

MASTER SCIENCE DE LA MATIÈRE
École Normale Supérieure de Lyon
Université Claude Bernard Lyon I

Stage 2021
MONNET Benjamin
M2 Physique

Dynamique d'une bulle unique remontant dans un liquide newtonien ou une suspension confinée

Abstract : Nous avons étudié au cours de ce stage la dynamique de remontée d'une bulle dans un fluide confiné (cellule de Hele-Shaw). En premier lieu, nous vérifierons la vitesse prédite par Maxworthy [8] dans les fluides newtoniens puis nous compléterons l'expression proposée par C. Madec [4]. Un modèle théorique permet de prédire, sans paramètre ajustable, l'évolution d'un paramètre de cette expression. Nous considérerons ensuite la remontée de bulles dans des suspensions isodenses et isoindices. Les résultats préliminaires nous permettent de confirmer un dépassement de la vitesse prédite par Maxworthy, et de nous rapprocher d'une mesure locale de la concentration en particules dans le gap.

Keywords : bulles, interface, suspensions.

Stage supervisé par :

Sylvain JOUBAUD & Valérie VIDAL

Coordonnées : sylvain.joubaud@ens-lyon.fr / valerie.vidal@ens-lyon.fr

ENS de Lyon

65 Allée d'Italie, 69007, Lyon

<http://www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE>



Remerciements

J'aimerais avant tout remercier mes deux encadrant.es Sylvain JOUBAUD et Valérie VIDAL pour leur encadrement et pour m'avoir permis de réaliser ce stage. Leurs conseils et encouragements m'ont grandement aidé à réaliser le travail qui est présenté dans ce document. Merci aussi à toutes les personnes du laboratoire de l'ENS de Lyon à qui j'ai pu demander des conseils ou de l'aide sur certains points. Merci à Aubin Archambault pour m'avoir prêté et aidé à utiliser son microscope.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Motivations de l'étude	1
1.2	Remontée de bulles dans un liquide newtonien	1
1.3	Remontée de bulles dans des suspensions	3
2	Dispositif expérimental et traitements des données	4
2.1	Description du dispositif expérimental : cellule de Hele-Shaw	4
2.2	Caractéristiques des mélanges de fluides utilisés	5
2.2.1	Mesure des caractéristiques des différents fluides	5
2.2.2	Mélange eau/UCON	6
2.2.3	Mélange eau/glucose	6
2.2.4	Mélange eau/Triton/ZnCl	7
2.3	Caractéristiques des particules utilisées : billes de PMMA	8
2.4	Détection des bulles	8
3	Remontée de bulles dans un fluide visqueux	9
3.1	Détails de la remontée d'une bulle	9
3.2	Conclusions sur le modèle empirique	11
3.3	Lien entre les deux modèles empiriques	12
4	Approche théorique et comparaison aux résultats expérimentaux	13
4.1	Formulation du problème	13
4.2	Résolution à l'ordre 0 et vitesse de Maxworthy	15
4.3	Correction à Maxworthy et comparaison à l'expérience	16
5	Remontée d'une bulle dans une suspension : mesure et visualisation de la dynamique dans l'épaisseur de la cellule	17
5.1	Mélange eau/glucose	17
5.2	Mélange eau/Triton/ZnCl	17
5.3	Mise en place de la nappe LASER	18
5.4	Préparation du mélange isoindice	19
6	Conclusion	20
7	Annexes	21
7.1	Correction à Maxworthy par égalité des puissances	21
7.2	Spectre d'absorption de d'émission de la fluorescéine	21

1 Introduction

1.1 Motivations de l'étude

La remontée de bulles dans les liquides newtoniens est un phénomène que l'on peut observer dans la vie de tous les jours, par exemple quand on fait des bulles sous l'eau ou tout simplement lorsque l'on sert un soda ou du champagne. Malgré la simplicité apparente du phénomène, on est en présence de phénomènes physiques complexes, mettant en jeu la mécanique des fluides et la physique des interfaces. En rajoutant de la glace dans le verre de soda, on rajoute alors un degré de complexité en ajoutant une troisième interface¹. Les écoulements triphasiques sont complexes à étudier car ils mettent généralement en jeu différentes échelles et temps et d'espace. Des écoulements triphasiques existent naturellement comme par exemple la remontée de magma le long de fissures en amont des éruptions volcaniques ou encore la remontée de bulles de gaz provenant de poches de gaz sous le fond des océans [1, 2, 3]. Au delà de la compréhension du monde environnant, nous pouvons aussi citer des exemples d'applications industrielles comme par exemple les réactions chimiques qui utilisent un catalyseur solide dans des fluides où des bulles peuvent faire leur apparition (voir l'introduction de [4]). En résumé, les écoulements triphasiques sont la source de beaucoup de questions et comportent en plus de cela une richesse physique fascinante qui soulève de multiples questions fondamentales [5].

1.2 Remontée de bulles dans un liquide newtonien

La remontée de bulles dans un liquide est un phénomène qui est difficile à étudier, en particulier à cause de la non-linéarité de l'équation de Navier-Stokes, de la déformabilité de la bulle et du fait qu'il s'agisse d'un phénomène 3D. Nous nous placerons dans le cadre de notre étude dans un milieu quasi-bidimensionnel en utilisant une cellule de Hele-Shaw. Il s'agit de deux plaques espacées d'un petit entrefer appelé *gap*, que l'on notera h , qui permet de restreindre fortement une des dimensions. Un tel dispositif expérimental permet de simplifier la visualisation expérimentale en filmant non plus un volume mais un plan. Néanmoins, toute une nouvelle dynamique liée au confinement du problème fait alors son apparition [6]. Nous nous intéresserons dans ce rapport uniquement au cas d'une bulle dont la masse volumique ρ_b (resp. sa viscosité η_b) est très faible devant la masse volumique du fluide dans la cellule de Hele-Shaw ρ_f (resp. sa viscosité η_f). L'étude de la remontée de bulles dans un tel cadre avec des fluides newtoniens dans une cellule de Hele-Shaw remonte à 1959 avec un premier papier théorique de Saffman et Taylor [7], qui sera repris et complété avec des expériences et de nouveaux éléments théoriques par Maxworthy en 1986 [8]. Les caractéristiques pertinentes du fluide immergeant la cellule dans ce problème sont sa viscosité η_f , sa masse volumique ρ_f et sa tension de surface avec l'air γ . De même, on s'attend à ce que la masse volumique du fluide de la bulle (qui est de l'air dans tout ce document), sa viscosité et le rayon typique de la bulle $d_b/2$ jouent un rôle. Les travaux théoriques de Taylor, Saffman et Maxworthy se sont concentrés sur la limite dite des grosses bulles, c'est-à-dire quand le diamètre de la bulle est très grand devant l'épaisseur h de la cellule de Hele-Shaw. Ils se sont aussi placés dans le cas où le nombre de Reynolds en Hele-Shaw, défini par

$$\text{Re}_H = \frac{\rho_f d_b v_b}{\eta_f} \left(\frac{d_b}{h} \right)^2, \quad (1)$$

est petit devant 1 afin que le terme de convection soit négligeable devant le terme de viscosité dans l'équation de Navier-Stokes, qui est ici dominant sur l'épaisseur. Ils ont montré que pour une bulle elliptique d'axes a et b , où b est perpendiculaire au mouvement et a dans le sens du mouvement, la vitesse de remontée d'une bulle de diamètre $d_b = 2\sqrt{ab} \gg h$ est

$$v_0 = \frac{\Delta\rho g h^2 a}{12\eta_f b}, \quad (2)$$

où g est la gravité et $\Delta\rho = \rho_f - \rho_b$. On nommera par la suite v_0 la vitesse de Maxworthy. On peut retrouver une démonstration plus récente de cette formule dans la thèse de C. Madec [4]. On peut

1. On rajoute aussi des échanges thermiques mais on ne s'attardera pas dessus dans ce rapport.

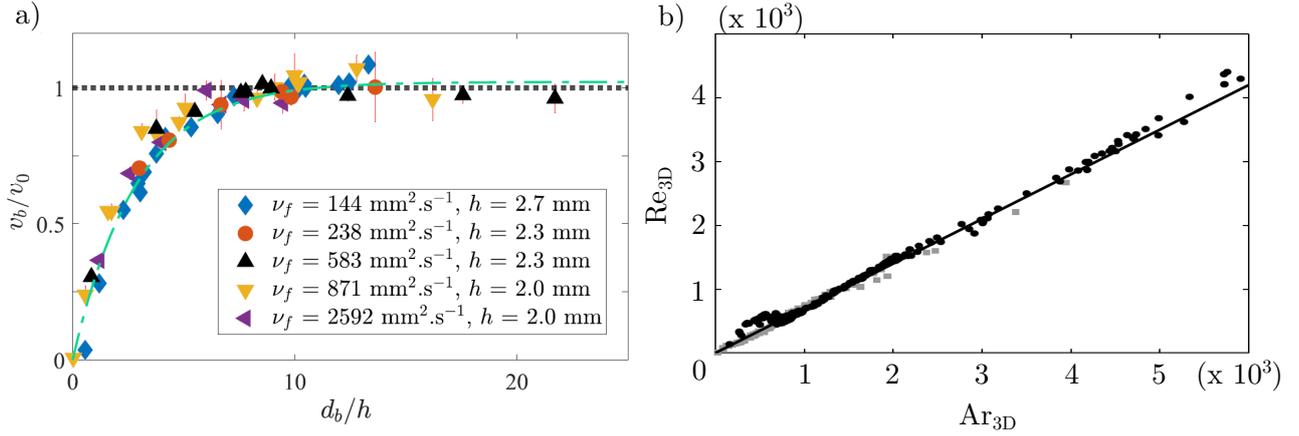


FIGURE 1 – **Caractérisation de la remontée d’une bulle unique dans un fluide newtonien.** a) L’expérience est effectuée dans des mélanges eau/UCON de différentes viscosités dynamiques $\mu_f = \eta_f/\rho_f$. La vitesse des bulles est normalisée par la vitesse de Maxworthy v_0 (Eq.2) et la taille de la bulle par l’épaisseur de la cellule h . Indépendamment de la viscosité du mélange considéré, les points suivent tous la même courbe maîtresse, tracée en traitillé. Figure extraite de [4]. b) Évolution de Re_{3D} en fonction de Ar_{3D} défini par $\text{Re}_{3D} = \rho_f v_b L / \eta_f$, $\text{Ar}_{3D} = \sqrt{gL^3} \rho_f / \eta_f$ avec $L = 2r_{eq}$ et $r_{eq} = (3/16d_b^2h)^{1/3}$. Remontée des bulles réalisée dans de l’eau. L’ajustement linéaire donne $\text{Re}_{3D} = 0.7 \text{ Ar}_{3D}$. Les points noirs correspondent à des expériences réalisées dans une cellule de gap $h = 3.1 \text{ mm}$ et les points gris à une cellule de gap $h = 1 \text{ mm}$. Figure extraite de [11].

remarquer que la formule est assez étonnément indépendante de son diamètre mais aussi du film de lubrification.

Au cours de sa thèse, C. Madec a étudié la vitesse de remontée de bulles d’air en fonction de leur diamètre dans différents mélanges eau/UCON. Le UCON (Dow) est une huile industrielle qui a l’agréable propriété d’être newtonien et miscible à l’eau. Ces différents mélanges ont permis de faire varier la viscosité sur plus d’un ordre de grandeur. La figure 1a est extraite de sa thèse et montre la vitesse normalisée par la vitesse de Maxworthy v_0 en fonction du diamètre d_b normalisé par h . Afin de décrire l’évolution de la vitesse avec d_b , un modèle empirique de la forme

$$\frac{v_b}{v_0} = \mu_1 \left(1 - e^{-\mu_2 \frac{d_b}{h}} \right), \quad (3)$$

a été proposé (courbe verte en traitillé). Pour des bulles de diamètre $d_b > 10h$, la vitesse avec un très bon accord prédite par la vitesse de Maxworthy (Eq.2), en effet $\mu_1 \approx 1$, et ce indépendamment de la viscosité du fluide. Ces données proviennent uniquement de fluides tels que $\text{Re}_H \ll 1$ pour la remontée des bulles étudiées, donc dans un cadre où l’on s’attend à retrouver la vitesse de Maxworthy pour les grosses bulles. Cette expérience ayant été réalisée uniquement avec un mélange donné, on peut se poser la question de l’universalité du modèle empirique ainsi que de la dépendance du facteur μ_2 en fonction des différentes grandeurs physiques entrant en jeu ici.

Par ailleurs, une étude dans l’eau, et donc à grands Reynolds, a été réalisée par Filella et al. [11] en 2015. Des phénomènes d’oscillations des vitesses horizontales et verticales et d’orientation des bulles ont alors été observées. En définissant le rayon équivalent d’une bulle par

$$r_{eq} = \left[\frac{3}{4} \left(\frac{d_b}{2} \right)^2 h \right]^{1/3}, \quad (4)$$

on peut définir le nombre de Reynolds $\text{Re}_{3D} = \rho_f v_b L / \eta_f$ et le nombre d’Archimède $\text{Ar}_{3D} = \sqrt{gL^3} \rho_f / \eta_f$ avec $L = 2r_{eq}$. Le nombre de Reynolds compare la force inertielle à la force visqueuse alors que le nombre d’Archimède compare la force gravitationnelle à la force visqueuse. Filella et al. ont montré

que ces deux nombres étaient proportionnels comme on peut le voir sur la figure 1b tirée de [11]. Ce rapport de proportionnalité entre ces deux nombres adimensionnés permet alors de trouver une expression pour la vitesse de remontée des bulles :

$$v_b \simeq 0.75 \left(\frac{h}{d_b} \right)^{1/6} \sqrt{gd_b}. \quad (5)$$

On a ainsi une expression de la vitesse valable à faible Reynolds (Eq.3) et une expression valable à haut Reynolds (Eq.5). La question d'un lien ou d'une transition entre les deux reste encore entière. En 3D, la transition entre bas et haut nombre de Reynolds a déjà été étudié en détails par Clift et al. [10] mais pas dans le cadre de l'étude d'une cellule de Hele-Shaw. C'est un sujet que nous traiterons dans ce rapport.

1.3 Remontée de bulles dans des suspensions

Nous nous intéresserons dans un deuxième temps à la remontée d'une bulle dans une suspension. Afin de situer notre étude, nous allons nous intéresser à deux nombres adimensionnés qui permettent de comprendre comment se comporte la suspension [12]. Nous nous placerons dans le cas de suspensions monodisperses (de diamètre d_p) et isodenses. Cela permet de négliger la sédimentation des particules sur l'échelle de temps des expériences réalisées. Le premier nombre adimensionné qui nous intéresse est le nombre de Stokes. Il est défini par

$$\text{St} = \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} + \frac{1}{2} \right) \frac{\rho_p d_p \|\vec{v}_f - \vec{v}_p\|}{18\eta_f}, \quad (6)$$

où \vec{v}_f (resp. \vec{v}_p) est la vitesse du fluide (resp. des particules) et ρ_p est la masse volumique des particules. Ce nombre permet de comparer le temps de réponse caractéristique d'une particule à un changement de vitesse du fluide et le temps que met une particule à parcourir son diamètre. Dans le régime dit visqueux ($\text{St} \ll 1$), le temps de réponse d'une particule est faible et donc cette dernière suit le fluide à tout instant. Dans le régime dit inertiel ($\text{St} \gg 1$), la particule se détache de l'écoulement lorsque celui-ci subit de brusques changements de vitesse. Nous nous placerons dans un régime visqueux, donc on supposera que l'on a toujours $\vec{v}_f = \vec{v}_p$. Le deuxième nombre adimensionné qui permettra de caractériser notre suspension est le nombre de Péclet. Il est défini par

$$\text{Pe} = \frac{3\pi\eta_f \dot{\gamma} d_p^3}{k_b T}. \quad (7)$$

Il compare le temps caractéristique de diffusion par agitation thermique au temps que met la particule à parcourir une distance comparable à son diamètre en étant emporté par l'écoulement. L'agitation thermique est prépondérante lorsque le nombre de Péclet est plus grand que 1. De manière générale, on considère que c'est le cas lorsque les particules ont des diamètres qui sont en dessous de 1-10 μm . On restera dans un cadre où l'agitation thermique est négligeable, donc $d_p > 10 \mu\text{m}$. En résumé, nous nous restreindrons à des suspensions monodisperses, isodenses, visqueuses ($\text{St} \ll 1$) et non-Browniennes ($\text{Pe} \gg 1$).

C. Madec a réalisé lors de sa thèse [4] des expériences dans ce cadre de travail avec des particules de polystyrène dans un mélange eau/UCON. Dans le cadre où les particules sont assez petites et la fraction volumique assez faible, le mélange peut être considéré comme un fluide newtonien dont la viscosité dépend maintenant de la fraction volumique de particules que l'on notera ϕ_0 . Autrement dit, on se retrouve dans le même cas qu'avant mais avec une nouvelle viscosité $\eta_s(\phi_0) = \eta_f g(\phi_0)$. C. Madec a répété les expériences introduites plus tôt avec cette suspension et le résultat est présenté sur la figure 2a. On voit que le facteur μ_1 de l'expression (3) croît avec ϕ_0 . Cela signifie que les bulles peuvent aller plus vite dans une suspension que dans un fluide de viscosité équivalente, et donc que la vitesse théorique de Maxworthy peut être dépassée. Ce phénomène pourrait s'expliquer par le fait que la fraction volumique n'est pas homogène dans toute la cuve (figure 2b) dû au phénomène de *shear induced*

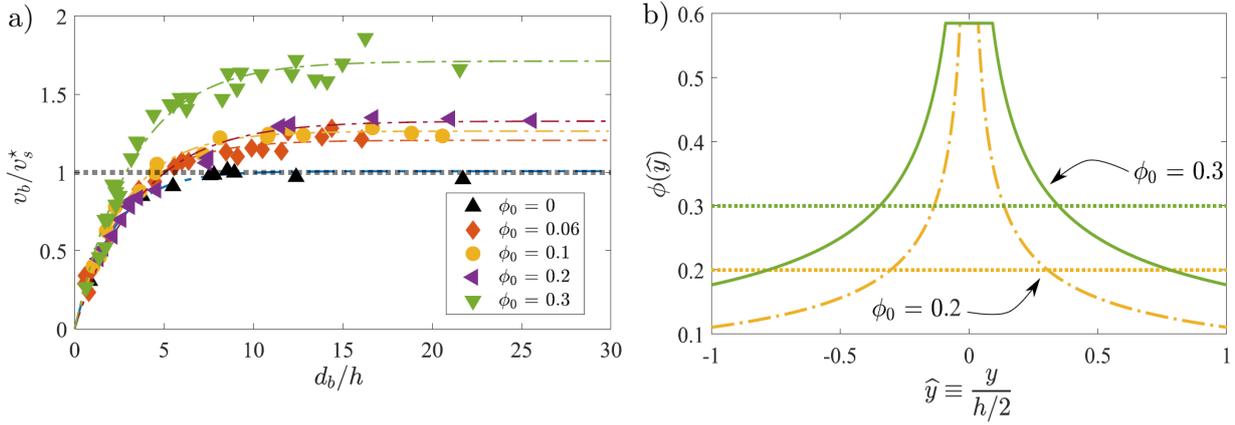


FIGURE 2 – **Caractérisation de la remontée de bulles dans une suspension.** a) La vitesse v_s^* utilisée correspond à la vitesse de Maxworthy (Eq.2) avec la viscosité de la suspension. ϕ_0 correspond à la fraction volumique de billes de polystyrène de diamètre $d_b = 230 \mu\text{m}$. On remarque que les bulles sont plus rapides dans une suspension que dans un fluide newtonien de viscosité équivalente ($\eta_s(\phi_0) = \eta_f$). Figure tirée de [9]. b) Profil théorique de fraction volumique dans l'entrefer de la cellule. Figure tirée de [9].

migration (très bien expliqué par Guazzelli et Pouliquen dans [12]) et donc que la dissipation d'énergie ne se fait pas dans tout le fluide de manière homogène comme expliqué dans [9]. En effet, la bulle crée un champ de vitesse qui lui-même engendre un gradient de cisaillement, ce qui va réarranger les particules. Les courbes présentées dans la figure 2b sont des courbes théoriques calculés en supposant un écoulement à vitesse constante entre deux plaques. Afin de vérifier ces courbes, il faudrait réussir à voir les particules ou en tout cas pouvoir remonter à la fraction volumique locale.

Sarabian et al. [13] ont réalisé une telle mesure pour un écoulement Couette. La présence de la suspension suppose un multitude d'interfaces solide/liquide. Ainsi, la visualisation de l'intérieur de l'écoulement est complexe et il faut adapter l'indice des particules et du fluide pour que les rayons lumineux soient le moins perturbés possible. Ensuite, ils ont rajouté dans un mélange une espèce fluorescente (de la rhodamine). Ainsi, le liquide est visible en l'éclairant avec un LASER de la bonne longueur d'onde alors que les particules, n'ayant pas absorbées l'espèce fluorescente, n'émettent pas de lumière. Ils ont ainsi pu remonter à la fraction volumique locale de particules.

En résumé, les questions qui se posent sont :

- L'universalité du modèle empirique proposé (Eq.3), en particulier la valeur de μ_2 .
- Le lien, s'il y en a un, entre ce modèle et l'expression (Eq.5) trouvée par Fillela et al. [11]
- L'agencement des grains dans le cas d'une suspension pour mieux comprendre la figure 2.

Nous allons donc essayer de répondre à ces questions dans ce rapport en utilisant une cuve de Hele-Shaw ainsi que trois types de mélanges différents. Pour cela, nous allons dans un premier temps décrire le matériel ainsi que la méthode expérimentale utilisée pendant les quatre mois de stages. Ensuite, nous traiterons le cas de remontées de bulles dans divers fluides newtoniens. Nous nous intéresserons après cela à une approche théorique simple pour expliquer un des phénomènes observés. La troisième partie traitera de la remontée de bulles dans une suspension. Dans un dernier temps, nous parlerons de la visualisation des particules dans une suspension.

2 Dispositif expérimental et traitements des données

2.1 Description du dispositif expérimental : cellule de Hele-Shaw

Afin d'observer la remontée de bulles dans un milieu quasi-bidimensionnel, nous avons utilisé une cellule de Hele-Shaw, schématisée sur la figure 3a. La cellule est composée de deux plaques verticales

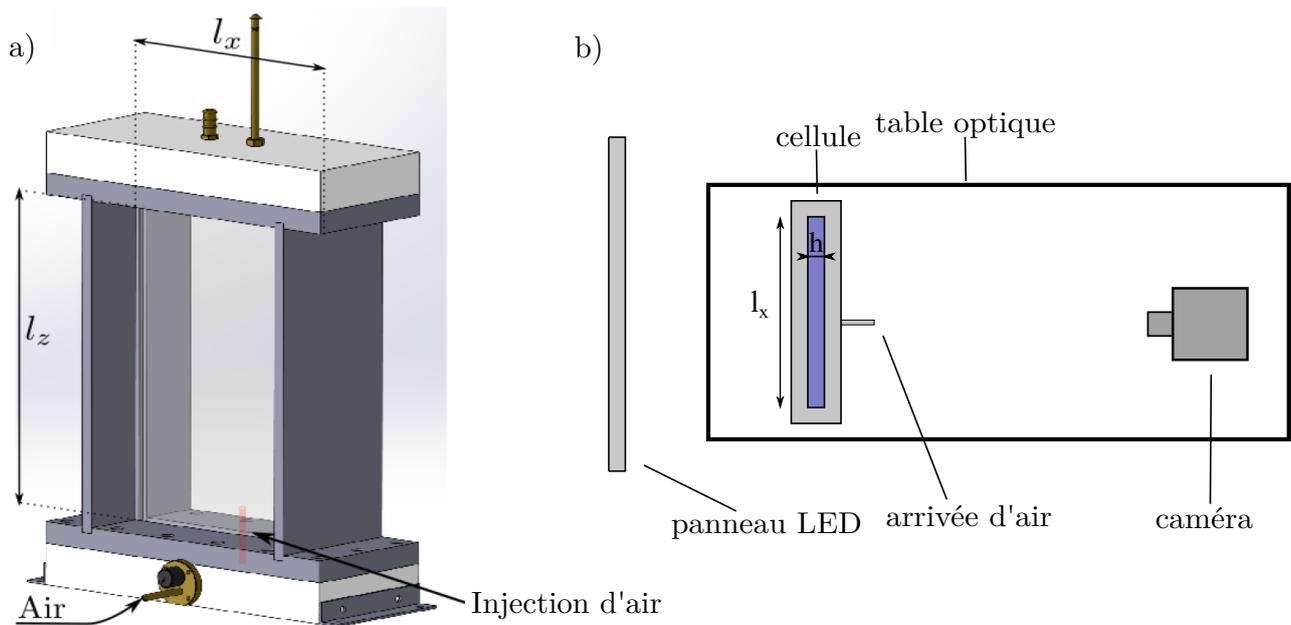


FIGURE 3 – **Dispositif expérimental.** a) Vue schématique en 3D de la cellule. b) Dispositif expérimental vu du dessus. Le *gap* h est petit devant la hauteur l_z et la largeur l_x de la cellule. La cellule est éclairée par un panneau LED pour assurer un éclairage uniforme et le tout est filmé par une caméra directement reliée à un ordinateur.

de largeur l_x et de hauteur l_z séparés d'un espacement (*gap*) noté h selon la direction y . Le *gap* est très petit devant les deux autres longueurs caractéristiques des plaques l_x et l_z , ce qui permet de considérer l'expérience comme quasi-bidimensionnelle. Les cellules utilisées dans ce stage ont des *gaps* de 2.3 mm et 5.2 mm, les deux ayant une largeur de $l_x = 20$ cm et une hauteur de $l_z = 30$ cm. Nous détaillerons dans la sous-partie suivante les différents fluides utilisés pour remplir la cuve. À la base de la cellule, on rajoute une arrivée d'air reliée à l'extérieur afin de pouvoir générer les bulles que l'on souhaite observer. Il s'agit tout simplement d'un tuyau de diamètre 5 mm au bout duquel on peut mettre un dispositif d'injection d'air. Nous avons principalement utilisé une seringue de 50 mL dont l'embout est adapté au diamètre du tuyau. Ce système permet de générer une gamme de taille de bulles très large assez facilement. Il est aussi possible d'utiliser un contrôleur de débit BRONKHORST piloté par ordinateur, ce qui permet de mieux contrôler la taille des bulles mais avec une gamme de tailles de bulles plus faible. De plus, le contrôleur de débit est aussi souvent la cause de bulles secondaires perturbant l'écoulement alors que l'on souhaite étudier des bulles isolées.

La cellule est filmée à l'aide d'une caméra BASLER ac-0400 prenant des photos en 2048 x 2048 pixels en noir et blanc avec une focale de 16 mm, qui est directement reliée à un ordinateur afin de gérer les paramètres de cette dernière à l'aide de MATLAB. Afin de s'assurer que la caméra filme bien la cellule de face, la caméra est fixée sur une table optique sur laquelle on peut ensuite venir poser et visser la cellule. La cellule est éclairée à l'aide d'un panneau LED disposé juste derrière celle-ci, ce qui permet un éclairage uniforme sur toute la cellule ainsi qu'un bon contraste pour distinguer les bulles. Afin d'éviter le scintillement à 50 Hz du panneau LED, celui-ci est alimenté par une alimentation stabilisée TENMA 72-2545.

2.2 Caractéristiques des mélanges de fluides utilisés

2.2.1 Mesure des caractéristiques des différents fluides

Sachant que nous nous intéressons uniquement à des fluides newtoniens en contact avec de l'air, seuls trois paramètres nous intéressent pour chacun des fluides : sa masse volumique, sa viscosité et sa tension de surface avec l'air.

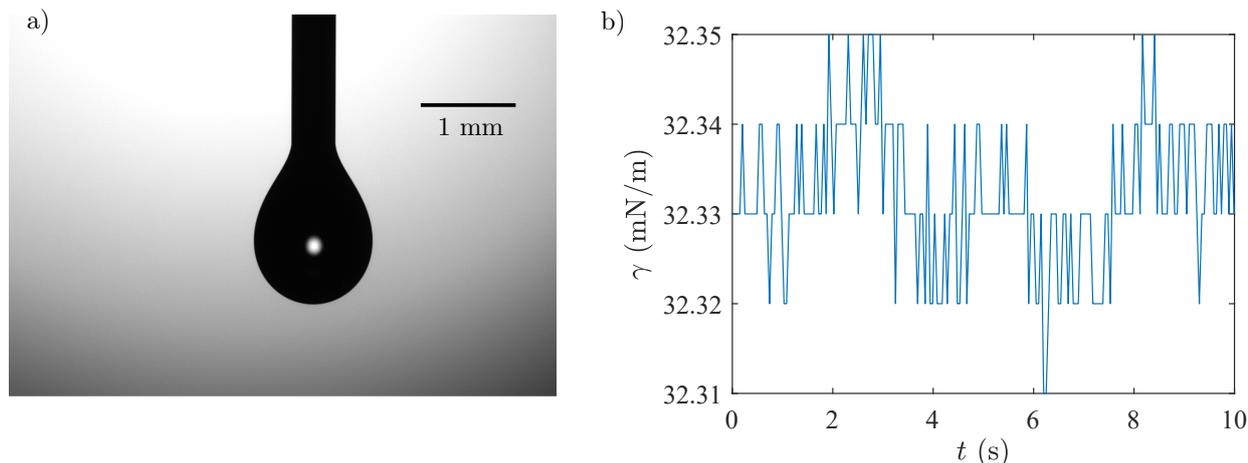


FIGURE 4 – Mesure de la tension de surface du mélange Triton/ZnCl/eau. a) Photo prise par la caméra montée sur le tensiomètre. b) Tension de surface du mélange au cours du temps mesurée avec la méthode de Young-Laplace.

- La masse volumique ρ_f a été mesurée à l’aide d’un densimètre électronique ANTON PAAR DMA 35 dans lequel il suffit d’injecter quelques millilitres du fluide dont l’on souhaite mesurer la masse volumique. Son fonctionnement repose sur la mesure des oscillations d’un tube en U en verre. Le résultat se lit directement sur un écran présent sur le densimètre.
- La viscosité dynamique η_f est mesurée à l’aide d’un rhéomètre MALVERN Kinexus Ultra+. Les mesures ont été faites à la fois en géométrie plan/plan et en géométrie cône/plan, avec des taux de cisaillement et des gaps identiques à ceux rencontrés lors des expériences afin de s’assurer de la cohérence des résultats. Les mesures sont réalisées avec une rampe montante puis descendante en taux de cisaillement afin de vérifier que l’état stationnaire est bien atteint pour chaque mesure (absence de phénomène d’hystérésis).
- La tension de surface est mesurée par une technique de goutte pendante. Un tensiomètre ATTENSION THETA crée une goutte pendante, en détecte le contour et réalise un ajustement de ce dernier avec la méthode de Young-Laplace, ce qui permet de remonter à la tension de surface.

2.2.2 Mélange eau/UCON

Les caractéristiques des différents mélanges utilisés lors du stage sont résumés dans le tableau 1. Les viscosités et masses volumiques considérées sont celles mesurées à la température à laquelle se déroule l’expérience de remontée des bulles. Le premier mélange utilisé est un mélange d’eau et de UCON qui va permettre de tester la méthode de visualisation des bulles ainsi que le traitement des images en comparant les résultats obtenus avec ceux de la thèse de C. Madec [4]. Le mélange utilisé a une fraction massique en eau de 64 %, une masse volumique de $1051 \pm 1 \text{ kg.m}^{-3}$ et une viscosité cinématique d’environ 0.14 Pa.s.

2.2.3 Mélange eau/glucose

Le second mélange avec lequel nous avons travaillé est à base d’eau et de sirop de glucose de la marque TRÉSOR DES CHEFS. Avec la bonne fraction volumique d’eau, on peut obtenir une densité volumique identique à celle du PMMA (voir section 2.3). Cela laisse donc entrevoir la possibilité de mettre en place l’étude déjà faite dans une suspension isodense, mais sur un nouveau mélange. Les différentes valeurs de masse volumique et de viscosité utilisées sont récapitulées dans le tableau 1.

La figure 5 montre une mesure de la tension de surface du mélange en fonction du temps. On voit que cette dernière décroît en fonction du temps. L’expérience était reproductible et ne dépendait pas de la taille de la bulle formée. Il est fortement probable que des tensio-actifs ou des impuretés de manière générale autre que du glucose soit présent dans le sirop de glucose, ce qui peut modifier ainsi

Mélange	η_f (Pa.s)	ρ_f (kg.m ⁻³)	γ (mN/m)	symbole
eau/glucose 1	0.0030 ± 0.0003	1100 ± 1	67 ± 3	◆
eau/glucose 2	0.013 ± 0.001	1187 ± 1	67 ± 3	◆
eau/glucose 3	0.024 ± 0.001	1200 ± 1	67 ± 3	◆
eau/Triton/ZnCl	2.7 ± 0.3	1190 ± 10	32.3 ± 1	*
eau/UCON 1	0.14 ± 0.01	1051 ± 1	50 ± 1	●
eau/UCON 2	0.94 ± 0.01	1068 ± 1	48 ± 1	●
eau/UCON 3	2.89 ± 0.01	1078 ± 1	46 ± 1	●

TABLE 1 – **Caractéristiques (Viscosité η_f , masse volumique ρ_f et tension de surface γ) des différents mélanges utilisés pendant le stage.** L'incertitude plus élevée sur le mélange eau/Triton/ZnCl vient de la forte variabilité de la viscosité du mélange avec la température (voir sous-partie 2.2.4). Les données liées aux deux dernières solutions viennent de C. Madec [4].

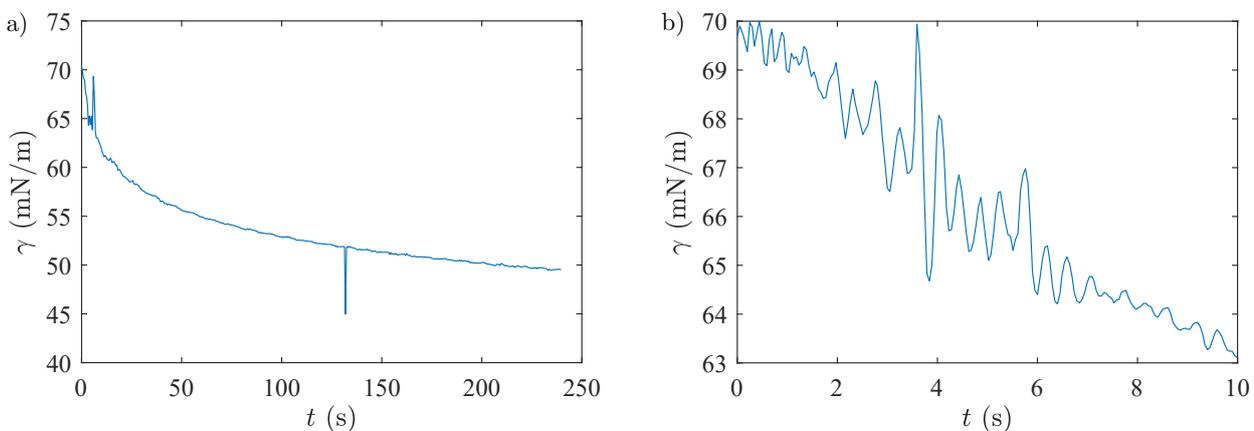


FIGURE 5 – **Mesure de la tension de surface du mélange eau/glucose 2.** a) Mesure de la tension de surface sur une plage de temps grande devant le temps caractéristique de variation de la tension de surface. b) Mesure de la tension de surface sur les premières secondes uniquement. Lors des expériences, les bulles mettent au maximum quelques secondes à remonter dans la cuve. La valeur qui nous intéresse est donc celle des premières secondes.

la tension de surface par migration des impuretés à la surface de contact liquide/air. Néanmoins, lors de l'expérience, les bulles ne restent pas plus de 5 secondes dans la cuve. On peut donc prendre une valeur moyenne sur les 5 premières secondes et juste prendre en compte les incertitudes liées à la décroissance de la tension de surface avec le temps.

2.2.4 Mélange eau/Triton/ZnCl

Enfin, n'oublions pas qu'un des buts est d'observer l'agencement spatial des particules dans le fluide lors du passage d'une bulle. Comme expliqué en introduction, il faut pour cela un fluide qui soit à la fois isodense et isoindice avec les particules. C'est pour cela que l'on utilise un mélange avec de l'eau, du chlorure de zinc et du Triton X-100. Les proportions de chacun des composants est indiqué dans l'insert de la figure 6a.

Le Triton X-100 et le chlorure de zinc sont tous les deux corrosifs et dangereux pour l'environnement. Il faut donc les manipuler avec une blouse et des gants et jeter les déchets dans un contenant prévu à cet effet. Lors de la préparation du mélange, il faut éviter les clusters de Triton ou la présence de bulles dans la solution. Nous avons pour cela adopté un protocole détaillé ci-après. La viscosité du mélange préparé étant grande (2000 à 4000 fois l'eau selon la température, voir figure 6a), les bulles sont difficilement évitables et mettent beaucoup de temps à remonter. Pour éviter au maximum leur présence, il faut dans un premier temps verser dans l'eau le chlorure de zinc en agitant puis attendre

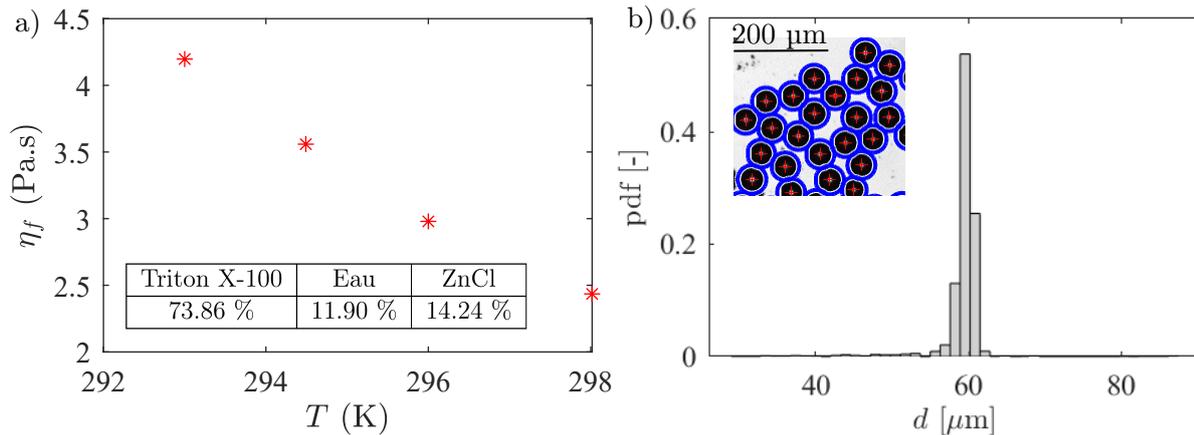


FIGURE 6 – **Caractérisation de la suspension.** a) Viscosité du mélange liquide eau/Triton/ZnCl au fonction de la température. Le tableau indique la composition du mélange en pourcentage massique. b) Distribution du diamètre des particules de PMMA. sur un échantillon de 3294 particules, on trouve un diamètre de $59 \pm 3 \mu\text{m}$. La photo correspond à une image post-traitement numérique qui permet de détecter la présence de cercles. On voit que les cercles bleus dont le centre sont les croix rouges entourent bien les billes de PMMA (en noir).

que ce dernier soit entièrement dissous. Ensuite, il faut verser lentement le Triton dans le mélange eau/ZnCl en le faisant glisser le long de la paroi du bécher, le tout en agitant lentement la solution. Malgré ces précautions, il reste en général des bulles dont il faut se débarrasser. Nous avons alors utiliser un bain à ultrasons ELMA S 50 R afin d’accélérer le processus. Après quelques heures dans le bain à ultrasons, la majorité des bulles est remontée à la surface et une mousse s’est donc formée. Cette mousse peut être retirée avec une spatule. Il suffit ensuite d’attendre environ 24h pour que les bulles restantes en surface finissent par partir et que la préparation soit utilisable. On peut remarquer sur la figure 6a que la viscosité du Triton varie fortement sur quelques degrés. La température de l’expérience n’étant contrôlée que par le présence d’un thermomètre posé à côté de celle-ci, on ne peut pas connaître précisément la température du mélange, ce qui engendre de grandes incertitudes (de l’ordre de 10%, comme on peut le voir dans le tableau 1).

2.3 Caractéristiques des particules utilisées : billes de PMMA

Afin de réaliser les suspensions, nous avons utilisé des particules de PMMA monodisperses SPHEROMERS de rayon $58.7 \mu\text{m}$ (donnée constructeur). Afin de vérifier cette valeur, nous avons utilisé un microscope LEICA DM IL LED en zoom X10, avec une caméra HAMAMATSU BT-CCD C8000 directement montée dessus et reliée un ordinateur. Cela permet de prendre des photos qui sont ensuite traitées sous MATLAB pour détecter et mesurer le diamètre des différentes billes (voir figure 6b). Afin d’encadrer les valeurs possibles pour le rayon des billes, nous avons dans un premier temps tamisé ces dernières entre $50 \mu\text{m}$ et $63 \mu\text{m}$. On trouve alors, sur un échantillon de 3294 particules un diamètre de $59 \pm 3 \mu\text{m}$ (voir figure 6b).

2.4 Détection des bulles

Afin de pouvoir obtenir les caractéristiques des bulles, il faut une échelle de longueur et permettre à MATLAB de détecter la bulle. Une fois la cuve mise en place de la caméra, on met sur celle-ci une grille de points (10 mm entre le centre de chaque point) et on en prend une photo (figure 7a). On s’assure que la grille soit bien vertical car elle va, en plus de donner l’échelle, permettre de redresser les photos. En effet, rien ne nous assure que l’axe verticale de la photo soit l’axe de la gravité. On corrige ce problème grâce à la grille de points et à la fonction *fitgeotrans*. Pour cela, on détecte les points de la grille et on crée une grille virtuelle parallèle aux côtés de l’image. La fonction *fitgeotrans* permet de

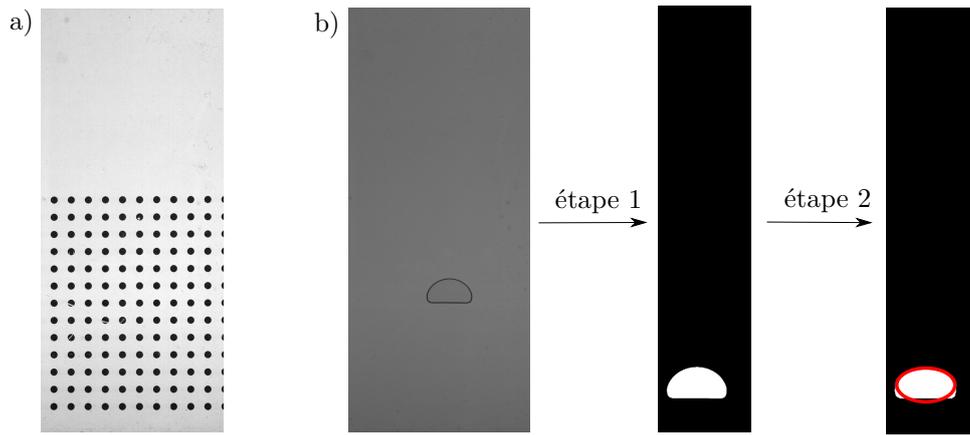


FIGURE 7 – **Traitement des images obtenues.** a) Image d’une grille (espace entre les points : 10 mm) placée le plus verticalement possible par rapport à la pesanteur afin de redresser les images. b) Image d’une bulle de diamètre équivalent $d_b \approx 20$ mm remontant dans un mélange eau/glucose de viscosité $\eta_f = 0.013$ Pa.s. Étape 1 : rognage et passage en noir et blanc de la photo par seuillage. La bulle apparaît maintenant nettement. Étape 2 : détection de la bulle en la considérant comme une ellipse et superposition du résultat à l’image.

faire la rotation de cette grille (et de l’image) à celle détectée sur la photo d’origine. Cela permet donc de redresser l’image. Pour la détection des bulles :

- Étape 1 : on voit sur la figure 7b que les contours de la bulle sont bien dessinés grâce à l’éclairage par le panneau LED. Pour MATLAB, une image correspond à une matrice 2048×2048 de valeurs entre 0 et 255, qui correspondent au niveau de gris de chaque pixel. On commence par tronquer cette matrice pour garder uniquement la zone d’intérêt afin de limiter la quantité de données à conserver et à traiter. Grâce à la fonction *imbinarize*, on peut associer à chaque pixel du noir ou du blanc. Pour cela, on donne à la fonction une valeur comprise entre 0 et 255 et tous les pixels avec une valeur supérieure à celle-ci devienne noir et tous ceux en dessous devienne blanc. Enfin, si jamais il y a des pixels de la mauvaise couleur dans la bulle (quelques pixels noirs alors que la bulle est majoritairement composée de pixels blancs), la fonction *imclearborder* permet d’unifier le tout.
- Étape 2 : On se retrouve donc maintenant avec une image globalement noire sauf pour l’intérieur de la bulle. Les bulles ayant une forme proche d’une ellipse, on utilise ensuite la fonction *regionprops* pour chercher un cluster de blanc sur les images. On lui demande ensuite les propriétés de l’ellipse équivalente au cluster détecté. Cette fonction permet d’obtenir le diamètre, la position, l’excentricité, le petit et le grand axe, l’aire, le périmètre ou encore l’orientation de l’ellipse. Afin de s’assurer que l’ellipse détectée est cohérente avec la bulle, on la trace sur l’image en noir et blanc pour vérifier que les dimensions et le centre de l’ellipse correspondent à ceux de la bulle (voir l’ellipse rouge sur la dernière photo de la figure 7b).

Dans le cas d’une suspension, la méthode est identique mais le seuil de binarisation de l’image qui convient est un peu plus complexe à trouver.

3 Remontée de bulles dans un fluide visqueux

3.1 Détails de la remontée d’une bulle

On va commencer par caractériser la remontée d’une bulle de manière générale. On se placera dans le cas particulier du mélange eau/glucose de viscosité $\eta_f = 0.013$ Pa.s mais les conclusions que l’on tirera dans cette sous-partie seront applicables à toutes les bulles pour tous les mélanges.

La figure 8 montre un exemple typique de la remontée d’une bulle à l’aide de cinq images séparées d’un intervalle de temps régulier. On remarque sur la figure 8a que la vitesse de la bulle est principalement

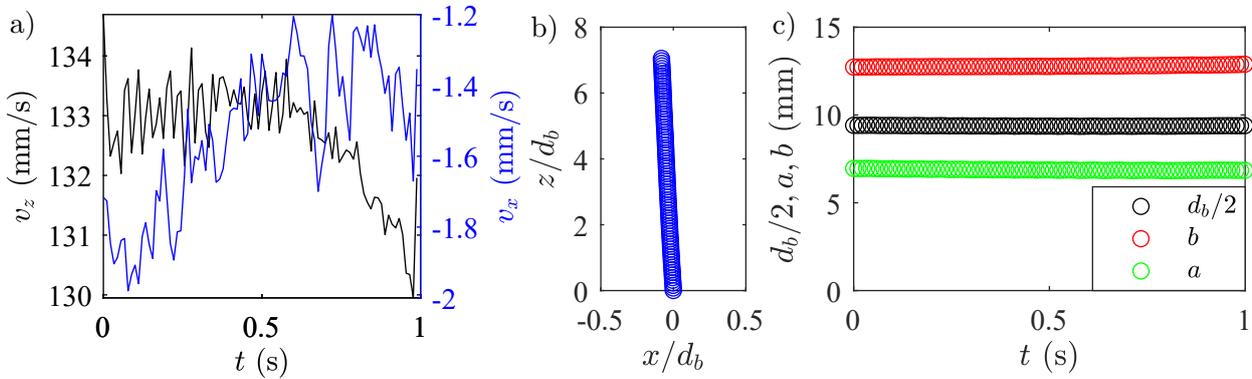
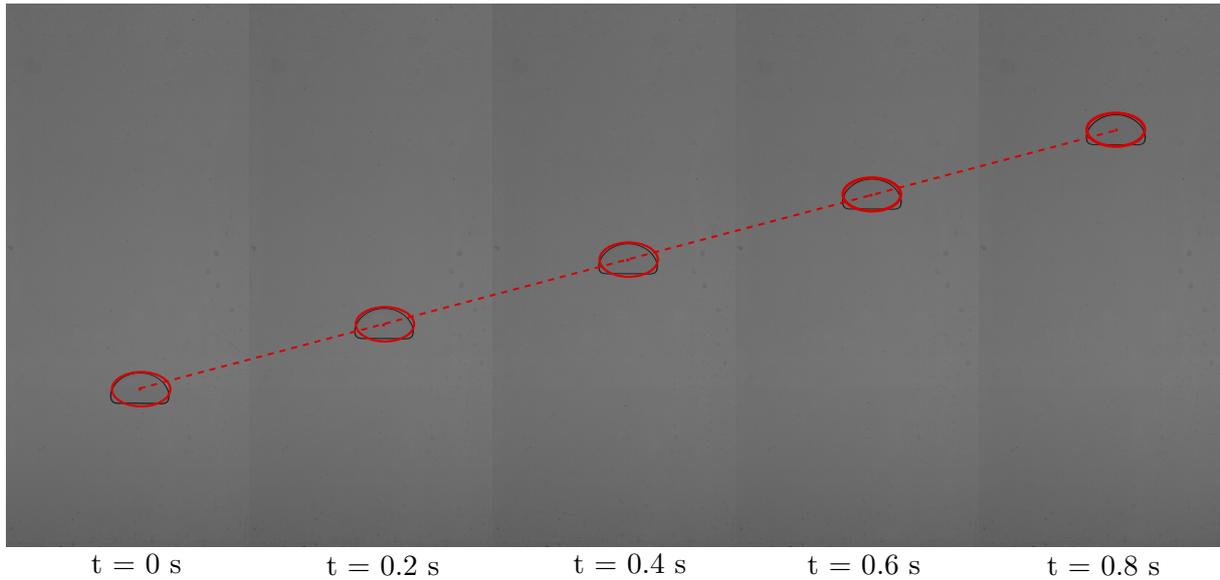


FIGURE 8 – **Caractéristiques de la remontée d’une bulle au cours du temps.** Chronophotographie de la remontée d’une bulle de diamètre $d_b \approx 20$ mm dans un mélange eau/glucose de viscosité $\eta_f = 0.013$ Pa.s. La bulle semble garder un rayon constant et une vitesse constante. b) Vitesse verticale v_z et horizontale v_x de la bulle au cours du temps. On remarque que la bulle se déplace majoritairement selon la verticale à vitesse quasiment constante mais on observe malgré tout une légère déviation vers les x négatifs. b) Reconstitution de la trajectoire de la bulle. Le déplacement est adimensionné par le rayon de la bulle. c) Évolution du rayon d_b , du petit axe a et du grand axe b de la bulle au cours du temps. On voit que la taille et la morphologie de la bulle changent peu.

selon la verticale. Plus précisément, la différence entre la norme des vitesses v_x et v_z et v_z est inférieure à 1%. On peut donc confirmer que la bulle remonte bien le long de l’axe vertical à une vitesse quasiment stationnaire, notée v_b . Cette hypothèse est confirmée par le fait que la valeur de la vitesse verticale reste relativement constante (écart typique de l’ordre de 3%). Cette mesure de la vitesse traduit le fait que la trajectoire de la bulle est légèrement déviée vers la gauche. On peut voir sur la figure 8b qu’elle se déplace d’un dixième de son rayon horizontalement lors d’un déplacement vertical de 8 fois son rayon. Cette déviation horizontale dépend de la bulle observée mais reste toujours négligeable devant le déplacement vertical. La figure 8c rend compte de la stabilité de la forme de la bulle au cours du temps. Le diamètre d_b , l’axe perpendiculaire (resp. parallèle) à la trajectoire b (resp. a) restent constants lors de la remontée. Pour la suite, on supposera donc que les bulles remontent le long de la verticale avec une vitesse, un diamètre et des axes constants.

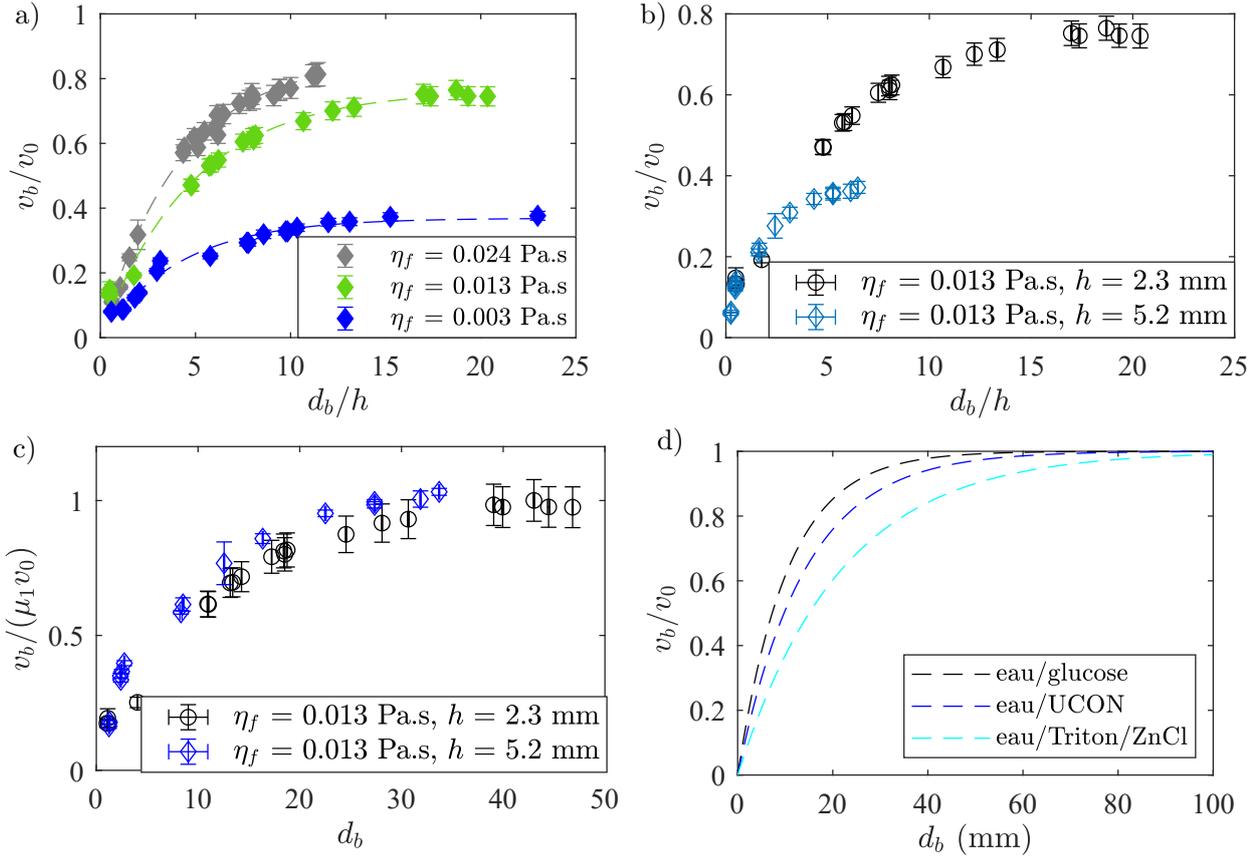


FIGURE 9 – Étude expérimentale du modèle empirique (Eq.3). a) Vitesse des bulles normalisées par la vitesse de Maxworthy v_0 en fonction de leur diamètre normalisé par l'épaisseur de la cuve h dans les mélanges eau/glucose. On remarque que la forme du modèle empirique (traits pointillés) s'ajuste bien avec les données expérimentales mais la valeur de μ_1 diminue lorsque la viscosité (et donc Re_H) augmente. b) Vitesse des bulles dans le mélange eau/glucose de viscosité $\eta_f = 0.013$ Pa.s normalisée par v_0 en fonction de leur diamètre normalisé par h dans deux cellules d'épaisseur différentes. On remarque que la valeur de μ_1 ainsi que la valeur de μ_2 diffèrent pour les deux cellules. c) Vitesse des bulles dans le mélange eau/glucose de viscosité $\eta_f = 0.013$ Pa.s normalisée par la vitesse limite des grosses bulles $\mu_1 v_0$ en fonction de leur diamètre. On remarque que la valeur μ_2/h est une constante (aux incertitudes près). d) Comparaison des trois ajustements exponentiels obtenus pour les trois mélanges différents en normalisant les modèles par leur valeur de μ_1 . On remarque alors que plus la tension de surface du mélange est élevée, plus la valeur limite est atteinte rapidement.

3.2 Conclusions sur le modèle empirique

Afin d'étudier la validité du modèle empirique de l'équation 3, nous avons dans un premier temps mesuré la vitesse de remontée des bulles dans des mélanges eau/glucose de différentes viscosités en fonction de leur diamètre (figure 9a). Pour l'ensemble des trois mélanges, le nombre de Reynolds Re_H varie entre 1 et 100. Autrement dit, nous ne sommes plus dans la limite $Re_H \ll 1$ donc rien ne nous assure que l'on doit trouver une vitesse limite égale à v_0 pour les bulles telles que $d_b \gg h$. On remarque tout de même qu'il existe une vitesse limite, mais que cette dernière ne vaut plus v_0 . On peut noter que plus η_f diminue (et donc plus Re_H augmente), plus μ_1 diminue. On peut donc émettre l'hypothèse que μ_1 est une fonction décroissante de Re_H telle que $\mu_1(Re_H) \rightarrow 1$ quand $Re_H \rightarrow 0$. La valeur de μ_2 ne semble elle pas impactée par l'augmentation de Re_H . Pour tester ces hypothèses, on peut faire varier Re_H sans faire varier la viscosité η_f en changeant l'épaisseur de la cellule. La figure 9b montre la vitesse de remontée de bulles normalisée par v_0 en fonction de leur diamètre normalisé par h pour deux cellules différentes : une de gap $h = 2.3$ mm et une autre de gap $h = 5.2$ mm. Premièrement,

on voit que la valeur de μ_1 est plus élevée pour la cellule avec le plus grand gap, et donc avec le plus grand Re_H , ce qui confirmerait l'hypothèse émise plus tôt. Ensuite, on remarque que la valeur limite μ_1 est atteinte beaucoup plus tôt pour la cellule avec le plus gros gap. Cela nous a poussé à mettre d_b en abscisses plutôt que d_b/h . En renormalisant par $\mu_1 v_0$ la vitesse des bulles, on peut alors facilement comparer les coefficients μ_2/h (voir figure 9c). On voit alors que la valeur μ_2/h est indépendante de la cellule. On gardera donc ce paramètre par la suite pour comparer les différents mélanges. Nous avons ensuite superposé les ajustements exponentiels pour les différents types de mélange (eau/Triton/ZnCl, eau/glucose et eau/UCON) sur la figure 9d. On trace donc les différents modèles obtenus mais en les divisant par μ_1 et on les trace en fonction de d_b et non pas de d_b/h suite à la remarque précédente. On voit bien que facteur μ_2/h change selon la nature du mélange considéré. Comme le paramètre μ_2/h semble indépendant de η_f , v_0 et h , il reste alors comme paramètre pertinent uniquement la tension de surface γ . On voit alors que l'on observe une décroissance de μ_2/h lorsque γ augmente.

En résumé :

- Le modèle empirique (Eq. 3) s'ajuste bien sur tous les jeux de données, indépendamment du nombre de Reynolds Re_H .
- μ_1 dépend de Re_H et on a $\mu_1(Re_H) \rightarrow 1$ quand $Re_H \rightarrow 0$. On reviendra là dessus dans la partie 4.
- Le paramètre pertinent dans l'exponentielle est μ_2/h et non μ_2 et μ_2/h croît quand la tension de surface du mélange γ augmente.

3.3 Lien entre les deux modèles empiriques

En introduction, nous avons évoqué un deuxième modèle empirique (Eq.5), utilisé uniquement pour des nombres de Reynolds élevé jusque là. On rappelle que ce modèle est obtenu par le lien de proportionnalité entre Re_{3D} et Ar_{3D} . Nous avons donc regarder si ce lien de proportionnalité existe pour toutes les expériences. On peut voir sur la figure 10a que l'on a bien $Re_{3D} \propto Ar_{3D}$ pour tous les mélanges eau/glucose avec $Re_{3D} = \rho_f v_b L / \eta_f$, $Ar_{3D} = \sqrt{gL^3} \rho_f / \eta_f$ et $L = 2r_{eq}$. Sur la figure 10b, on voit la même chose pour les mélanges eau/UCON, avec en insert un graphe similaire mais pour le mélange eau/Triton/ZnCl. On peut donc conclure que pour tous les mélanges, on a $v_b = \alpha \sqrt{gL}$, avec α qui dépend à la fois de la nature du mélange et de sa viscosité. Autrement dit, on se retrouve maintenant avec deux modèles empiriques différentes pour exprimer la vitesse de remonter d'une bulle dans une cellule de Hele-Shaw. On va donc essayer de faire le lien entre les deux. Pour cela on peut commencer par remarquer que

$$\frac{v_b}{v_0} = \frac{v_b^2}{\frac{\rho v_b L}{\eta_f} \frac{h^2}{L^2} \frac{a}{b} g L}. \quad (8)$$

On voit alors un nouveau nombre similaire au nombre de Reynolds apparaître, qui est un mélange entre le Reynolds en Hele-Shaw Re_H et le Reynolds défini plus tôt Re_{3D} . On va donc appeler

$$Re_{3DH} = \frac{\rho v_b L}{\eta_f} \frac{h^2}{L^2}. \quad (9)$$

En utilisant $v_b = \alpha \sqrt{gL}$,

$$\frac{v_b}{v_0} = \frac{\alpha^2}{Re_{3DH} \chi}, \quad (10)$$

où on a défini $\chi = \frac{a}{b}$ le rapport d'aspect. Or on a vu que l'on s'attendait à $v_b/v_0 \approx 1$ pour des grosses bulles à bas nombre de Reynolds Re_H , donc on s'attendrait à ce que $\chi \propto \alpha^2 / Re_{3DH}$. Nous avons donc tracé sur la figure 10c α^2 / χ en fonction de Re_{3DH} pour différents mélanges. On remarque que les mélanges s'alignent sur une droite, ce qui signifie que l'on a une loi de puissance entre α^2 / χ et Re_{3DH} . On trouve une pente de 1.1, ce qui est proche de la valeur attendue de 1. On peut donc conclure que les deux modèles empiriques sont en accord. Toutefois, on peut souligner le fait que pour un mélange donné, les points ne semblent pas s'aligner le long de la droite. Cela peut venir du fait que toutes les

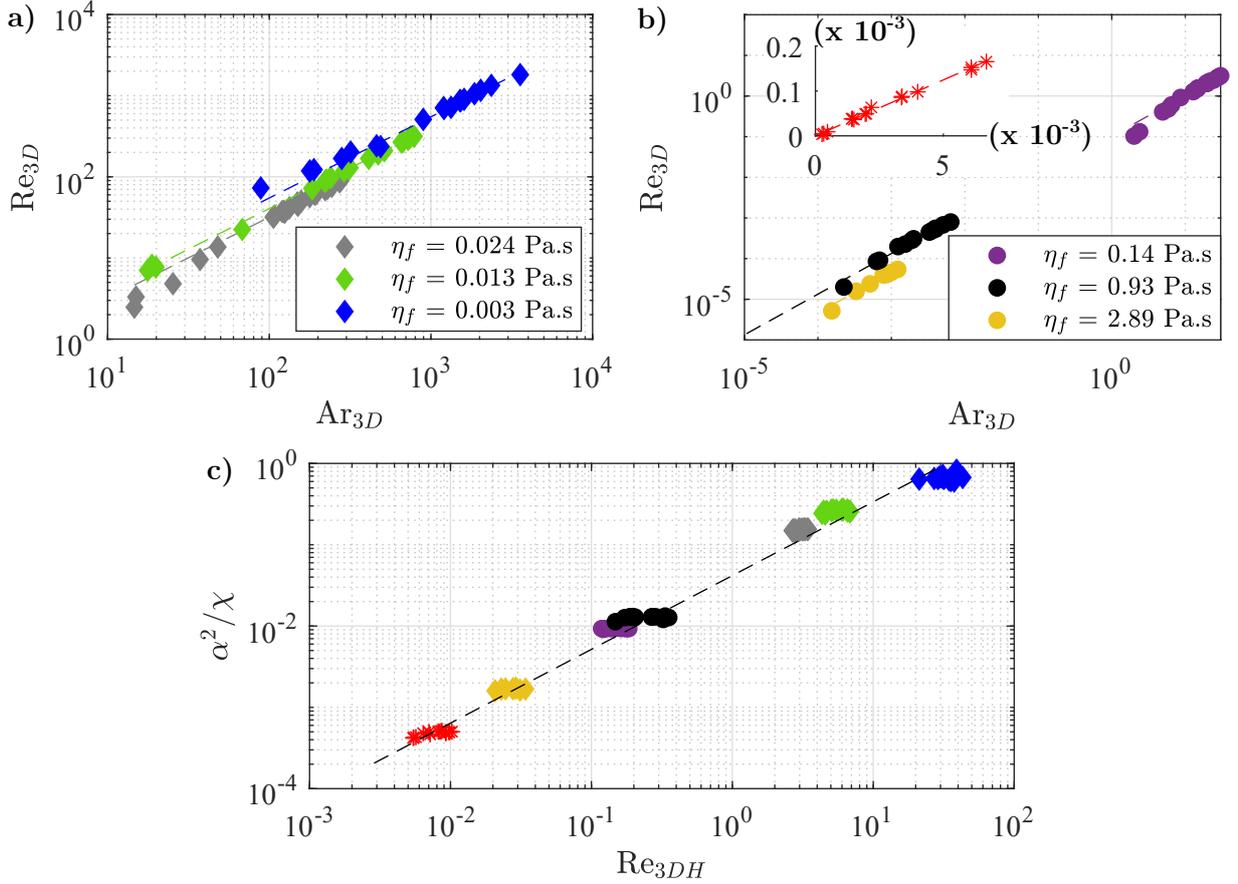


FIGURE 10 – **Lien entre les deux modèles empiriques.** a) Re_{3D} en fonction de Ar_{3D} pour les différents mélanges eau/glucose. On trouve que les deux grandeurs sont proportionnelles avec un préfacteur qui dépend du mélange. Cela implique que dans tous les cas, on ait $v_b = \alpha\sqrt{gL}$. b) Re_{3D} en fonction de Ar_{3D} pour les différents mélanges eau/glucose. On observe la même chose que pour les mélanges eau/glucose. **En insert, on peut voir cela aussi pour le mélange eau/Triton/ZnCl.** c) Évolution de α^2/χ en fonction de Re_{3DH} . On trouve une pente de 1.1, ce qui est proche de la valeur attendue qui est 1. Cela fait donc le lien entre les deux modèles empiriques.

bulles sont mises sur ce graphe alors que l'on s'attend à une relation de proportionnalité uniquement pour les grosses bulles. Il faudrait tenir du modèle empirique (Eq. 3) pour améliorer cela.

4 Approche théorique et comparaison aux résultats expérimentaux

4.1 Formulation du problème

Nous allons revenir dans cette partie sur le fait que l'on observe une décroissance de μ_1 quand Re_H augmente et nous allons essayer d'apporter une explication théorique à cela. Pour ce faire, il faut partir de l'équation de Navier-stokes dans le liquide que l'on suppose incompressible

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla \Pi + \frac{\eta_f}{\rho_f} \Delta \vec{v}, \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

avec $\Pi = P - \rho_f g z$ l'écart à la pression hydrostatique. On se place en coordonnées cylindriques dans le référentiel du centre de masse de la bulle, que l'on suppose cylindrique (voir figure 11).

On note la vitesse du liquide est notée $\vec{v} = u\vec{e}_r + w\vec{e}_\theta + v\vec{e}_y$. Les conditions limites sont données par une condition de non glissement aux parois, c'est-à-dire $\vec{v}(y = \pm h/2) = \vec{0}$. De plus, par symétrie du

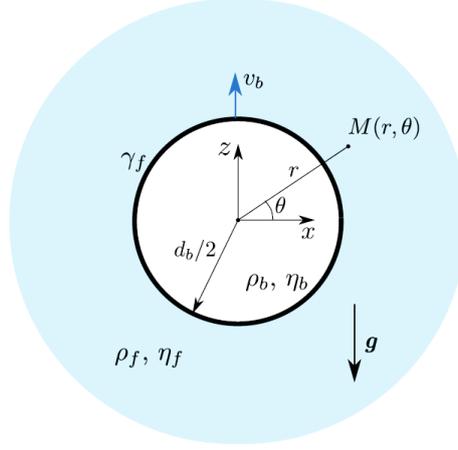


FIGURE 11 – Positionnement du problème de remontée de la bulle. Schéma extrait de [4].

problème, nous avons une symétrie $\theta \rightarrow \pi - \theta$, qui nous sera utile plus tard. Pour faire apparaître le nombre de Reynolds Re_H , on adimensionne les différentes variables par :

$$r = \frac{r}{d_b}, \quad y = \frac{y}{h}, \quad \Pi = \Pi \frac{h^2}{v_b d_b \eta_f}, \quad u = \frac{u}{v_b}, \quad \text{Re}_H = \frac{\rho_f d_b v_b}{\eta_f} \left(\frac{d_b}{h} \right)^2. \quad (12)$$

Ensuite, pour que les termes de $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ soit tous du même ordre de grandeur, on pose

$$w = \frac{w}{v_b}, \quad v = \frac{d_b}{h} \frac{v}{v_b} \quad (13)$$

Pour simplifier la lecture, **on supposera à partir de là et pour le reste de cette partie que toutes les grandeurs utilisées sont adimensionnées** comme indiqué ci-dessus. Cela donne le jeu d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{h}{d_b} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \text{Re}_H \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{r} \right) \\ \left(\frac{h}{d_b} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = \text{Re}_H \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{wu}{r} \right) \\ \left(\frac{h}{d_b} \right)^3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{h}{d_b} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial \Pi}{\partial y} \frac{d_b}{h} = \text{Re}_H \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

Le comportement qui nous intéresse ici est celui des grosses bulles. On va donc supposer que l'on a $d_b \gg h$. Le système d'équation qui finalement nous intéresse est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \text{Re}_H \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{r} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = \text{Re}_H \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{wu}{r} \right) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

On développe ensuite chaque grandeur X en puissance de $\text{Re}_H = \epsilon$. Donc on écrit une grandeur X comme

$$X = \sum_0^\infty \epsilon^n X_n. \quad (16)$$

Le système précédent est résolu pour chaque ordre n . En prenant l'équation selon e_y , on a déjà que $\forall n \in \mathcal{N}, \Pi_n$ est indépendant de y , soit

$$\Pi_n(r, \theta). \quad (17)$$

On définit maintenant la valeur moyenne de X sur l'épaisseur de la cuve par

$$\tilde{X} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} X dy. \quad (18)$$

La divergence nulle de la vitesse et les conditions aux limites sur la vitesse donnent

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\theta} = 0, \quad (19)$$

ce qui signifie que la divergence en 2D du champ moyenné sur l'épaisseur de la cuve est nulle. En reprenant l'équation 15 selon \vec{e}_r et \vec{e}_θ , en la moyennant et en forçant l'apparition du Laplacien de Π en 2D, on obtient

$$\forall n, \Delta_{2D}\tilde{\Pi}_n = -\text{Re}_H f_n(r, \theta) \text{ avec } f_n(r, \theta) = \frac{1}{h} \int_{h/2}^{h/2} g_n(r, \theta, y) dy, \quad (20)$$

où g_n est une combinaison des termes d'advection (voir Eq.15). Autrement dit, indépendamment de l'ordre auquel on s'intéresse, le problème se résume en une équation forcée en 2 dimensions sur le Laplacien de la pression. Ensuite, on peut remonter aux champs de vitesse avec l'équation 15.

4.2 Résolution à l'ordre 0 et vitesse de Maxworthy

A l'ordre 0, on trouve

$$\Delta_{2D}\Pi_0 = 0. \quad (21)$$

Les conditions aux limites permettent alors d'obtenir le champ de pression partout dans le liquide

$$\Pi_0 = 6 \frac{\sin\theta}{r} + C_f. \quad (22)$$

On peut utiliser la même méthode pour le fluide dans la bulle pour trouver que dans la bulle :

$$\Pi_b = 6r \sin\theta + C_b, \quad (23)$$

où Π_b est l'écart à la pression hydrostatique dans la bulle. On a alors, **en remettant temporairement les dimensions**, par continuité des pressions, sachant que $z = r \sin\theta$

$$12 \frac{\Delta\eta}{h^2} \frac{v_b d_b}{2} \sin\theta - \Delta\rho g \frac{d_b}{2} \sin\theta = P(r = d_b/2^+, \theta) - P(r = d_b/2^-, \theta) + C. \quad (24)$$

Le terme de droite est indépendant de θ et vaut donc 0, ce qui amène finalement à la vitesse de Maxworthy (méthode utilisée par Taylor [7])

$$\boxed{v_b = \frac{\Delta\rho g h^2}{12\Delta\eta} = \frac{\rho_f g h^2}{12\eta_f}}. \quad (25)$$

Cette méthode permet de se passer du calcul du champ de vitesse complet. Ce résultat peut être démontré par une seconde méthode, utilisée par Maxworthy [8] en considérant la puissance motrice et la dissipation. Dans un état stationnaire, la puissance motrice et la dissipation se compensent. La puissance motrice est associée à la poussée d'Archimède :

$$P_A = \Delta\rho g \left(\frac{\pi d_b^2 h}{4} \right) v_b. \quad (26)$$

La dissipation est elle donnée par les frottements visqueux et vaut

$$P_\eta = \iiint_{\text{cellule}} \eta \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right|^2 r dr d\theta dy. \quad (27)$$

Pour calculer la puissance dissipée par frottements, il faut donc calculer le champ de vitesse. On utilise pour cela

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \Pi_2}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_2}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

En reprenant les calculs de C. Madec [4], On trouve

$$\vec{v}_0 = \frac{3v_b}{2} \left(\frac{d_b}{2r} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] (\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta). \quad (29)$$

On peut maintenant évaluer la puissance injectée et dissipée dans le système pour retrouver la vitesse de Maxworthy. Maintenant que l'on a vu comment se passaient les calculs à l'ordre le plus bas et les deux chemins de résolution possible, on va s'intéresser aux ordres supérieurs. **On repasse donc à partir de maintenant à des grandeurs adimensionnées.**

4.3 Correction à Maxworthy et comparaison à l'expérience

A l'ordre 1 en Re_H , l'équation sur le champ de pression donne

$$\Delta \Pi_1 = \frac{\tau_1}{r^6} \quad \tau_1 = -\frac{27}{35}, \quad (30)$$

dont la solution est

$$\Pi_1(r) = \frac{\tau_1}{16r^4}. \quad (31)$$

La pression sera donc uniquement fonction de r . Si on se rappelle de la démonstration de la vitesse de Maxworthy par égalité des pressions, on se rend alors compte que l'ordre 1 n'apporte aucune correction sur la vitesse car Π_1 est indépendant de θ ! Il va donc falloir au moins aller à l'ordre 2 et pour cela, il faut calculer le champ de vitesse à l'ordre 1 (pour calculer les termes de forçage). On trouve

$$\begin{aligned} u_1(r, y) &= -\frac{3}{8960r^5} (448y^6 - 560y^4 + 132y^2 - 5), \\ v_1(r, y) &= -\frac{3y(4y^2-1)^2(4y^2-5)}{2240r^6}, \\ w_1 &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Cela permet de trouver que l'on a

$$\Delta \bar{\Pi}_2 = \frac{\tau_2 \sin \theta}{\bar{r}^9}, \quad \tau_2 = -\frac{117}{10780}. \quad (33)$$

En utilisant les conditions aux bords, on tombe finalement sur

$$\Pi_2(r, \theta) = -39 \sin \theta \left(\frac{1}{\delta r} + \frac{1}{\beta r^7} \right) \quad \text{avec } \delta = 13\,475, \quad \beta = 172\,480. \quad (34)$$

L'égalité des pressions amène à

$$v_b(1 + \alpha \epsilon^2) = v_{b0}, \quad v_{b0} = \frac{\Delta \rho g h^2}{12\eta}, \quad \alpha \approx 0.003. \quad (35)$$

On trouve donc que la vitesse attendue est plus faible que la vitesse de Maxworthy, ce qui est conforme aux expériences. Ce résultat peut d'ailleurs être retrouvé avec l'équilibre des puissances injectées et dissipées comme fait en annexe. Toutefois, il faut garder à l'esprit que toute la théorie ici a été faite en supposant une bulle ronde et infiniment grande. Or, les grosses bulles sont celles qui ont le rapport

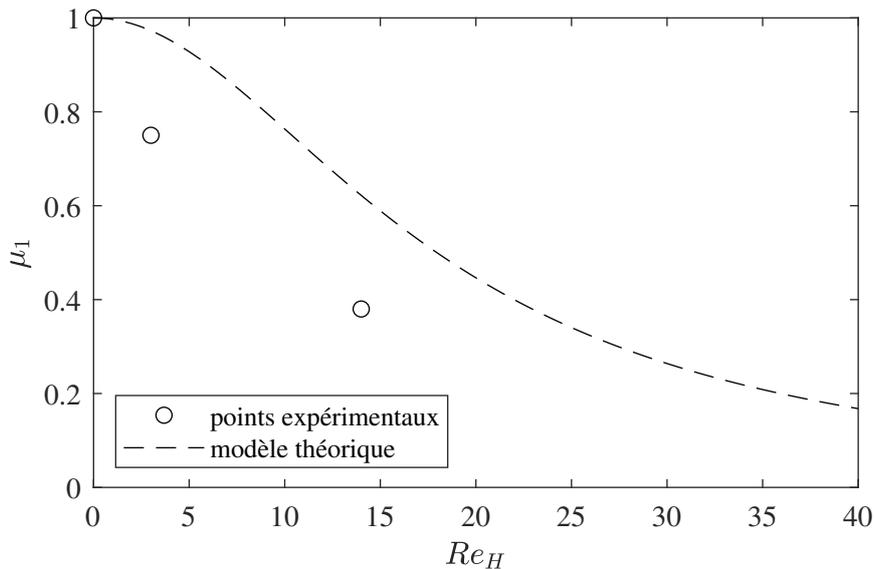


FIGURE 12 – Valeur de μ_1 pour différents Reynolds et comparaison avec le modèle théorique. Le modèle théorique donne une correction dans le bon sens mais qui est insuffisante. Cela peut venir des hypothèses faites pour construire le modèle. En particulier, on suppose $Re_H \ll 1$, ce qui n'est pas le cas pour les points expérimentaux.

d'aspect le plus important donc ce sont celles pour lesquelles l'hypothèse d'une bulle ronde est le moins probable. On peut interpréter ce résultat comme un modèle pour μ_1 qui serait de la forme

$$\mu_1 = (1 - \alpha Re_H^2). \quad (36)$$

On peut comparer ce modèle aux résultats expérimentaux (voir figure 12). On voit que la correction apportée n'est pas suffisante par rapport à ce qui est observé. Il faudrait pousser le développement à l'ordre suivant ou encore prendre en compte le fait que la bulle soit elliptique pour améliorer le modèle. De plus, on suppose dans le modèle théorique que $Re_H \ll 1$, ce qui n'est pas le cas des points expérimentaux.

5 Remontée d'une bulle dans une suspension : mesure et visualisation de la dynamique dans l'épaisseur de la cellule

5.1 Mélange eau/glucose

Le mélange eau/glucose à $\rho_f = 1087 \text{ kg.m}^{-3}$ est isodense au PMMA donc on peut faire une suspension à partir de cela. Néanmoins le glucose attire particulièrement les bactéries et la présence du PMMA semblait favoriser leur croissance, ce qui fait que les mélanges devenaient très rapidement inutilisables. En 24h, on pouvait voir à l'oeil nu de la moisissure dans la suspension. Nous avons donc décidé de ne pas continuer avec ce mélange.

5.2 Mélange eau/Triton/ZnCl

Nous avons réalisé des mesures dans des suspensions réalisées à partir du mélange Triton/eau/ZnCl décrit plus tôt (partie 2.2.4) et du PMMA. Nous avons utilisé des mélanges avec des fractions volumiques en PMMA de 0, 0.1 et 0.2. On rappelle que la vitesse de Maxworthy est alors définie par $v_0(\eta(\phi))$. On peut voir sur la figure 13 que l'on retrouve un cas où les bulles vont plus vite que la vitesse de Maxworthy. Autrement dit, on retrouve le phénomène dont on a parlé dans l'introduction : une bulle va plus vite dans une suspension que dans un fluide newtonien de viscosité équivalente à cette dernière. On observe une augmentation de vitesse semblable à celle observée par C. Madec [9] avec $\mu_1 \approx 1.4$

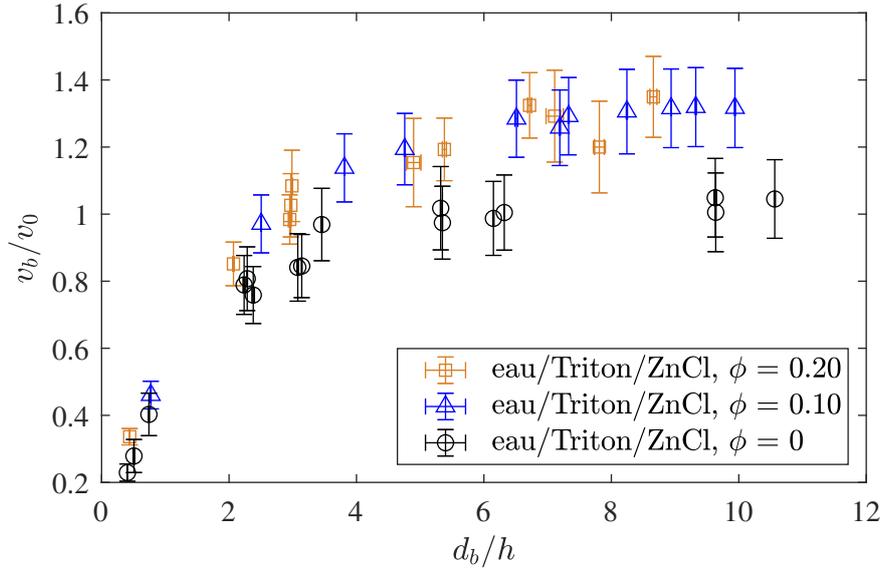


FIGURE 13 – Vitesse des bulles normalisée par v_0 en fonction de leur diamètre dans des suspensions à différentes fractions volumiques de grains. On voit apparaître une vitesse des grosses bulles supérieure à la vitesse de Maxworthy ($v_b/v_0 > 1$).

pour $\phi_0 = 0.2$. Cependant, comme mentionné plus tôt, les barres d'incertitudes sont grandes du fait du mauvais contrôle de la température. Il est donc compliqué de distinguer les cas $\phi = 0.1$ et $\phi = 0.2$. Néanmoins, il reste tous deux au-dessus du cas sans grain.

5.3 Mise en place de la nappe LASER

L'idée de cette sous-partie et de la prochaine est de mettre en place un moyen expérimental qui permettrait de remonter à la fraction volumique locale (dans le gap) afin d'expliquer les observations expérimentales dans les suspensions. Il faut trouver un moyen de distinguer les particules de PMMA individuellement. Toute la difficulté réside dans le fait que l'on souhaite pouvoir observer toute la cuve. En effet, si on veut pouvoir voir les particules qui sont au centre de la cuve, il faut que les particules sur le trajet des rayons lumineux allant des particules au centre à la caméra ne gênent pas. Pour cela, il faut que les particules et le fluide dans lequel elles sont immergées soit de même indice optique. En effet, cela assurerait que les rayons lumineux ne soient pas gênés d'une particule donnée à la caméra car le mélange serait transparent. Mais si le mélange est transparent, alors il faut trouver un moyen de faire ressortir les particules car elles ne sont maintenant plus visible à l'oeil nu. Pour régler ce problème, on peut injecter dans la solution une espèce fluorophore (qui sera de la fluorescéine dans notre cas). Ainsi, tout le liquide sera fluorescent alors que les particules, elles, ne le seront pas. La fluorescéine a son maximum d'absorption à 494 nm et ré-émet autour de 510 nm (le spectre d'émission et d'absorption est en annexe). En utilisant un LASER de longueur d'onde 488 nm, on va donc exciter la fluorescéine présente dans le mélange, qui va ensuite ré-émettre. Donc en mettant un filtre qui ne laisse pas passer les longueurs d'onde autour de 488 nm devant la caméra, on ne verra que la zone éclairée du liquide, qui émet autour des 510 nm. Les particules apparaîtront alors comme des points noirs à l'écran. Pour couvrir une surface plus importante qu'un simple point, il est judicieux de transformer le faisceau LASER en nappe LASER. Cette dernière va donc éclairer un plan de la cuve qu'il faut ensuite filmer. L'idéal serait de pouvoir filmer directement le plan éclairé de face. Toutefois, comme on peut le voir sur la figure 3, on ne peut pas faire cela car la paroi latérale de la cuve obstrue la vue. Nous avons donc décidé de filmer le plan éclairé avec un angle proche de 45 degrés. Le montage réalisé est celui schématisé sur la figure 14a. Un miroir est placé devant le LASER afin de le dévier de 45 degrés pour éclairer la cuve de face. Une lentille cylindrique divergente permet de transformer le faisceau gaussien en une nappe LASER dans le plan yz . La lentille convergente permet de diminuer l'épaisseur de la nappe

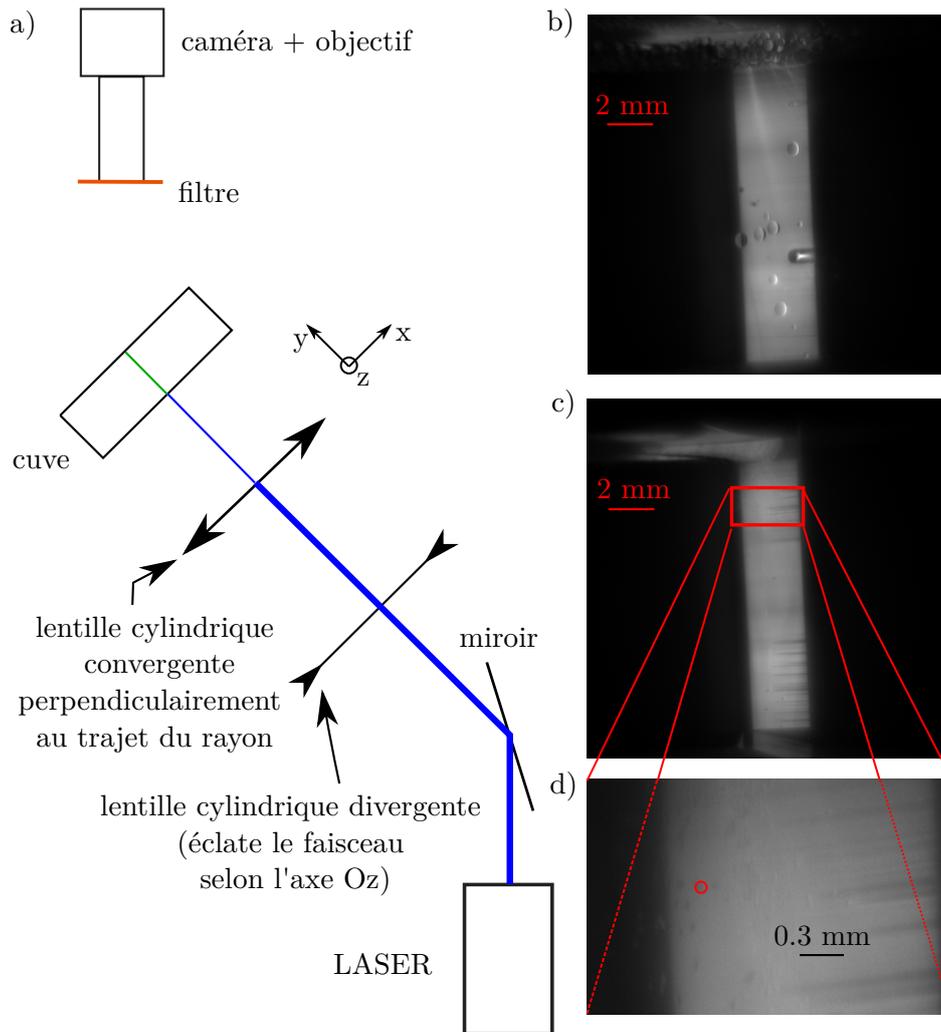


FIGURE 14 – **Dispositif expérimental d’observation des particules dans la cellule.** a) Schéma du montage expérimental réalisé pour observer les particules en suspension dans le fluide. La lentille cylindrique permet de transformer le faisceau gaussien en une nappe LASER dans le plan yz . La lentille convergente permet de diminuer l’épaisseur de la nappe dans le plan xz afin qu’elle soit de taille comparable à celle d’une particule. b) Photo de particules de polystyrène de $500\ \mu\text{m}$ tombant dans de l’eau. c) Photo de particules de PMMA de $60\ \mu\text{m}$ tombant dans de l’eau. d) Zomm sur la photo c).

dans le plan xz afin qu’elle soit de taille comparable à celle d’une particule.

Nous avons réalisé ensuite des tests en lâchant des particules dans un mélange eau/fluorescéine. Les billes utilisées étant plus lourdes que l’eau, elles vont naturellement sédimenter et donc passer devant la nappe LASER. Un premier test (figure 14b) avec des billes de polystyrène de $500\ \mu\text{m}$ permet d’obtenir la conversion $\text{pixel} \leftrightarrow \mu\text{m}$. Un deuxième test (figure 14c) permet de vérifier que l’on voit bien les particules de PMMA. En zoomant (figure 14d), on peut voir des tâches noires circulaires et on peut confirmer qu’elles font bien environ $60\ \mu\text{m}$. On en conclut donc que l’on est capable de distinguer les particules de PMMA avec ce dispositif. Il faut maintenant réaliser un travail similaire avec la suspension isoindice.

5.4 Préparation du mélange isoindice

Afin de pouvoir distinguer les particules de PMMA, il va falloir s’assurer que le mélange et les particules sont de même indice. En effet, un essai rapide permet de se rendre compte qu’un ajustement trop rapide des indices optiques donnent un rendu flou et donc ne permet pas de distinguer les particules. On peut mesurer l’indice optique du liquide suspendant à l’aide d’un réfractomètre KERN OPTICS ORT 1RS et on peut voir le résultat sur la figure 15. L’indice optique du PMMA est donné par le constructeur entre

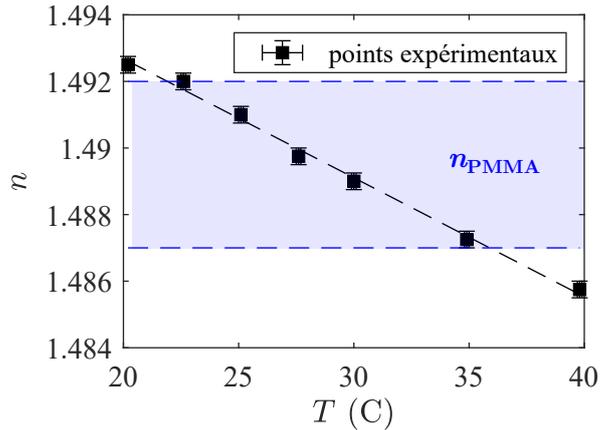


FIGURE 15 – **Indice optique du PMMA et du liquide suspensé en fonction de la température.** L'indice du liquide est mesuré à l'aide d'un réfractomètre qui permet de thermaliser le liquide. La zone bleue indique les données constructeurs pour les billes de PMMA.

1.492 et 1.487 et n'est malheureusement pas mesurable à l'aide du réfractomètre dont nous disposons, qui nécessite une surface lisse du matériau dont on souhaite mesurer l'indice optique. On voit donc qu'en contrôlant la température du mélange, on peut atteindre l'égalité des indices optiques entre 20°C et 35°C. Afin de réaliser cela, nous reproduirons une expérience semblable à celle réalisée par M. Souzy dans sa thèse [14] qui consiste à faire passer une nappe LASER dans un contenant rempli par la suspension. Ce contenant est thermostaté et on fait varier la température jusqu'à ce que la nappe LASER soit la plus nette possible après avoir traversé la suspension. Ce travail est toujours en cours et sera poursuivi lors de la thèse sur ce sujet en septembre prochain.

6 Conclusion

Pour résumer, nous avons étendu dans ce document l'étude faite sur la remontée de bulle en cellule de Hele-Shaw en nous attachant particulièrement sur deux modèles empiriques et le lien entre les deux. Nous avons aussi développé une théorie pour essayer d'expliquer le fait que la vitesse des grosses bulles est inférieure à la vitesse de Maxworthy quand on ne vérifie plus $Re_H \ll 1$. Nous avons commencé à mettre en place un système de visualisation des particules dans la suspension remplissant la cellule de Hele-Shaw. Ce travail amène de nouvelles questions et des pistes d'amélioration :

- Un meilleur contrôle de la température de la suspension permettrait de mieux connaître la viscosité du mélange ainsi que de mieux contrôler son indice optique afin de permettre une meilleure visualisation des particules comme développé dans la partie 5.4. On pourrait aussi essayer de retomber sur le fait que la vitesse des grosses bulles augmente avec la fraction volumique ϕ_0 de particules.
- Des expériences sur des mélanges ayant des tensions de surface différentes permettraient d'avoir une courbe $\mu_2/h = f(\gamma)$ afin de mieux en comprendre le comportement. Il serait par ailleurs intéressant de développer un modèle qui permette d'obtenir une expression analytique du facteur μ_2 .
- La théorie proposée dans ce document ne s'intéresse qu'à des bulles cylindriques. Il serait intéressant de se pencher sur l'étude d'une bulle elliptique. On pourrait aussi imaginer pousser la théorie au-delà de l'ordre 2 pour affiner le résultat. Il serait intéressant d'avoir aussi des expériences à des nombres de Reynolds Re_H plus contrôlés autour de 1 afin de pouvoir mieux comparer la théorie aux résultats expérimentaux.

7 Annexes

7.1 Correction à Maxworthy par égalité des puissances

On peut calculer le champ de vitesse à l'ordre 2 comme on l'a fait pour l'ordre 1. On trouve alors

$$\begin{aligned}
 u_2(r, \theta, y) &= \frac{\sin \theta (4y^2 - 1)(ar^6 - by^8 + cy^6 - dy^4 + ey^2 - f)}{gr^8}, \\
 w_2(r, \theta, y) &= \frac{-\cos \theta (4y^2 - 1)(ar^6 + iy^8 - jy^6 + ky^4 + ly^2 - m)}{gr^8}, \\
 v_2(r, \theta, y) &= \frac{-3y \sin \theta (4y^2 - 1)^2 (ny^6 - py^4 + qy^2 - r)}{sr^9}, \\
 \Pi_2(r, \theta) &= -39 \sin \theta \left(\frac{1}{\delta r} + \frac{1}{\beta r^7} \right).
 \end{aligned} \tag{37}$$

La valeur des différents coefficients est reportée dans le tableau 2. La puissance injectée par la bulle par Archimède vaut :

$$P_A = \Delta \rho \frac{\pi d_b^2 h}{4} v_b \tag{38}$$

et la puissance dissipée par le liquide par viscosité :

$$\begin{aligned}
 P_\eta &= \iiint \eta \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right| r dr d\theta dy \\
 &= \frac{\eta d_b^2 v_b^2}{h} \int_{1/2}^{+\infty} d\bar{r} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-1/2}^{1/2} d\bar{y} \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial \bar{y}} \right| \bar{r} \\
 &= \frac{\eta d_b^2 v_b^2}{h} 3\pi (1 + \alpha \epsilon^2) \quad \alpha = \frac{40}{13} \frac{582}{138} \frac{1}{125} \approx 0.003
 \end{aligned} \tag{39}$$

L'égalité des puissances donne :

$$v_b(1 + \alpha \epsilon^2) = v_{b0} \quad v_{b0} = \frac{\Delta \rho g h^2}{12\eta} \tag{40}$$

Lettre	valeur
a	159 744
b	1 616 384
c	3 365 824
d	2 0266 40
e	537 460
f	20 825
g	441 548 800
i	39 424
j	211 904
k	94 864
l	14 476
m	18 551
n	10 752
p	25 424
q	16 712
r	5301
s	55 193 600
δ	13475
β	172 480

TABLE 2 – Valeur des différents coefficients numériques.

7.2 Spectre d'absorption de d'émission de la fluorescéine

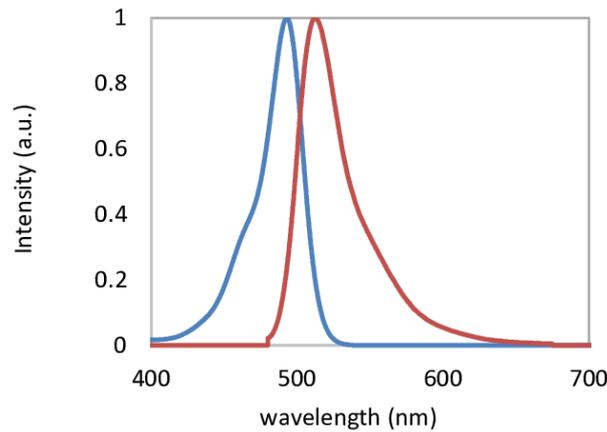


FIGURE 16 – Spectre d’absorption et d’émission de la fluorescéine. Figure tirée de [15]

Références

- [1] I. BELIEN, K. CASHMAN, A. REMPEL. Gas accumulation in particle-rich suspensions and implications for bubble populations in crystal-rich magma. *Earth and Planetary Science Letters* 297, p 133–140, 2010.
- [2] S. CARDOSO, J. CARTWRIGHT. Increased methane emissions from deep osmotic and buoyant convection beneath submarine seeps as climate warms. *Nature communications* 7, 13266. 2016.
- [3] X. CUILING, X. GUOQIANG, X. JUNHUI, S. ZHILEI, W. NENGYOU. Research Progress of Sea-floor Pockmarks in Spatio-Temporal Distribution and Classification. *J. Ocean Univ. China* 19, p 69–80. 2020.
- [4] C. MADEC. Dynamique de bulles isolées et interactions de bulles multiples dans des suspensions granulaires confinées entre deux plaques. Thèse de doctorant, ENS de Lyon, 2021.
- [5] J. BUTLER. Suspension dynamics : moving beyond steady. *Journal of Fluid Mechanics* 752, p 1–4. 2014.
- [6] E. GUYON, J. HULIN, L. PETIT. Hydrodynamique physique. *Savoirs actuels. EDP Sciences*, 2001.
- [7] G. TAYLOR, P.G. SAFFMAN. A note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous Medium. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.* 12, partie 3. 1958
- [8] T. MAXWORTHY. Bubble formation, motion and interaction in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.*, vol. 173. 1986.
- [9] C.MADEC, B. COLLIN, J. JOHN SOUNDAR JEROME, S. JOUBAUD. Puzzling Bubble Rise Speed Increase in Dense Granular Suspensions. *Physical review letter* 125, issue 7. 2020.
- [10] R. CLIFT, J. GRACE, M. WEBER. Bubbles, Drops, and Particles. Academic Press. 1978.
- [11] A. FILELLA, P. ERN, V. ROIG. Oscillatory motion and wake of a bubble rising in a thin-gap cell. *J. Fluid Mech.* 778, p 60–88. 2015.
- [12] É. GUAZZELLI, O. POULIQUEN. Rheology of dense granular suspensions. *J. Fluid Mech.* 852, P1. 2018.
- [13] M. SARABIAN, M. FIROUZANIA, B. METZGER, S. HORMOZI. Fully developed and transient concentration profiles of particulate suspensions sheared in a cylindrical Couette cell. *J. Fluid Mech.* 862, p 659–671. 2019.
- [14] M. SOUZY. Mélange dans les suspensions de particules cisailées à bas nombre de Reynolds. Thèse de doctorat, Université d’Aix-Marseille, 2016.

- [15] S. MANNA, P. ZHANG, R. MELEPPAT, E. PHUNG, M. OLIVEIRA, C. CHANG, J. CHAN, R. ZAWADZKI. Feasibility Study of Raman Spectroscopy for Investigating the Mouse Retina in vivo. *SPIE 10474*. 2018.