour qu'il y ait rupture au bout d'une certaine longueur de course du patin, provoquant l'arrêt instantané du moteur et donc du mouvement.

2.2 Caractérisation des grains

Pour étudier l'influence de la taille des grains sur les transitions recherchées entre les différents régimes, nous utilisons des billes de verre borosilicate sphériques de différents diamètres (Wheelabrator 45 – 90 μm , 75 – 150 μm , 106 – 212 μm , 180 – 300 μm et 425 – 600 μm). Afin de caractériser leur taille moyenne et leur distribution, nous les observons à la loupe binoculaire (Wild Makroskop Mk20, HEERBRUGG, objectif MAKROZOOM 1/5, LEICA) (FIGURE 4a) puis nous traitons les images avec le logiciel ImageJ. Pour déterminer la distribution des diamètres d nous choisissons aléatoirement un certain nombre de grains dans les images, en approximons le contour à l'aide d'ellipses dont nous récupérons l'aire A en pixels. Les grains possédant relativement une bonne sphéricité, l'aire est donnée par $A = \pi d^2/4$. En prenant l'image d'une mire, on trouve la correspondance pixel/taille réelle. Les données ont été résumées dans un histogramme avec le logiciel Matlab (FIGURE 4b-f).

Pour la plupart des gammes de grains utilisés, une approximation gaussienne donne une assez bonne idée de la distribution en taille. Par la suite, pour les courbes où interviennent le diamètre d , on prendra la valeur moyenne de la gaussienne. Les données concernant les différents types de grains ont été résumées en TABLE 1.

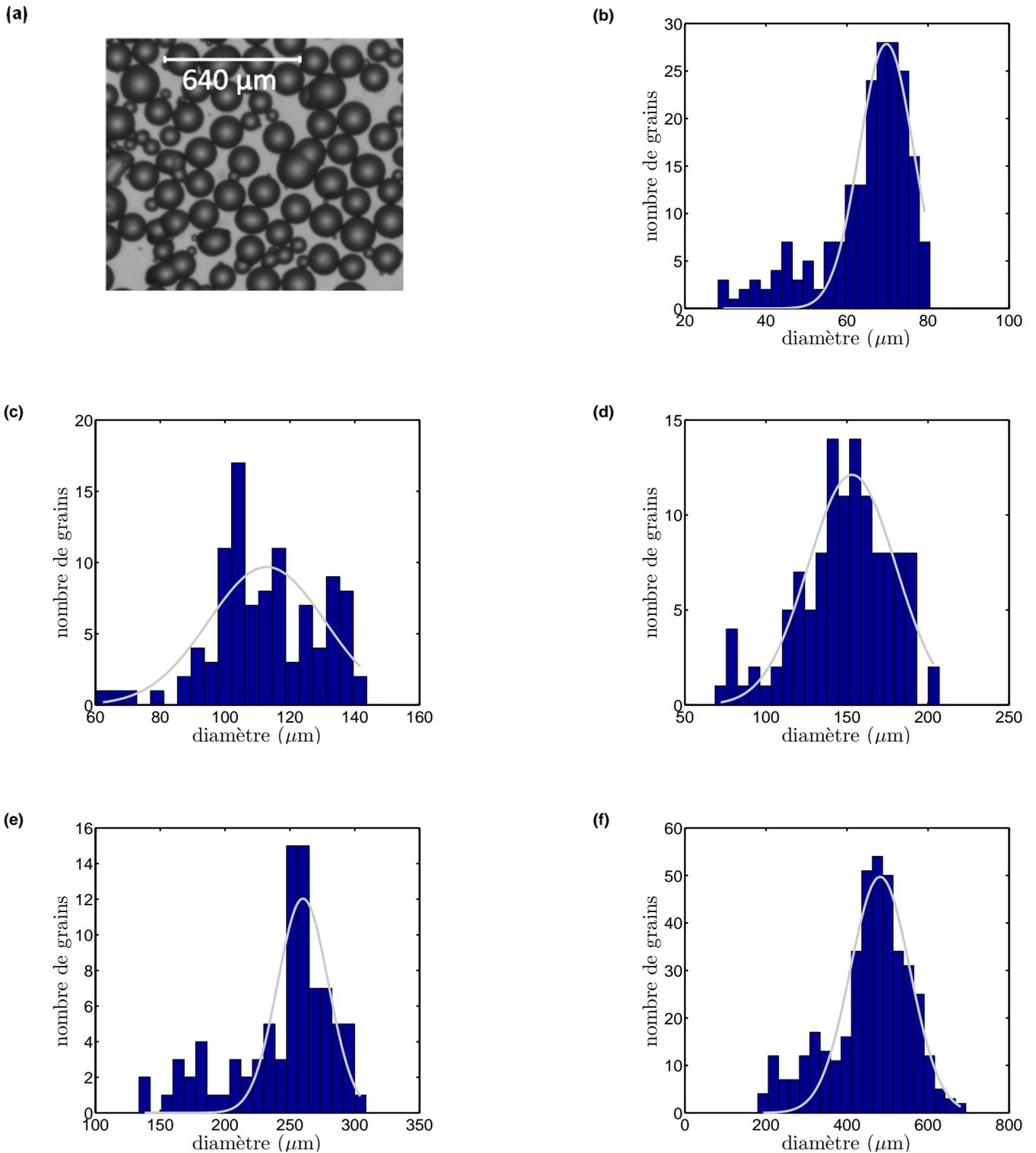


FIGURE 4 – (a) Exemple d'image de grains obtenue avec une loupe binoculaire [batch 106 – 212 μm]. Distribution des diamètres : (b) verre 45 – 90 μm, (c) verre 75 – 150 μm, (d) verre 106 – 212 μm, (e) verre 180 – 300 μm, (f) verre 425 – 600 μm. Les courbes grises représentent des ajustements gaussiens.

batch	d (μm)	σ (μm)	N	m (g)
45 – 90 μm	70	7	200	22.65
75 – 150 μm	113	18	100	22.90
106 – 212 μm	153	27	120	23.18
180 – 300 μm	260	20	85	23.65
425 – 600 μm	482	74	400	25.31

TABLE 1 – Caractérisation des différents batchs de grains : données fournisseur (Wheelabrator), diamètre moyen d , écart type σ , nombre de grains analysés N , masse m du patin incluant la monocouche de grains collée en-dessous.

2.3 Reproductibilité

En milieu granulaire, du fait du nombre important d'interactions dans le système, la reproductibilité des expériences est moins évidente que pour le cas des solides [6]. Pour pouvoir caractériser complètement un comportement dans un tel milieu, il est souvent indispensable de connaître son histoire (par exemple la manière de préparer les grains, de les positionner les uns par rapport aux autres...). C'est pour cela qu'il est important de multiplier les acquisitions afin de vérifier la reproductibilité des résultats, et de veiller à préparer le système le plus identiquement possible avant chaque acquisition.

Le sens de pré-cisaillement des grains ne semble pas avoir de réel impact sur les signaux étudiés, mais dans la suite, le dernier lissage sera toujours fait dans le sens du déplacement du patin. Enfin, pour chaque acquisition, il est important de relever la température, et surtout l'humidité (hygromètre Testo 608-H2 placé près de la manipulation), car les grains (surtout ceux de petite taille) peuvent devenir plus ou moins cohésifs en fonction de l'humidité ambiante, ce qui peut induire des différences sur les résultats. Au cours des acquisitions, pour une même taille de grains, nous nous efforçons au maximum de réaliser toutes les mesures dans une plage d'humidité ne variant pas de plus de 3-4%. Typiquement, les mesures ont été réalisées pour des températures comprises entre 26°C et 30°C et des taux d'humidité avoisinant les 40%.

2.4 Incertitudes

Au cours de l'analyse des mesures nous avons considéré différentes sources d'erreur. Par exemple, les incertitudes introduites lors de la détermination des différentes raideurs se repercutent sur le calcul de f_0 , la fréquence caractéristique du système (vérifiant $2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$). Lors de la détermination de L (distance entre la ligne de fixation de la lame et le point de contact avec le patin), la même mesure a été réalisée plusieurs fois avec un pied à coulisse et nous avons évalué l'écart entre les deux valeurs extrêmes trouvées. Nous avons pu constater que l'incertitude était de l'ordre de $\delta L \simeq 100 \mu\text{m}$. Sur l'épaisseur ε des lames, on a $\delta\varepsilon \simeq 5 \mu\text{m}$. En outre, au début de son déplacement, le patin charrie un tas de grains devant lui. A partir d'une certaine vitesse, au cours du déplacement, il monte puis continue d'avancer sur cet amas. Ceci entraîne une variation d'altitude du patin de l'ordre du millimètre. Le point de contact avec la lame étant alors modifié, au cours d'une même acquisition, la raideur n'est pas tout-à-fait constante. Enfin, du fait des grains charriés, il peut aussi y avoir des petites fluctuations de la masse effective du patin. Pour les calculs, l'incertitude est de l'ordre de $\delta m = 0.5 \text{ g}$ (en considérant que des grains sont charriés sur toute la largeur avant du patin, sur une hauteur de l'ordre de quelques millimètres). Cependant, la masse des grains charriés est difficile à évaluer et dépend peut-être de la taille des grains utilisés. Les deux derniers points ont également des conséquences sur la précision de la valeur de la fréquence caractéristique (TABLE 2).

k (N/m)	f_0 ($d = 113 \mu\text{m}$)	incertitude sur f_0 (%)
870	31.0 Hz	5.1
583	25.4 Hz	4.6
424	21.7 Hz	4.2
372	20.3 Hz	7.0
212	15.3 Hz	6.2
142	12.5 Hz	5.8
103	10.7 Hz	5.5

TABLE 2 – Incertitude relative sur la fréquence caractéristique du régime inertiel f_0 : raideur k , exemple de valeurs de f_0 pour $d = 113 \mu\text{m}$, incertitude sur f_0 quelle que soit la valeur de d . A noter que la valeur de f_0 change légèrement d'un batch de grains à l'autre du fait de la variation de la masse m .

3 Résultats

3.1 Différentes dynamiques du patin

Pour un même type de grains et à raideur fixée, il est possible, en faisant varier la vitesse de traction, d'observer différentes allures du signal de déflexion de la lame, et donc différentes dynamiques du patin.

A faible vitesse v , on retrouve un signal typique du stick-slip avec une alternance de phases linéaires ascendantes (correspondant à des annulations de la vitesse du patin) et de portions décroissantes de plus courte durée (FIGURE 5a). Lorsque l'on augmente progressivement la vitesse, on remarque que la courbe tend à se symétriser et prend l'allure d'une sinusoïde (FIGURE 5b), ce qui pourrait correspondre au régime inertiel attendu. A grande vitesse, après quelques oscillations amorties, des fluctuations assez irrégulières d'amplitude assez faible perdurent jusqu'à la fin du signal (FIGURE 5c).

Enfin, à des vitesses intermédiaires, il est parfois possible d'observer des transitions d'un régime à l'autre au cours de la même acquisition ; le signal présentant tantôt des phases oscillatoires d'amplitude importante avec annulation de la vitesse du patin, tantôt un glissement continu caractérisé par des fluctuations de faible amplitude. Pour les grains de petite taille, cette transition est beaucoup plus marquée en amplitude que pour les grains de plus gros diamètres (FIGURE 5d).

3.2 Caractérisation des transitions

3.2.1 Transition stick-slip/régime inertiel

Afin de caractériser cette transition, on peut penser à plusieurs critères. Le critère que nous avons retenu est l'évolution du ratio "temps de descente"/"temps de montée". En effet, sur le signal brut de déflexion de la lame comme fonction du temps, lors du stick-slip, on est censé obtenir un signal en dents de scie (FIGURE 5a), périodique, où sont alternées des portions affines à coefficient directeur positif (correspondant aux phases de stick) et des portions de sinusoïde (phases de slip) contenant les phases de décroissance. Les portions croissantes étant théoriquement plus longues que les décroissantes, le rapport $r_{desc/mont}$ de la moyenne des temps de descente $\langle t_{desc} \rangle$ par la moyenne des temps de montée $\langle t_{mont} \rangle$ doit être inférieur à 1 lorsque le système est régi par le stick-slip. Si un régime inertiel est atteint, la déflexion de la lame est alors décrite par un signal sinusoïdal, et ce rapport vaut exactement 1. Afin de calculer $r_{desc/mont}$, nous avons écrit un programme Matlab permettant dans un premier temps de lisser les courbes, puis d'en repérer les minima et maxima, et enfin d'en déduire les temps recherchés (FIGURE 6).¹

Pour un même type de grains, l'évolution de $r_{desc/mont}$ ne semble pas dépendre de la raideur de la lame (FIGURE 7). En outre, on remarque que ce coefficient tend bien vers 1, mais il ne semble pas y

1. Sur certains signaux de stick-slip, il est possible d'observer un léger fluage entre le stick et le slip, correspondant à un adoucissement de la pente dans les portions croissantes. Cependant, ce phénomène est ici négligé et n'a pas de réelle influence sur l'étude de la symétrie des signaux.

avoir de transition franche. On a plutôt affaire à un passage continu et asymptotique du stick-slip vers une limite correspondant peut-être au régime inertiel.

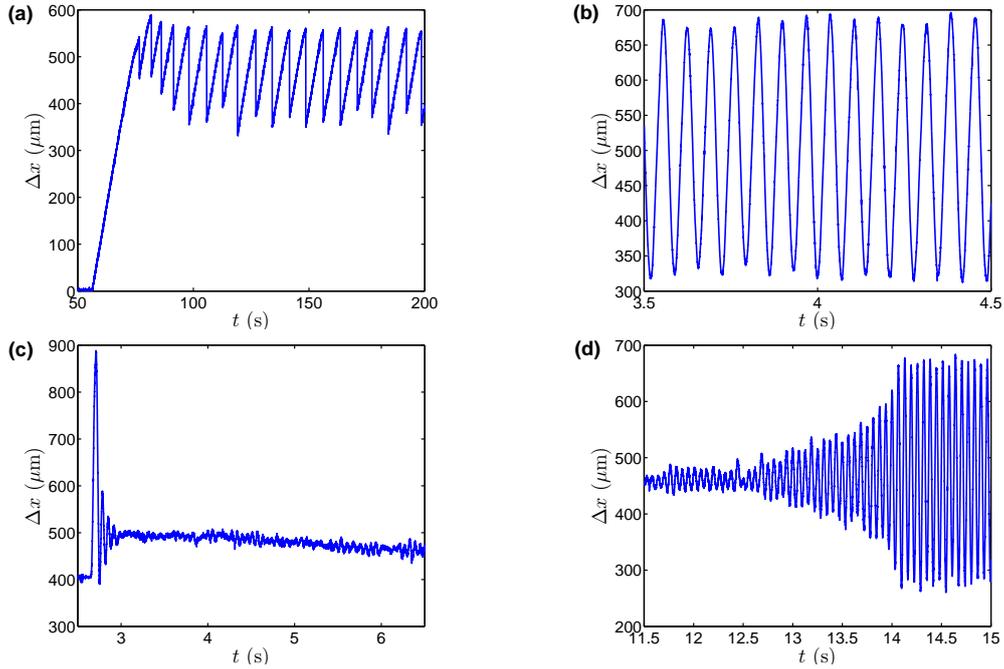


FIGURE 5 – Quatre types de signaux observables pour la déflexion de la lame Δx en fonction du temps t [$d = 70 \mu\text{m}$, $k = 212 \text{ N/m}$] : (a) stick-slip [$v = 28.9 \mu\text{m/s}$], (b) quasi-sinusoïde [$v = 12.4 \text{ mm/s}$], (c) steady-sliding [$v = 31.1 \text{ mm/s}$], (d) régime transitoire [$v = 16 \text{ mm/s}$]. Pour (a), la portion de fluctuations autour d'une valeur constante visible au début du signal représente une phase où il n'y a pas encore de contact lame/patin ; la discontinuité marquant une première phase croissante correspond au début de contact lame-ressort/bille ; pour (c), la lame et le patin étaient déjà en contact au début, la discontinuité correspond à la mise en route du moteur. A grande vitesse, le début du mouvement se caractérise toujours par un régime transitoire d'oscillations amorties.

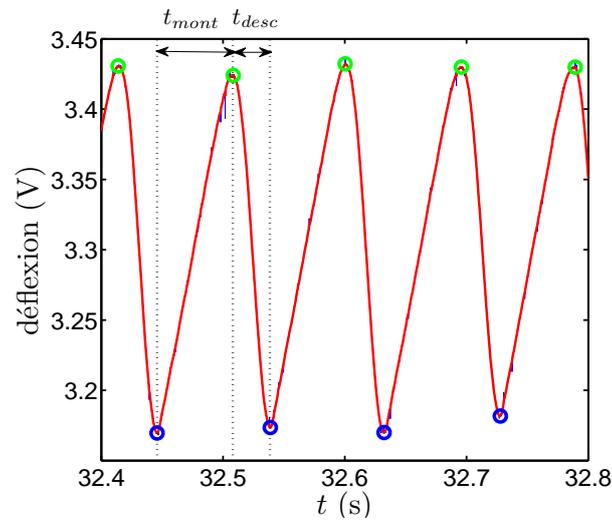


FIGURE 6 – Méthode de détermination de $r_{desc/mont} = \langle t_{desc} \rangle / \langle t_{mont} \rangle$ [$d = 70 \mu\text{m}$, $k = 212 \text{ N/m}$, $v = 2.9 \text{ mm/s}$].

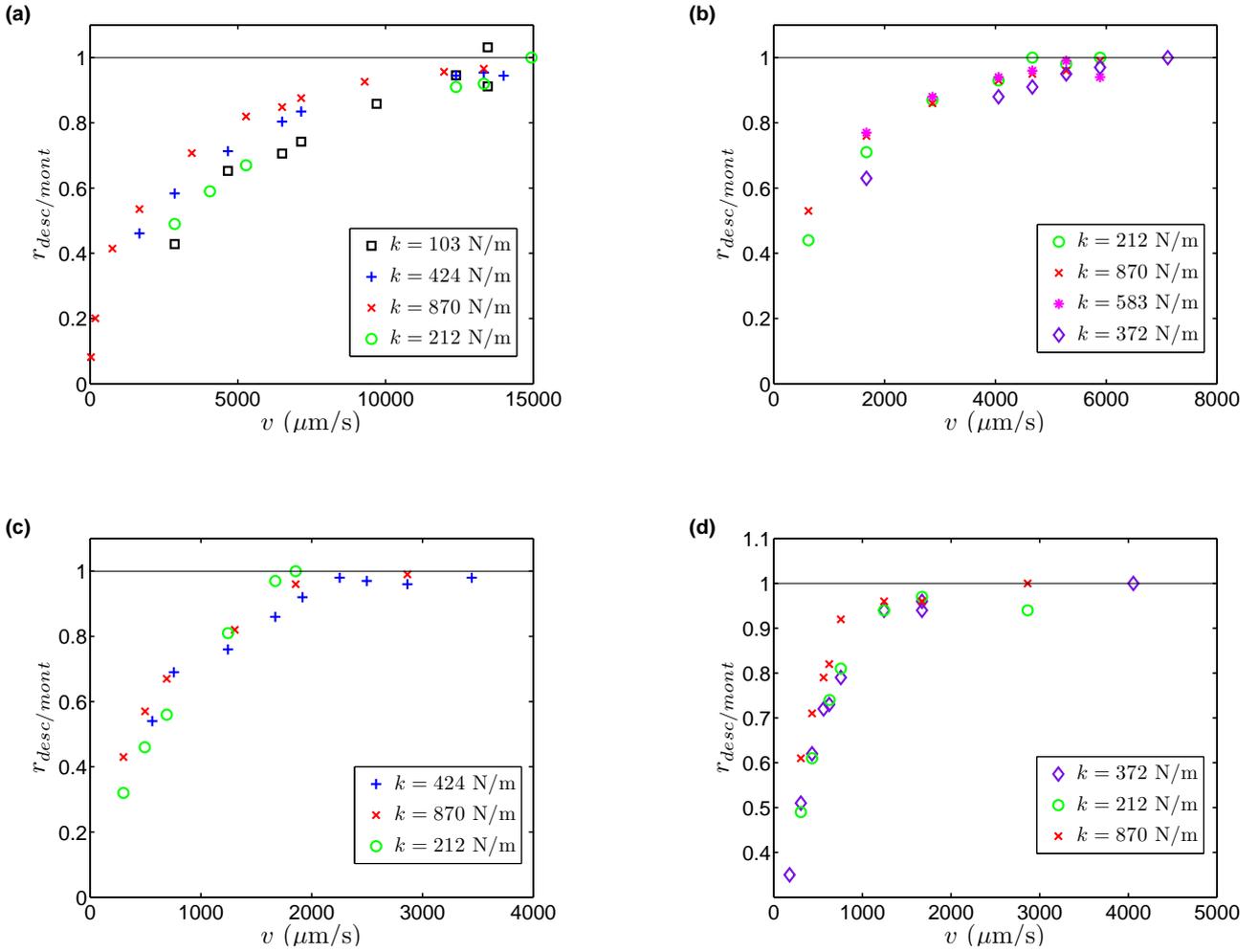


FIGURE 7 – Evolution de $r_{desc/mont}$ en fonction de la vitesse de traction v : (a) $d = 70 \mu\text{m}$, (b) $d = 113 \mu\text{m}$, (c) $d = 153 \mu\text{m}$, (d) $d = 260 \mu\text{m}$.

Que ce soit dans le cas du stick-slip ou du régime inertiel, les signaux de vitesse du patin comportent des annulations périodiques. Par la suite, on parlera de régime inertiel pour $r_{desc/mont} > 0.90$.

3.2.2 Transition vers le steady-sliding

Pour les grains les plus petits ($d < 150 \mu\text{m}$), la transition vers le glissement continu est nettement caractérisée par un brusque saut d'amplitude. Typiquement, il y a un facteur 10 d'amplitude sur le signal de déflexion entre le stick-slip/régime inertiel et le steady-sliding (FIGURE 5d P. 7). Nous avons confirmé que cette variation en amplitude correspond bien au changement de régime, en étudiant la présence ou l'absence d'annulations périodiques sur les signaux de vitesse du patin déduits des signaux de déflexion.

Cependant, l'amplitude ne constitue pas le critère optimal pour caractériser le passage au steady-sliding. Effectivement, pour les grains de plus gros diamètre, la transition est beaucoup moins nette en amplitude (FIGURE 8). Nous avons donc préféré retenir l'étude du signal de la vitesse instantanée du patin v_p pour caractériser ce changement de régime.

En faisant une calibration du capteur pour chaque signal de déflexion (cf Annexe D), on peut déduire le déplacement du patin x au cours du temps, puis en dérivant temporellement celui-ci, sa

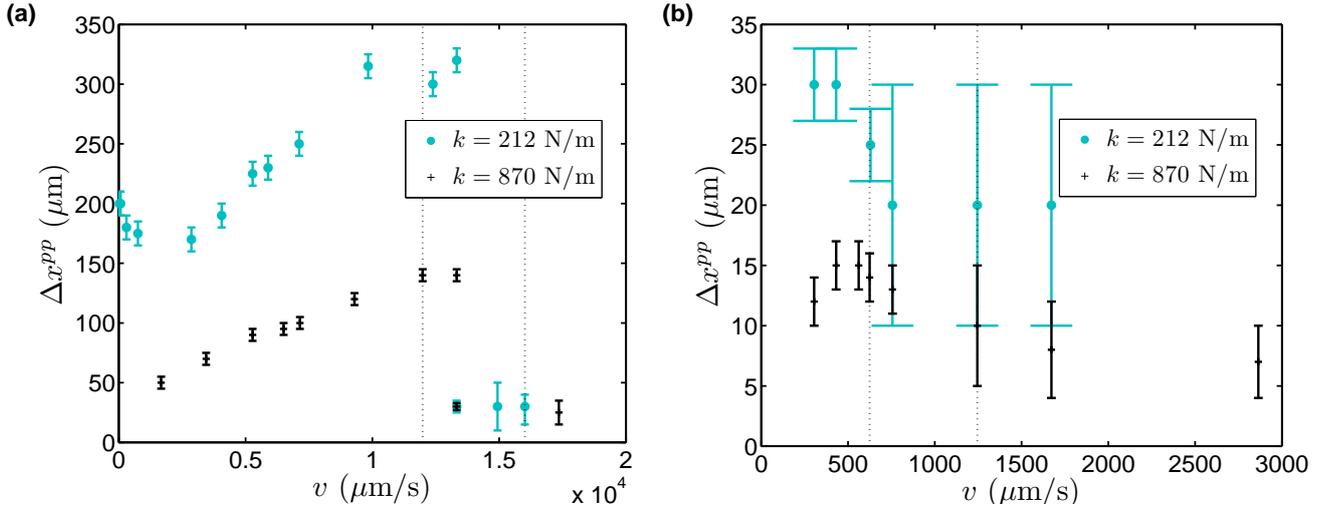


FIGURE 8 – Variation de l'amplitude crête à crête moyenne de déflexion de la lame Δx^{pp} en fonction de la vitesse de traction v : (a) $d = 70 \mu\text{m}$, (b) $d = 260 \mu\text{m}$. Pour les petits grains, la transition au steady-sliding se caractérise par un brusque saut d'amplitude. Les pointillés verticaux matérialisent les zones de stick-slip (à gauche) et de steady-sliding (à droite). Les barres d'incertitude caractérisent les fluctuations plus ou moins importantes de l'amplitude sur un même signal.

vitesse instantanée $v_p = \dot{x}$. Connaître cette dernière peut fournir un critère pour différencier le steady-sliding du stick-slip puisque les phases de "stick" correspondent à des paliers où $v_p = 0$ (FIGURE 9). En steady-sliding, la vitesse instantanée du patin est strictement positive à tout instant du mouvement (ceci n'interdit pas cependant d'éventuelles oscillations ou fluctuations de cette dernière). Nous avons donc écrit un programme permettant de caractériser les phases d'arrêt. A cause du bruit expérimental, le signal ne comporte jamais de paliers stricts où $v_p = 0$. Nous définissons alors les phases d'arrêt comme les portions où v_p est inférieure à une valeur seuil que nous fixons. Sur le signal de vitesse du patin, on regarde alors la fraction de temps r_{stick} passée au-dessous de ce seuil (typiquement $\langle v_p \rangle / 100$ où $\langle v_p \rangle$ est la vitesse moyenne du patin (on vérifie bien que $\langle v_p \rangle = v$)). Les courbes tracées pour les différents diamètres de grains semblent indiquer qu'il n'a pas de forte dépendance en k (FIGURE 10).

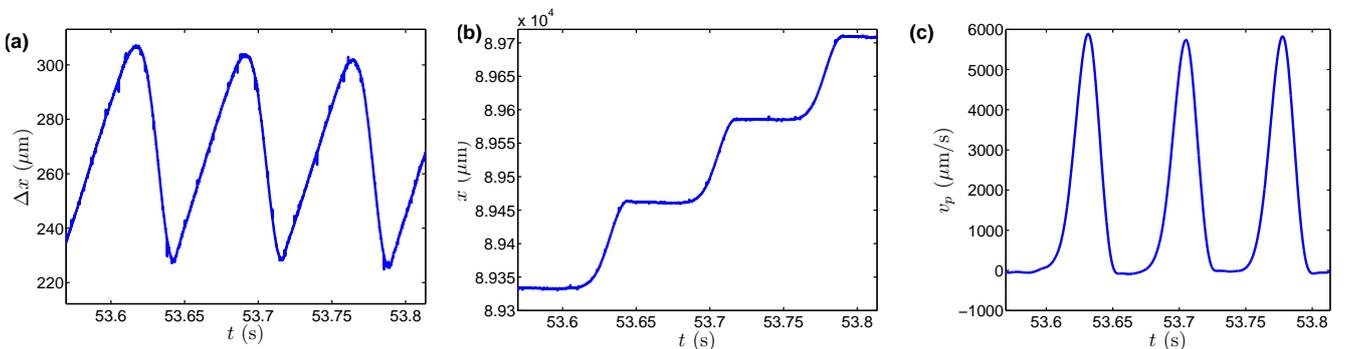


FIGURE 9 – Régime de stick-slip : mise en parallèle d'un signal de déflexion de la lame (a), avec le déplacement brut du patin (b), et sa vitesse instantanée v_p (c) déduite après lissage du déplacement [$d = 70 \mu\text{m}$, $v = 1672 \mu\text{m/s}$, $k = 424 \text{ N/m}$].

Durant l'étude de ces phases, les difficultés rencontrées dans la détermination précise des coefficients lors de la calibration du capteur pour chaque acquisition, ainsi que l'ajustement des paramètres de lissage (qu'il faut modifier en fonction des différents signaux afin de faire coller au mieux la courbe

de déplacement lissée à la courbe réelle en y retirant suffisamment de fluctuations), sont vecteurs d'incertitudes.

Par la suite les signaux correspondant au steady-sliding sont les signaux ne présentant aucune annulation de vitesse après initialisation du déplacement du patin. Afin de définir une vitesse critique v_c de transition au steady-sliding, pour chaque batch de grains, nous avons considéré la valeur médiane de la bande délimitée par la vitesse de traction en-deçà de laquelle on est toujours en stick-slip et celle au-delà de laquelle on est toujours en steady-sliding, quelle que soit la valeur de k .

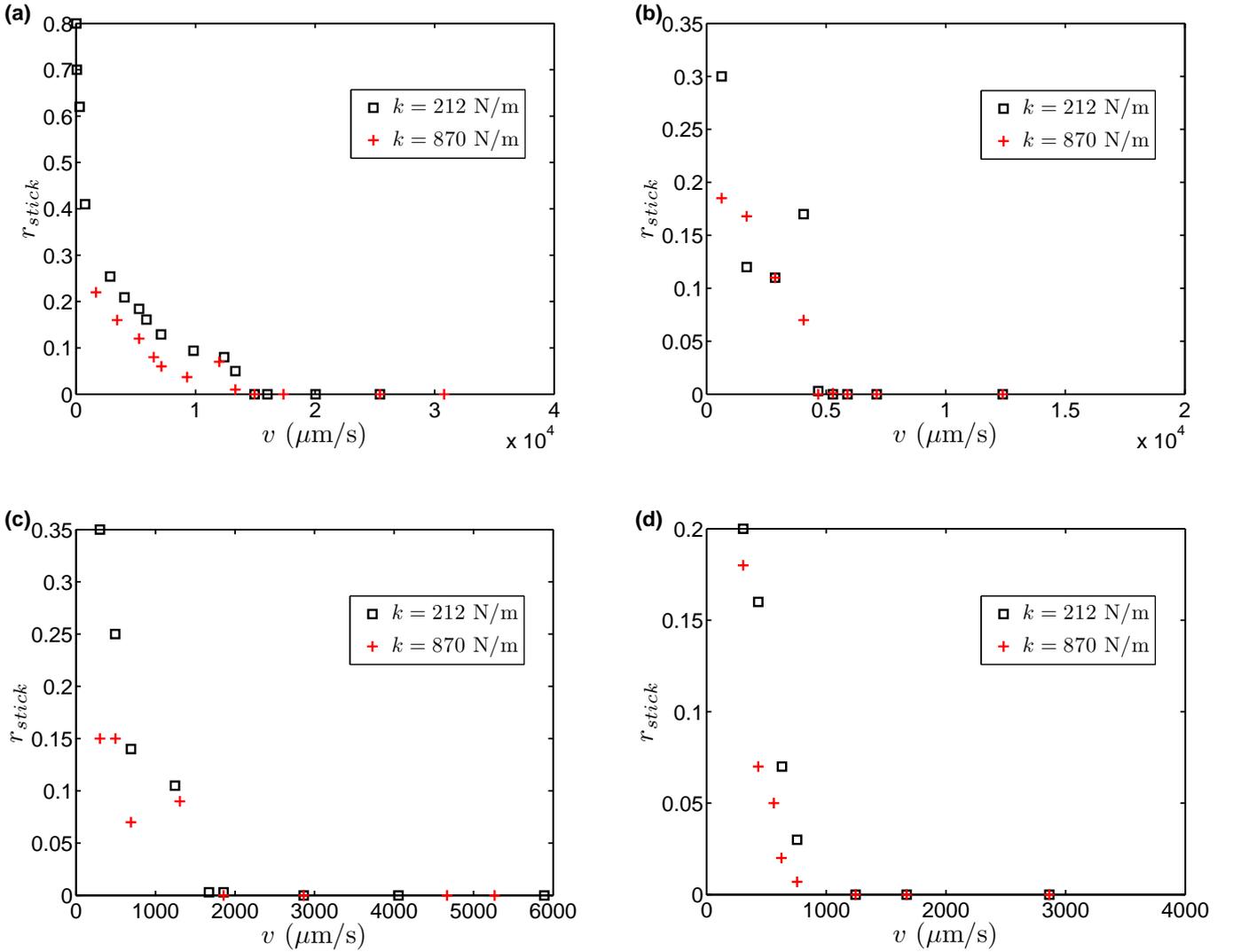


FIGURE 10 – Evolution de la proportion de temps d'arrêt r_{stick} en fonction de la vitesse de traction v : (a) $d = 70 \mu\text{m}$, (b) $d = 113 \mu\text{m}$, (c) $d = 153 \mu\text{m}$, (d) $d = 260 \mu\text{m}$.

3.2.3 Etude de la fréquence moyenne du signal

Au moyen de transformées de Fourier (TF) sur le signal de déflexion (via la fonction `fft` de Matlab), il est possible de déterminer la fréquence moyenne f pour chaque acquisition. Cependant, il y a souvent plusieurs pics de grande amplitude répartis sur une bande de fréquence plus ou moins large, et non un seul grand pic (FIGURE 11a). Afin de définir une fréquence moyenne, nous considérons à la fois le pic de plus grande amplitude, et la position de la bande de fréquences autour d'une valeur centrale. Les valeurs retenues sont ensuite normalisées par la fréquence caractéristique f_0 du régime inertiel

$(2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$ (FIGURE 11), en prenant bien soin de peser le patin pour chaque type de grains car la couche de grains collés sous celui-ci n'étant pas la même, il y a des variations de masse de l'ordre de $\Delta m = 2$ g entre les grains les plus fins et les plus gros (TABLE 1 P. 5).

Alors que pour les grains les plus petits la fréquence moyenne du signal semble atteindre la fréquence caractéristique vers la transition (FIGURE 11b-c), il semble que pour des grains de plus grand diamètre, cette valeur n'est jamais atteinte (FIGURE 11d-f).

La détermination de la fréquence moyenne du signal n'est pas toujours aisée. En effet, surtout à partir de la zone de transition au steady-sliding, dans la TF il n'y a pas automatiquement un pic de plus grande amplitude que les autres, mais parfois plusieurs pics répartis sur une bande de fréquence (FIGURE 11a). Ainsi, notamment pour les grains d'assez gros diamètres, le fait que le plateau en fréquence n'atteigne pas exactement la fréquence caractéristique du régime inertiel f_0 ne signifie pas que cette fréquence ne ressort pas dans la TF, mais que les pics ne sont pas centrés autour de cette valeur.

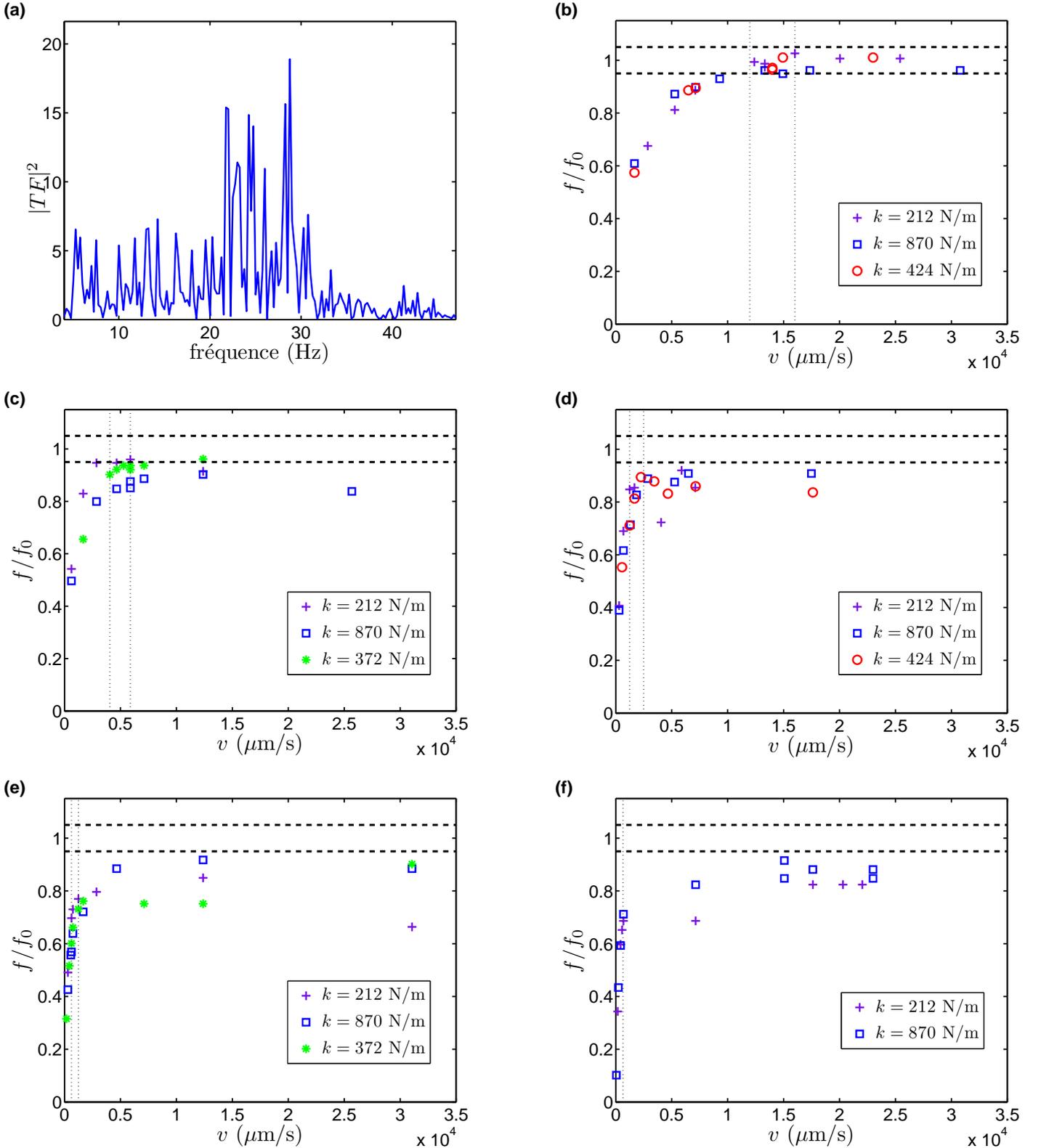


FIGURE 11 – (a) Exemple de transformée de Fourier d'un signal de déflexion [$d = 482 \mu\text{m}$, $k = 870 \text{ N/m}$, $v = 2.3 \text{ cm/s}$]. La fréquence du régime inertiel correspondante est $f_0 = 29.5 \text{ Hz}$. (b-f) Evolution de la fréquence moyenne du signal en fonction de la vitesse de traction : (b) $d = 70 \mu\text{m}$, (c) $d = 113 \mu\text{m}$, (d) $d = 153 \mu\text{m}$, (e) $d = 260 \mu\text{m}$, (f) $d = 482 \mu\text{m}$. Les pointillés verticaux matérialisent la zone de transition : à gauche il y a toujours du stick-slip, et à droite, toujours du steady-sliding ; pour $d = 482 \mu\text{m}$, les deux barres sont confondues. Les pointillés horizontaux matérialisent les incertitudes sur la fréquence caractéristique.

3.3 Diagramme $k - v$

Pour différents diamètres de grains, dans une gamme de raideurs comprises entre environ 100 et 1000 N/m, nous avons tenté de placer les régimes dans le plan $k - v$ (FIGURE 12). Afin de définir un régime inertiel, on se fixe deux critères :

- présence d'annulations périodiques de la vitesse sur toute la durée du signal
- $r_{desc/mont} > 0.90$

Les points indiqués "régime transitoire" correspondent aux cas où on observe le passage (dans un sens ou dans l'autre) d'un régime caractérisé par des oscillations de grande amplitude sur le signal de déflexion (stick-slip ou régime inertiel) à un régime de steady-sliding caractérisé par des variations de plus faible amplitude et une vitesse de déplacement du patin toujours strictement positive (FIGURE 5d P. 7). Dans le cas des plus gros grains, le critère en amplitude n'étant plus valable, la transition est caractérisée par des phases comportant des arrêts du patin alternées avec des phases de glissement.

On remarque une zone de transition qui ne semble pas dépendre de la raideur k . En outre, la vitesse critique v_c de transition au régime continu diminue lorsque l'on augmente le diamètre des grains, de même que la largeur de la bande critique. Il semble alors intéressant de chercher une dépendance de v_c en fonction du diamètre des grains. Pour ce faire, il suffit de la tracer en fonction du diamètre. Le passage à l'échelle logarithmique suggère une loi de puissance de coefficient -2 . Ceci laisse penser que v_c pourrait être en $1/d^2$ où d est le diamètre moyen des grains (FIGURE 13). Cependant, il aurait été intéressant d'avoir un nombre de points plus important pour confirmer cette tendance et nous n'avons pas trouvé de justification physique pour ce résultat.

Pour les différents paramètres étudiés, on ne note pas de forte dépendance en k des résultats.

Notons aussi que les acquisitions réalisées avec la lame la plus souple ($k = 46$ N/m) pour les grains $d = 482 \mu\text{m}$ et $d = 70 \mu\text{m}$ étaient très bruitées et difficilement exploitables. De plus, de par la déflexion importante de la lame, il était difficile de rester dans le domaine de linéarité du capteur. C'est pourquoi nous avons choisi de conserver en priorité les raideurs supérieures à 100 N/m. Il semble cependant intéressant de mentionner que pour $k = 46$ N/m (sur les grains $d = 70 \mu\text{m}$), la transition vers le steady-sliding semble intervenir à des vitesses plus faibles que pour les raideurs plus importantes.

Une explication à ce décalage pourrait se trouver dans le fait que lorsque la lame est très défléchie, il peut y avoir une modification de la force normale appliquée sur le patin. D'autres observations faites sur les grains $d = 113 \mu\text{m}$ tendent à corroborer cette hypothèse : nous avons pu constater à un certain moment que la lame d'épaisseur $\varepsilon = 400 \mu\text{m}$ avait acquis une courbure irréversible (due à sa fréquente utilisation). En pivotant alors la lame autour de son axe vertical, la bande de vitesse critique semble se décaler (FIGURE 14). En effet, il apparaîtrait que lorsque le patin est soumis à une force tendant à le surélever de la couche de grains, la transition au steady-sliding aurait lieu pour des vitesses plus grandes. De son côté, la lame la plus souple tendrait à appuyer sur le patin à cause des grandes déflexions lui conférant une courbure importante au cours du mouvement, et on pourrait alors s'attendre à une diminution de la vitesse critique.

Il est aussi important de souligner que l'augmentation de la taille des grains entraîne une augmentation du bruit et de l'irrégularité des signaux. Ceci rend l'analyse des données moins évidente.

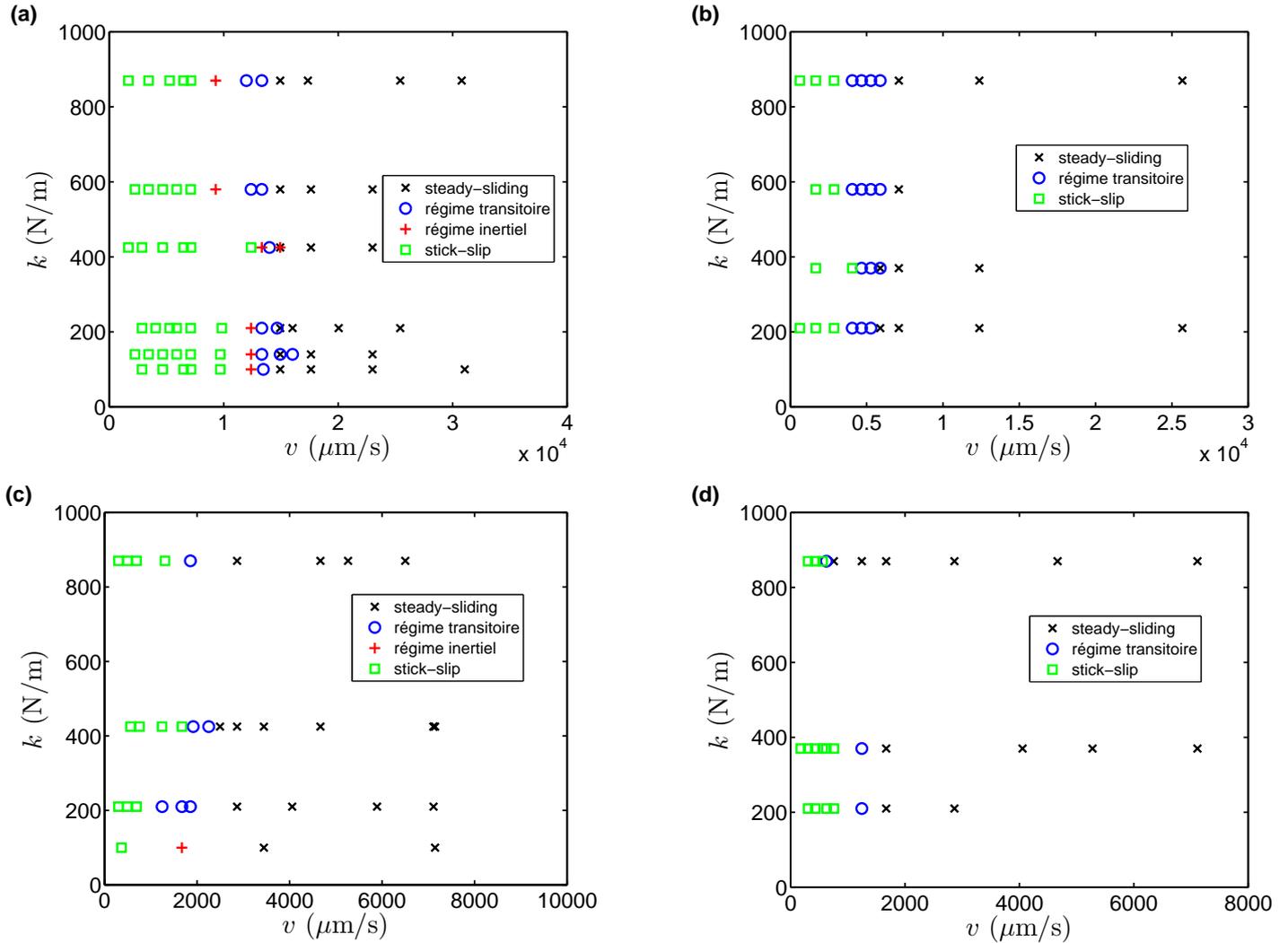


FIGURE 12 – Diagrammes $k - v$ réalisés à des températures variant de 26°C à 28°C pour des taux d'humidité d'environ 40% : (a) $d = 70 \mu\text{m}$, (b) $d = 113 \mu\text{m}$, (c) $d = 153 \mu\text{m}$, (d) $d = 260 \mu\text{m}$.

3.4 Normalisation

Etant donné la dépendance de la vitesse critique v_c vis-à-vis du diamètre des grains (FIGURE 13), il semble aussi intéressant de retracer certaines courbes en normalisant v à l'aide de v_c (FIGURES 15 et 16). A raideur fixée, les courbes correspondant aux différents grains se superposent relativement bien.

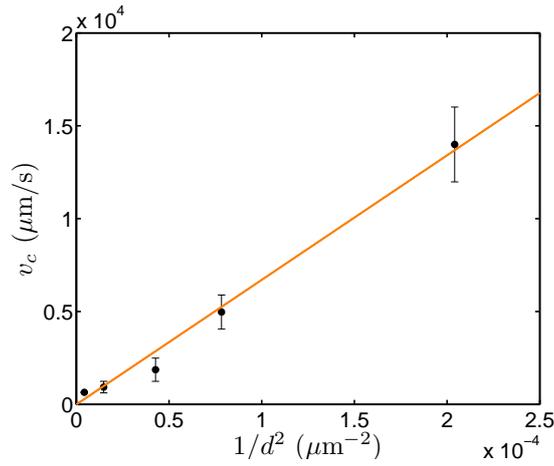


FIGURE 13 – Evolution de la vitesse critique de transition au steady-sliding v_c avec le diamètre moyen des grains d . La pente de la régression linéaire vaut $6.7 \times 10^7 \mu\text{m}^3/\text{s}$.

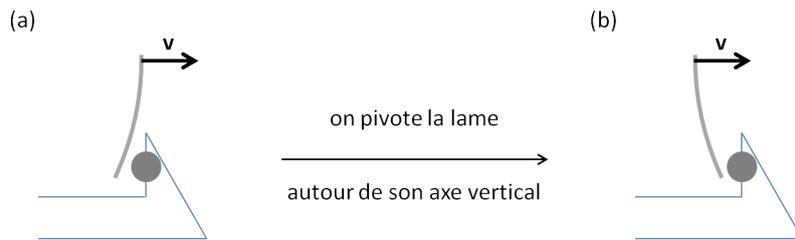


FIGURE 14 – La configuration (b) tendrait à décaler la transition vers les hautes vitesses contrairement à la configuration (a).

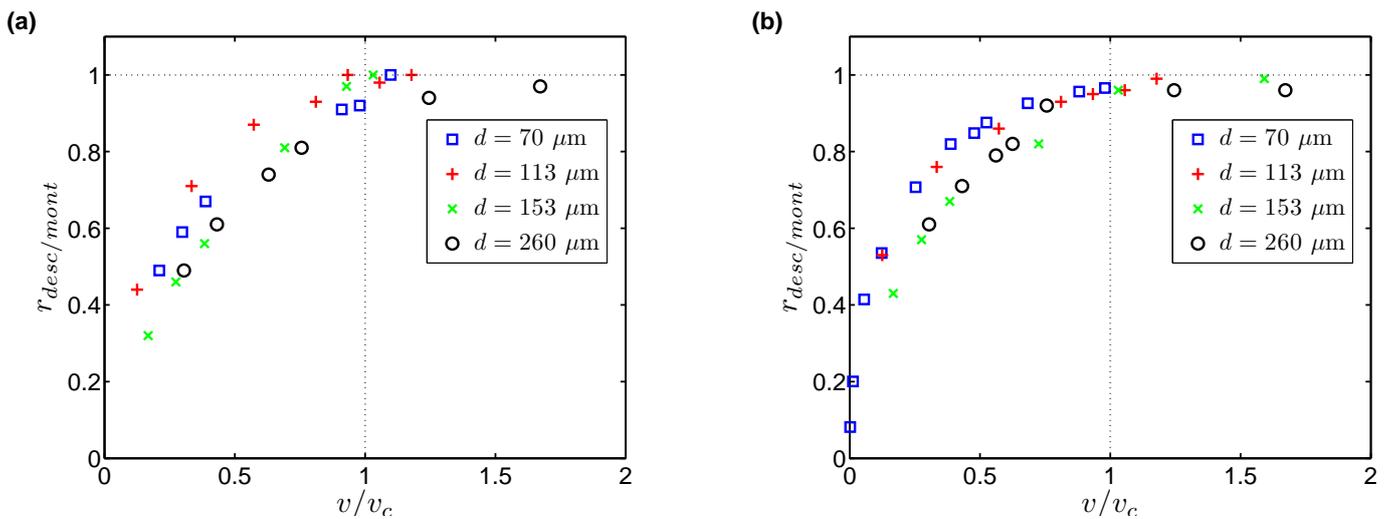


FIGURE 15 – Evolution de $r_{desc/mont}$ en fonction de la vitesse de traction v normalisée par v_c : (a) $k = 212 \text{ N/m}$, (b) $k = 870 \text{ N/m}$.

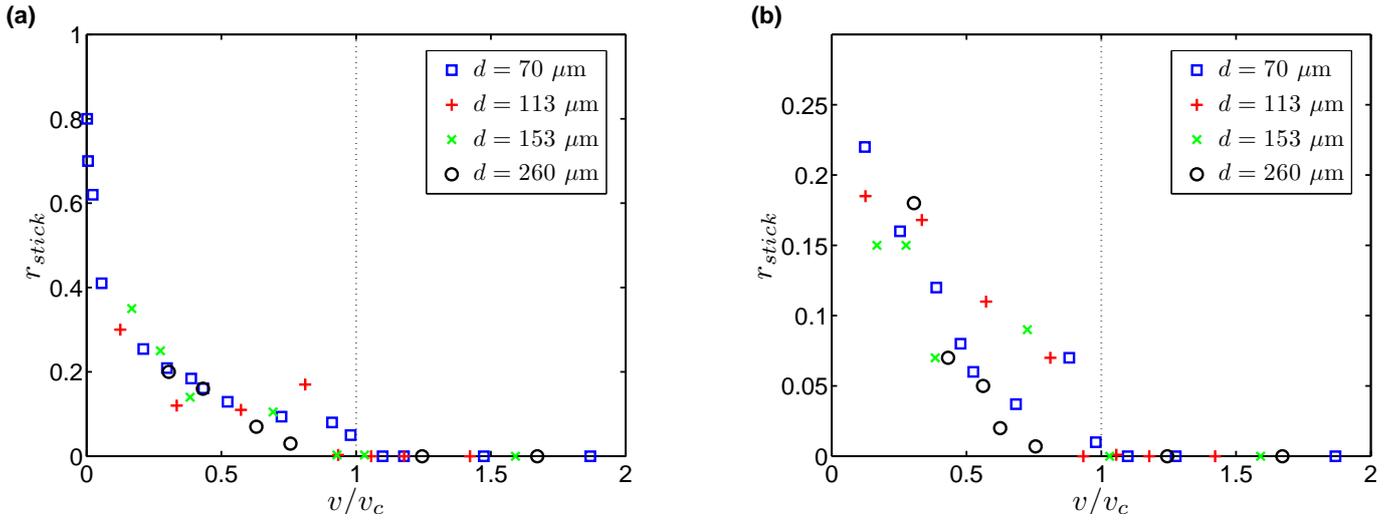


FIGURE 16 – Caractérisation de la proportion de temps d'arrêt r_{stick} après normalisation de la vitesse v par v_c : (a) $k = 212$ N/m, (b) $k = 870$ N/m.

4 Discussion

Contrairement à ce qui apparaît dans le diagramme $k - v$ présenté par Lacombe et al. [3] (FIGURE 2a P. 2), et qui semble déjà en contradiction avec les résultats de Nasuno et al. [2] en ce qui concerne l'ordre d'apparition des régimes pour les raideurs étudiées (FIGURE 1b P. 1), la transition vers le steady-sliding ne semble pas dépendre de la raideur de la lame-ressort utilisée (du moins dans la plage que nous avons considérée). Nasuno et al. [2] affirment de leur côté que la vitesse critique de transition tend à diminuer avec l'augmentation de k . Ceci dit, ils ont réalisé des expériences avec des raideurs allant de la centaine de N/m à plus de 5000 N/m, alors que la plage de raideur considérée dans ce stage était un peu plus restreinte. Cependant, cette tendance semble apparaître légèrement sur le diagramme des grains $d = 70 \mu\text{m}$ (FIGURE 17), mais ne semble pas confirmée par les autres diagrammes.

Toujours d'après Nasuno et al. [2], la transition vers le steady-sliding se caractérise par une brusque diminution de l'amplitude des signaux de déflexion à partir d'une valeur critique v_c pour des faibles valeurs de k ($k < 5000$ N/m), mais elle serait plus graduelle pour des valeurs de k élevées. Avec les lames à notre disposition, nous ne pouvions pas vérifier ce phénomène, cependant, nous avons observé des différences de caractérisation de la transition similaires en faisant varier la taille des grains pour des raideurs fixées. Un autre point toujours évoqué dans le même article, que nous avons constaté également, est la modulation en amplitude au voisinage de la transition. En effet, pour les plus gros grains, même s'il n'y a pas de variation flagrante d'amplitude, on peut voir l'apparition de bouffées contenant des battements entrecoupées de fluctuations plus désordonnées d'amplitude un peu inférieure (FIGURE 18). De même pour les plus petits grains : dans les phases de steady-sliding autour de la transition on peut observer de telles modulations, qui perdurent, de manière plus discrète, sur les signaux acquis à plus hautes vitesse (FIGURE 5c P. 7). La modulation en amplitude pourrait fournir une explication à la multiplication des pics voisins sur les TF.

En ce qui concerne le régime inertiel, les résultats obtenus soulèvent des difficultés quant à l'établissement d'une zone précise dans le diagramme. Dans un premier temps, au voisinage de la transition, les signaux de déflexion prennent à première vue une allure de sinusoïde, et l'étude de $r_{desc/mont}$ qui tend vers 1 pour les vitesses croissantes montre bien que le signal tend à se symétriser. Cependant l'évolution vers un tel comportement semble progressive. L'étude des fréquences moyennes tend à corroborer ceci. Pour les plus petits grains, elles semblent tendre asymptotiquement vers la fréquence caractéristique f_0 , alors que pour les plus gros elles semblent rester toujours bien inférieures.

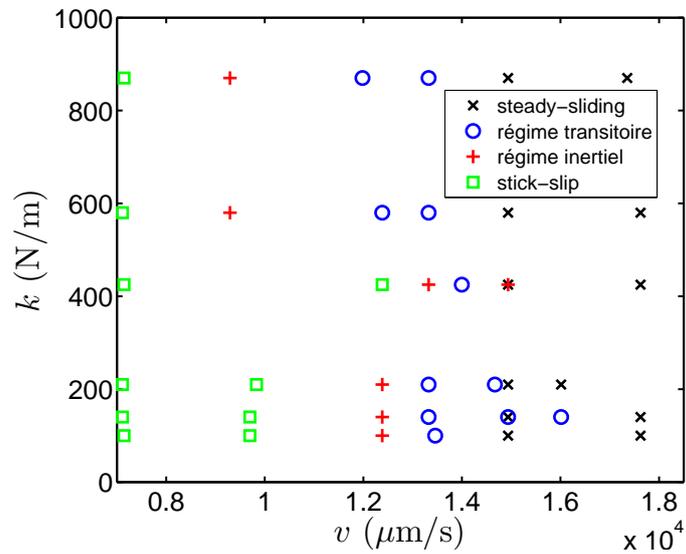


FIGURE 17 – Zoom au voisinage de la transition sur un diagramme des régimes [$d = 70 \mu\text{m}$].

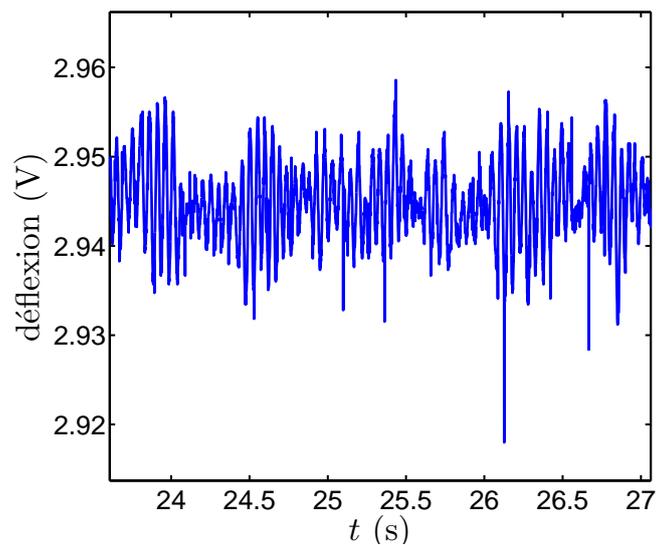


FIGURE 18 – Exemple de modulation d'amplitude au voisinage de la transition [$d = 260 \mu\text{m}$, $k = 870 \text{ N/m}$, $v = 1245 \mu\text{m/s}$].

Remarquons tout de même que dans leur article, Lacombe et al. [3] présentent deux diagrammes des phases : un dans le cas de grains secs dans le but de reproduire les données de Nasuno et al. (FIGURE 2a P. 2) et un dans le cas de grains humides (FIGURE 2b P. 2). Dans ce dernier cas, la zone correspondant au régime inertiel disparaît (du moins pour les valeurs de k et v considérées). Nasuno et al. ayant fait leurs expériences autour de 20% d'humidité, et les nôtres ayant été réalisées à environ 40%, ceci pourrait constituer une hypothèse quant à l'absence d'un régime inertiel pur.

Enfin, il paraît important de souligner qu'il est difficile de parler d'un diagramme $k - v$ puisqu'il semble en exister autant que de types de grains.

5 Conclusion et perspectives

Au cours de ce stage, avant de pouvoir placer les différents points expérimentaux dans un diagramme des phases pour chaque type de grains, il a déjà fallu trouver comment caractériser les deux transitions recherchées. Pour ce faire, nous avons étudié différents paramètres tels que l'amplitude, la fréquence moyenne et la symétrie des signaux, ou encore les phases d'arrêt du patin. Autant la transition au steady-sliding se déduit aisément des courbes de vitesse du patin (ou simplement à partir d'une brusque variation d'amplitude du signal de déflexion pour les plus petits grains), autant les observations semblent démentir l'existence d'un régime inertiel pur. Effectivement, le stick-slip semblerait se rapprocher continûment, puis asymptotiquement d'un tel régime lors de l'augmentation de la vitesse de traction. Il existerait ensuite une bande critique de vitesse (ne dépendant pas de la raideur de la lame-ressort utilisée) dans laquelle le système transite vers un régime de glissement continu.

Il aurait pu être intéressant de refaire l'expérience en changeant la masse du patin, tout en restant cependant à des masses assez faibles (car des expériences précédentes ont montré un enfoncement du patin pour des masses trop grandes). Un autre critère qu'il serait possible de faire varier est l'humidité. En travaillant dans une cellule fermée, on pourrait réaliser l'expérience en atmosphère sèche par exemple. Enfin, changer la polydispersité, la nature ou encore la géométrie des grains (Nasuno et al. avaient travaillé sur des grains plus ou moins rugueux par exemple), pourrait permettre de caractériser les différents régimes dans des milieux plus proches de ceux existant à l'état naturel.

Références

- [1] C. Marone. Laboratory-derived friction laws and their application to seismic faulting. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 26 :643–696, 1998.
- [2] S. Nasuno, A. Kudrolli, A. Bak, and J.-P. Gollub. Time-resolved studies of stick-slip friction in sheared granular layers. *Physical Review E*, 58.2 :2161–2171, 1998.
- [3] F. Lacombe, S. Zapperi, and H. J. Herrmann. Dilatancy and friction in sheared granular media. *The European Physical Journal E*, 2 :181–189, 2000.
- [4] P. Pinot, S. Macé, G. Geneves, P. Gournay, D. Haddad, M. Lecollinet, F. Villar, and M. Himbert. Étude de lames flexibles en alliage de cuivre-béryllium pour l'expérience française de balance du Watt. *Revue française de métrologie n° 21*, 2010-1, 2010.
- [5] H. Lastakowski, J.-C. Géminard, and V. Vidal. Granular friction : Triggering large events with small vibrations. 2015 en révision à Nature Scientific Reports.
- [6] O. Pouliquen. Les milieux granulaires : Entre fluide et solide. Cours pour l'ENSTA, 2001, <http://iusti.polytech.univ-mrs.fr/~pouliquen/publiperso/polyDEA01.pdf>.

Annexes

A Equations du mouvement en friction solide/solide

Pour comprendre le phénomène de stick-slip, il est intéressant de considérer la friction solide/solide, car dans ce cas, c'est l'unique régime existant. Pour cela, considérons le cisaillement d'une surface solide fixe par un solide de masse m , relié à un ressort de raideur k et le longueur à vide l_0 dont l'extrémité libre est tirée à la vitesse constante v (FIGURE 1a P. 1). Les équations du mouvement sont données par

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -T + k(X - x - l_0)$$

où x représente l'abscisse du patin et X celle de l'extrémité du ressort tractée à vitesse v . On a de plus

$$X = vt + l_0$$

et on prend $x = 0$ à $t = 0$. On en déduit l'équation suivante :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -T + k(vt - x)$$

Le mouvement est régi en première approximation par les lois de Coulomb, et les équations montrent l'alternance de phases d'arrêt avec des phases de glissement, la première phase étant une phase d'arrêt (ou de "collé") si on considère une vitesse initiale nulle du solide. Ces lois indiquent que lorsque $|T| < T_0 = \mu_s N$, il n'y a pas glissement. Lorsque $|T|$ atteint la valeur critique T_0 , le glissement commence, et on alors la relation $|T| = \mu_d N$ jusqu'à annulation de la vitesse relative d'un solide par rapport à l'autre. μ_s et μ_d sont respectivement les coefficients de frottement statique et dynamique associés à la friction entre les deux solides. La force normale est égale au poids du patin :

$$N = mg$$

où $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ est l'accélération de pesanteur. Lors de la première phase, il n'y a pas glissement et $x = 0$, ainsi

$$T = k(vt - x) = kvt$$

et l'allongement du ressort vaut alors $\Delta x = X - x - l_0 = vt$. Posons $t_1 = T_0/(kv)$. Lorsque $T = T_0$, c'est à dire $t = t_1$, on passe en phase de glissement. Le mouvement est alors régi par l'équation suivante :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu_d mg + k(vt - x)$$

Dans le référentiel lié au ressort, notons u le déplacement du solide. On a alors $u = -\Delta x = x - vt$. L'équation du mouvement peut se réécrire

$$m \frac{d^2u}{dt^2} = -\mu_d mg - ku$$

soit encore

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = -\mu_d g$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique. L'allongement du ressort est donc décrit par une portion de sinusöide de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ dans cette phase. Lorsque la vitesse s'annule, une phase de "collé" recommence, et ainsi de suite.

On peut, par analogie, définir des coefficients de frottement statique μ_s et dynamique μ_d pour la friction grains/grains, cependant, les lois de friction granulaire sont plus complexes à appréhender car elles dépendent notamment de la dilatance des grains comme l'évoquent Lacombe et al. [3] et Nasuno et al. [2].

Notons que le temps de "stick" est en $1/v$. Ainsi, lorsque $v \rightarrow \infty$, le temps de "collé" devient négligeable, et le mouvement du système tend vers un régime inertiel, c'est-à-dire vers un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_0 . Ceci permet peut-être d'appréhender un peu mieux les observations de Nasuno et al. [2] concernant l'existence d'un régime de stick-slip se transformant en régime inertiel. Cependant, le régime inertiel pur, s'il existe, et la seconde transition observée vers un "steady-sliding" semblent propres aux milieux granulaires.

B Détermination des raideurs des lames-ressorts

Afin de mener à bien les expériences, il était essentiel de pouvoir utiliser des lames de raideurs différentes. En considérant les formules données par la théorie des poutres pour la raideur d'une lame encastree, il vient rapidement qu'avec une même lame, il est possible de réaliser des ressorts de raideurs différentes en modifiant la ligne d'encastrement, et donc la longueur dans le vide de cette dernière. De plus, en connaissant une seule raideur, il est possible de retrouver toutes les autres (obtenues pour la même lame, mais aussi celles obtenues pour des lames de mêmes longueur et largeur que la première mais d'épaisseurs variables et faites de différents matériaux).

Nous avons à disposition trois lames parallélépipédiques différentes en acier inoxydable de longueur $L_g = 5$ cm, de largeur $l = 1$ cm et d'épaisseurs $\varepsilon = 400 \mu\text{m}$, $\varepsilon = 250 \mu\text{m}$, et $\varepsilon = 150 \mu\text{m}$. Afin de connaître une première raideur k_0 , un capteur de force a été utilisé avec la lame d'épaisseur $\varepsilon = 400 \mu\text{m}$, et pour une hauteur d'encastrement (mesurée depuis le contact avec le patin) $L = 31.1$ mm. En effet, lors d'une phase de stick, la déflexion Δx mesurée par le capteur, fixe par rapport au bâti de la lame se déplaçant à vitesse de traction constante, est directement proportionnelle à la force mesurée : $F = k_0 \Delta x$. La valeur obtenue était $k_0 = 870$ N/m.

Afin de déduire les autres raideurs mises en jeu, considérons la formule de la raideur d'une poutre encastree soumise à une force en son extrémité libre [4] :

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

où

E = module de Young du matériau

$$I = \text{moment quadratique} = \frac{l\varepsilon^3}{12}$$

Comme il est possible de régler la hauteur du point de fixation des lames sur le bâti, il est possible de faire varier L . Ainsi, pour la lame d'épaisseur $\varepsilon = 400 \mu\text{m}$, en connaissant les différentes valeurs de L , nous pouvons, par une loi d'échelle, déduire les différentes raideurs de la première.

Les autres lames, étant d'épaisseurs différentes mais faites dans le même matériau, donnent elles aussi accès à de nouvelles raideurs faciles à calculer. Effectivement E reste le même et une simple loi d'échelle permet alors de déduire le nouveau I , et donc le nouveau k . Les résultats ont été regroupés en TABLE 3.

ε (μm)	L (mm)	k (N/m)
400	31.1	870
400	35.5	583
400	39.5	424
250	25.8	372
250	31.1	212
250	35.5	142
250	39.5	103
150	31.1	46

TABLE 3 – Récapitulatif des différentes raideurs utilisées.

C Etalonnage des moteurs

Pour les 5 motoréducteurs dont nous disposons, la seule valeur à laquelle nous avons directement accès était la tension U délivrée aux moteurs par l'alimentation. Afin de connaître la vitesse v de translation du bâti, il fallait donc établir la courbe caractéristique de chacun des moteurs. Etant donné que v et U sont reliées par une simple relation de proportionnalité (à couple mécanique constant), pour chacun des moteurs, pour différentes valeurs de U , nous avons chronométré le temps de parcours d'un point du bâti entre deux repères spatiaux séparés d'une distance connue. Grâce à Matlab, nous avons ensuite fait une régression linéaire de la courbe $v = f(U)$ pour chaque moteur (FIGURE 19). Par la suite, connaissant l'équation de la droite, il est aisé de trouver la valeur de v correspondant à une certaine valeur de U .

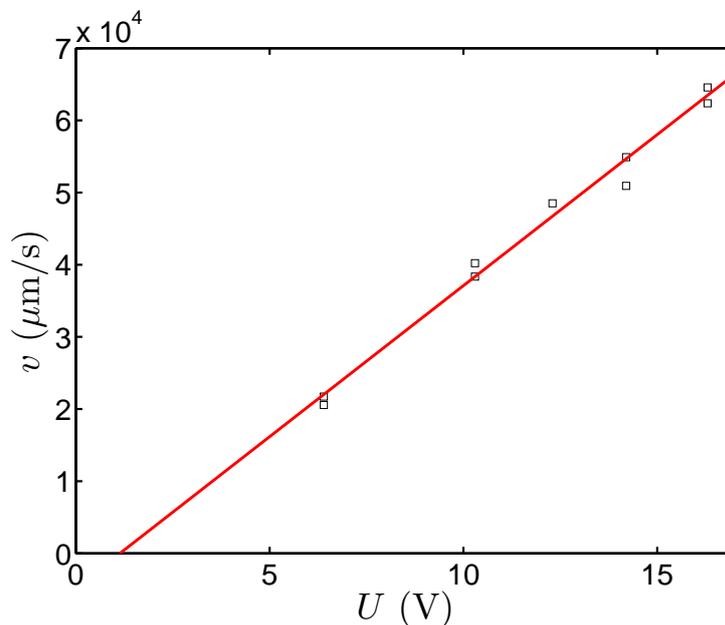


FIGURE 19 – Courbe d'étalonnage pour le moteur le plus rapide : vitesse v en fonction de la tension U appliquée. La régression linéaire est du type $y = a.x + b$ avec $a = 4.2 \times 10^3 \mu\text{m.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$ et $b = -4.8 \times 10^3 \mu\text{m/s}$.

D Calibration du capteur

Afin de pouvoir déduire le déplacement puis la vitesse du patin à partir du signal de déflexion, il est nécessaire de connaître la relation entre les tensions mesurées et la distance vue par le capteur. D'après les données constructeurs, pour des distances assez faibles, le capteur possède un domaine de linéarité. On suppose que toutes les acquisitions ont été réalisées dans ces conditions. En considérant Δx la distance entre la lame et le capteur, et U la tension mesurée, on peut écrire $\Delta x = \alpha U$. Soient x le déplacement du patin et $X = vt$ celui de l'extrémité encastree de la lame. Notons l_0 la distance initiale (au repos) de la lame au capteur. On a $x = X - \Delta x = vt - \Delta x$ avec $\Delta x = l_0$ à $t = 0$. Lors de la première phase de stick, $x = 0$. On a alors $\Delta x = vt$. Sur le signal de déflexion de la lame, ceci se caractérise par une portion affine : on a $U - U_0 = at$ où $U_0 = l_0/\alpha$ et donc $\Delta x = v(U - U_0)/a$. On en déduit la formule $x = v[t - (U - U_0)/a]$ où a représente la pente du premier stick, et a fortiori aussi

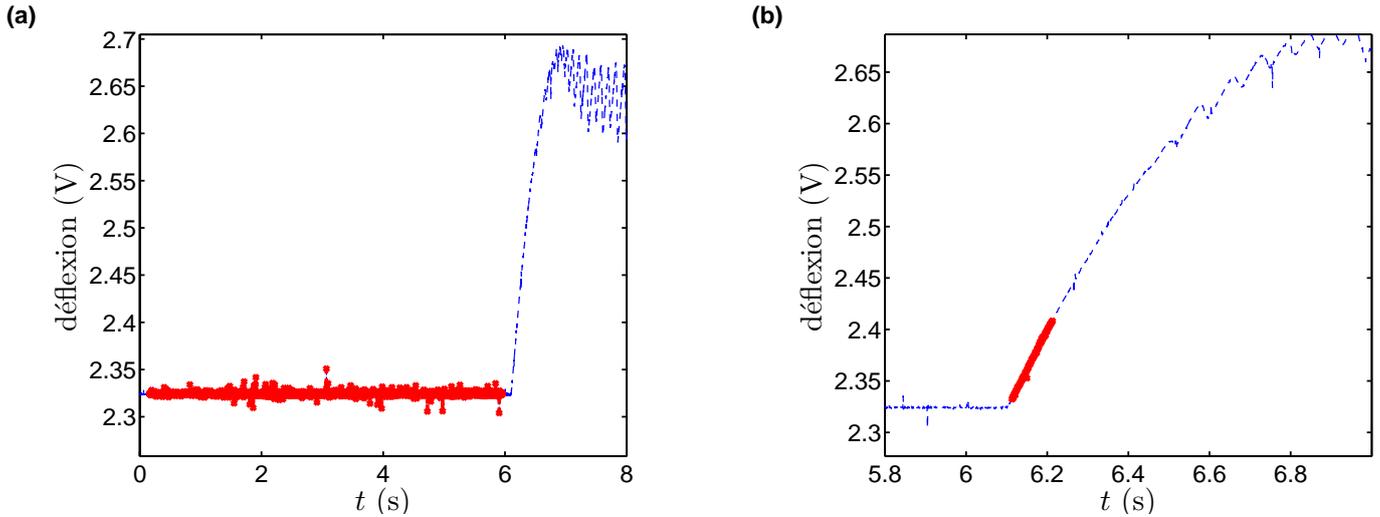


FIGURE 20 – (a) Détermination de U_0 , (b) Détermination de a [$d = 70 \mu\text{m}$, $k = 372 \text{ N/m}$, $v = 691.44 \mu\text{m/s}$]. Ici, $U_0 = 2.32 \text{ V}$ et $a = 0.77 \text{ V/s}$. La discontinuité à $t \simeq 6.1 \text{ s}$ correspond au début du contact lame-ressort/bille.

la pente de toutes les autres phases de stick. Pour obtenir la vitesse instantanée du patin, il suffit de dériver la relation précédente par rapport au temps. Pour chaque acquisition, il fallait donc déterminer les valeurs U_0 et a . Un exemple de détermination est montré en FIGURE 20.