

## THESE

en vue de l'obtention du grade de Docteur, délivré par  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

**Ecole Doctorale N° 52**  
Physique et Astrophysique de Lyon (PHAST)

**Discipline : Physique**

Soutenue publiquement le 28/06/2024 par :

**Benjamin MONNET**

---

## Fluides newtoniens et suspensions : bulle unique et vidange

---

Devant le jury composé de :

AUSSILLOUS, Pascale	Professeure	IUSTI, Marseille	Rapporteure
DOLLET, Benjamin	CR, CNRS	LIPhy, Grenoble	Rapporteur
GONDRET, Philippe	Professeur	FAST, Orsay	Examinateur
ROIG, Véronique	Professeure	IMFT, Toulouse	Examinatrice
SOUNDAR JEROME, John	MCF	LMFA, Lyon	Invité
JOUBAUD, Sylvain	MCF	LPENSL, ENS de Lyon	Directeur de thèse
VIDAL, Valérie	DR, CNRS	LPENS, ENS de Lyon	co-Directrice de thèse



*"Le bon sens est la chose au monde la mieux partagée : car chacun pense en être bien pourvu [...]. Car ce n'est pas assez d'avoir l'esprit bon, mais le principal est de l'appliquer bien."*<sup>1</sup>

René Descartes, Discours de la Méthode

---

1. La notion de "bon sens" est couramment utilisée, que ce soit dans les conversations de tous les jours, dans la physique ou dans les discours politiques. Néanmoins, chaque personne se pense doter de ce qu'elle appelle le bon sens, qui ne se base sur rien de concret, permettant de justifier une chose et son contraire. C'est en cela qu'une méthodologie rigoureuse est importante. Elle permet de passer outre les vices subjectifs du bon sens et de proposer un moyen d'éviter les travers des préjugés pour essayer d'établir des vérités qui se veulent objectives.

# Remerciements

*"La vie est une longue chaîne de relations humaines."*  
Antoine de Saint-Exupéry

Cette partie n'est pas facile à rédiger parce qu'il s'en passe des choses en trois ans. Bien plus que je ne l'aurais imaginé en septembre 2021, lorsque je me suis lancé dans cette thèse. Je m'excuse par avance auprès des personnes que je risque d'oublier de mentionner. Si vous avez été présents dans ma vie ces trois dernières années, vous le savez très certainement sans avoir besoin de lire.

Tout d'abord, je tiens à remercier Pascale Aussillous et Benjamin Dollet d'avoir accepté de prendre le temps de rapporter mon manuscrit de thèse. Je ne peux que me douter du temps que cela prend... et le temps est toujours dur à trouver. Merci aussi au reste du jury d'avoir bien voulu examiner cette thèse et de rendre ma soutenance possible.

Je souhaite naturellement remercier Sylvain, Valérie et John, avec qui j'ai partagé ces trois années de recherche. Vous avez été de supers encadrants, tant sur le plan scientifique que humain. On s'est beaucoup cassé la tête ensemble mais on a aussi beaucoup rigolé. Merci à vous d'avoir été aussi présents et à l'écoute.

Merci à toutes les autres personnes du laboratoire de physique avec qui j'ai pu partager des moments, que ce soit des doctorants, des post-doctorants, des stagiaires, des permanents ou autre.

Merci beaucoup à toi Solenn, parce que c'est avec toi que je partage mon quotidien que tu le rends bien mieux qu'il ne serait sans toi. Il y aurait bien trop de choses à dire pour montrer l'importance que notre relation a dans ma vie donc je me contenterai dans ce paragraphe de te dire : merci.

Un paragraphe t'est bien évidemment dédié Fred, toi avec qui j'ai vécu près de six ans de ma vie dont quasiment toute la thèse. Tu es un ami précieux avec lequel j'ai partagé tout type de moment, des plus joyeux aux plus compliqués, du jour où l'on s'est rencontré à la rédaction de cette thèse.

Il va sans dire que tu as aussi ton paragraphe Colléaux. Pour nos années de colocation, pour nos parties en ligne, pour tous ces week-ends passés à Lyon ou à Nice, pour nos discussions sur tout et n'importe quoi, pour m'avoir fait découvrir Timeguessr, ... La liste est longue et je ne pourrais être exhaustif donc : merci.

Un grand merci à tous les autres amis que j'ai pu rencontrer pendant mes années à l'ENS

et avec lesquels j'ai partagé beaucoup de choses : Manon, Nacim, Clem, Clarisse, Clémence, Servane, Joséphine, Sophie et bien d'autres encore.

Merci à toi Vincent, parce que même si l'on ne se voit pas souvent, il se passe rarement un jour sans que l'on ne se parle. On se partage tout et ça fait maintenant seize ans que c'est le cas.

Le gang, vous êtes là depuis le lycée (ou le collège) ou vous le serez sûrement à vie. Merci Esther, Guillaume, Quentin, Charlotte, Delphine, Mike et Lolo pour tous les moments qu'on a pu passer ces dernières années, que ce soit les vacances d'été, les Nouvel An ou juste les petites discussions autour d'un verre. Vous êtes une réelle seconde famille pour moi. J'aurais pu écrire un paragraphe pour chacun d'entre vous mais cela éterniserait les remerciements.

En parlant de famille, je tiens à remercier tout particulièrement mes parents, qui m'ont offert la possibilité de faire cette thèse de par leur éducation. Vous avez toujours été là pour moi et je me rends compte de la chance que j'ai de vous avoir. Merci au reste de ma famille : mon frère, ma belle-soeur, mes grands parents, mes cousins, ...

Enfin, je voudrais remercier toutes les personnes qui ont pu être importantes pendant ces trois années mais que j'ai fini par perdre de vue : Lisa, Clara, Célia, Sinan, Gabrielle, Marin, Rémi et d'autres encore.

# Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	vii
Avant propos	1
<b>1 Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Remontée d'une bulle unique dans un liquide non confiné	3
1.1.1 Grandeurs pertinentes et nombres adimensionnels	3
1.1.2 Forme des bulles	5
1.1.3 Vitesse des bulles	6
1.2 Remontées spontanées de bulles : vidange de réservoir	7
1.3 Remontée d'une bulle unique en milieu confiné	9
1.3.1 Présentation et mise en équation en régime visqueux	10
1.3.2 Vitesse des bulles en régime inertiel	17
1.3.3 Forme des bulles	18
1.4 Remontée d'une bulle unique dans une suspension	21
1.4.1 Rhéologie des suspensions	21
1.4.2 Remontée dans un milieu non confiné	23
1.4.3 Remontée dans un milieu confiné	24
1.5 Objectifs et plan de la thèse	26
<b>2 Bulle unique en cellule de Hele-Shaw verticale</b>	<b>29</b>
2.1 Méthodologie	31
2.1.1 Dispositif expérimental	31
2.1.2 Liquides utilisés	32
2.1.3 Traitement numérique	32
2.2 Observations générales	34
2.3 Vitesse des bulles en régime visqueux	36
2.3.1 Vérification du modèle de Taylor-Maxworthy	36
2.3.2 Étude du modèle empirique	37
2.4 Vitesse de remontée des bulles pour toutes viscosités	40
2.5 Forme des bulles	43
2.6 Coefficient de traînée	46
2.7 Hydrodynamique du liquide	49

2.7.1	Mesure expérimentale du champ de vitesse par PIV . . . . .	50
2.7.2	Champ de vitesse théorique . . . . .	52
2.7.3	Transition laminaire/inertiel : comparaison des champs de vitesse théo- riques et expérimentaux . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Bulle unique en cellule de Hele-Shaw inclinée</b>	<b>61</b>
3.1	Méthodologie . . . . .	62
3.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	62
3.1.2	Liquides et cellules utilisés . . . . .	63
3.2	Observations générales . . . . .	64
3.3	Vitesse des bulles . . . . .	65
3.3.1	Résultats expérimentaux . . . . .	65
3.3.2	Modèle phénoménologique . . . . .	67
3.3.3	Discussion autour de Navier-Stokes . . . . .	68
3.4	Rapport d'aspect des bulles . . . . .	72
3.5	Étude dans le plan du gap . . . . .	73
3.5.1	Couches de lubrification . . . . .	73
3.5.2	Forme des bulles dans le plan du gap . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Bulle unique dans une suspension</b>	<b>81</b>
4.1	Méthodologie . . . . .	82
4.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	82
4.1.2	Suspension utilisée . . . . .	82
4.2	Vitesse de remontée d'une bulle unique . . . . .	84
4.2.1	Régime visqueux . . . . .	84
4.2.2	Régime inertiel . . . . .	85
4.3	Forme des bulles . . . . .	86
4.3.1	Régime visqueux . . . . .	86
4.3.2	Régime inertiel . . . . .	87
4.4	Perspectives . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Vidange d'un réservoir idéal fermé</b>	<b>89</b>
5.1	Méthode expérimentale . . . . .	90
5.1.1	Description du dispositif . . . . .	90
5.1.2	Calibration du capteur de force . . . . .	91
5.1.3	Liquides et suspensions utilisés . . . . .	91
5.2	Observations générales et traitement numérique . . . . .	95
5.2.1	Débits volumiques . . . . .	95
5.2.2	Incertitudes sur les débits . . . . .	97
5.2.3	Fréquence des bulles . . . . .	98
5.2.4	Impact du diamètre de vidange sur la physique du problème . . . . .	101
5.3	Vidange d'un fluide newtonien : grands diamètres de vidange . . . . .	103
5.3.1	Impact de la masse volumique du fluide . . . . .	103
5.3.2	Impact de la viscosité . . . . .	104
5.4	Vidange d'un fluide newtonien : petit diamètre de vidange . . . . .	109

5.4.1	Observations générales . . . . .	109
5.4.2	Impact de la viscosité . . . . .	110
5.5	Vidange d'une suspension . . . . .	112
5.5.1	Observations générales . . . . .	112
5.5.2	Influence de la fraction volumique . . . . .	114
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>119</b>
	<b>A Mesure des propriétés physiques des liquides utilisés</b>	<b>123</b>
A.1	Mesure de la masse volumique du liquide . . . . .	123
A.2	Mesure de la tension de surface du liquide . . . . .	123
A.3	Mesure de viscosité . . . . .	123
	<b>B Visualisation des grains</b>	<b>127</b>
B.1	Isoindicité : description . . . . .	127
B.2	Recherche du bon mélange . . . . .	127
B.2.1	Détermination grossière . . . . .	128
B.2.2	Détermination précise . . . . .	129
B.2.3	Vérification expérimentale . . . . .	131
	<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>

# Avant propos

Quand des personnes me demandent des nouvelles de ma thèse, elles<sup>2</sup> ont tendance à me demander comment vont "mes bulles dans le sable", parfois suivi de la question "Mais pourquoi tu fais ça déjà?". L'objectif de cet avant-propos est d'apporter une réponse à cette dernière question et le but du manuscrit est, dans un sens, de répondre partiellement à la première question.

La première raison que je trouve au travail que j'ai effectué durant ces trois ans est simple : je prends du plaisir à faire de la physique. Et c'est dans le plaisir qu'on trouve le plus de motivation. Néanmoins, on peut noter que cette raison est souvent loin d'être suffisante pour trouver les fonds nécessaires au financement d'une thèse.

De manière philosophique, un proverbe grec dit "*Πομφόλυξ ο ανθρωπος*", que l'on peut traduire par "L'homme est une bulle". Lucien de Samosate interprète cette phrase : "J'ai pensé à une comparaison qui permet de décrire la vie humaine dans son ensemble... Tu vois ces bulles qui remontent à la surface sous une cascade, ces petites poches d'air qui produisent ensemble de la mousse?... Eh bien, les êtres humains sont ainsi. Ils sont en quelque sorte des poches d'air gonflées qui un jour ou l'autre devront éclater."<sup>3</sup>

De manière bien plus pragmatique, nous pouvons remarquer que les bulles sont présentes dans notre quotidien, par exemple lors de la consommation d'une boisson gazeuse telle qu'une bière ou une limonade (voir figure 1(a)). On en trouve aussi dans la nature, par exemple au fond de la mer (voir figure 1(b)) ou lors d'une éruption volcanique (voir figure 1(c)). L'omniprésence des bulles attise la curiosité et donne envie de mieux comprendre leur comportement.

Les remontées de bulles soulèvent énormément de questions en physique fondamentale. On peut par exemple remarquer qu'au fond de l'eau (voir figure 1(b)), une grande quantité de bulles remonte dans un liquide alors que sur la figure 1(c), une seule bulle est présente mais elle remonte dans un mélange complexe qu'est le magma (mélange chaud de roches fondues, de bulles et de cristaux). Il y a donc de nombreuses variables : le nombre de phases présentes (deux ou trois selon que la bulle remonte dans un liquide ou dans un mélange liquide et grains, que l'on appelle suspension), le nombre de bulles, leur taille, la présence de flux thermique, etc. Dans les travaux présentés dans ce manuscrit, nous étudierons une bulle unique (remontée d'une seule bulle), composée de gaz inerte (pas de réaction chimique)

---

2. Tout particulièrement mes grands-parents.

3. Traduction de la version anglaise : "I've thought of a simile to describe the human life as a whole... You know the bubbles that rise to the surface below a waterfall—those little pockets of air that combine to produce foam?... Well, that's what human beings are like. They're more or less inflated pockets of air... but sooner or later they're bound to go pop". Les deux citations utilisées sont tirées de Prosperetti (2004).



FIGURE 1 – (a) Photographie d’une limonade (<https://hdqwalls.com/download/1680x1050/lime-drink-bubbles>) (b) Photographie d’un plongeur au large de Bottaro (îles Éoliennes, Italie, tirée de [Caramanna et al. \(2005\)](#)). (c) Photographie de l’éclatement d’une bulle de gaz en surface d’un lac de lave sur le volcan de Erta Ale, en Éthiopie (<https://www.linternaute.com/nature-animaux/magazine/1073848-au-coeur-des-volcans-les-plus-fascinants-du-monde/1073863-bulles>).

dans un liquide ou une suspension (deux ou trois phases), où nous négligerons tout transfert thermique. Nous étendrons notre étude à la remontée de bulles générées par la vidange d’un liquide ou d’une suspension.

Cette thèse a été réalisée dans un laboratoire de physique, ce qui signifie que nous avons construit des expériences qui permettent d’étudier les problèmes qui nous intéressent. Deux montages expérimentaux en particulier ont attiré notre attention. Le premier est une cellule formée de deux plaques proches afin d’examiner comment une bulle remonte en étant confinée entre ces deux plaques. Le second est un grand réservoir, fabriqué dans le but de comprendre la manière dont celui-ci est vidé par l’alternance entre la formation de bulles et l’écoulement de liquide. Ces équipements permettent de travailler sur des systèmes simples et idéaux afin de donner des éléments de compréhension pour des cas plus complexes comme ceux évoqués par les photos de la figure 1. Pour cela, nous faisons varier les paramètres expérimentaux tels que le liquide ou les particules que l’on utilise (dans le cas des suspensions) et on essaie de comprendre comment cela impacte la vidange d’un réservoir ou bien la remontée de la bulle.



# Chapitre 1

## Introduction

Les écoulements multiphasiques mettant en jeu une bulle unique forment un sujet très vaste sur lequel beaucoup de travaux ont été effectués (Feng et Leal, 1997; Magnaudet et Eames, 2000; Dollet et al., 2019). Ce chapitre fera l'état de l'art des points qui nous concernent, l'objectif n'étant pas d'être exhaustif mais de donner les éléments nécessaires à la compréhension du manuscrit. Dans un premier temps (partie 1.1), nous nous intéresserons au cas où la bulle évolue dans un milieu "infini" (elle ne ressent pas les effets de bord). Dans un second temps (partie 1.2), la vidange de réservoir sera étudiée étant donné que la physique de ce problème est pilotée par la formation de bulles. Ensuite, dans la partie 1.3, nous présenterons les travaux réalisés sur la remontée d'une bulle unique dans un liquide newtonien contenu dans un milieu confiné, à savoir une cellule de Hele-Shaw. La partie 1.4 abordera le sujet de la remontée d'une bulle unique dans une suspension en cellule de Hele-Shaw. Enfin, la partie 1.5 présentera les objectifs de la thèse vis-à-vis de l'état de l'art établi dans les parties précédentes.

### 1.1 Remontée d'une bulle unique dans un liquide non confiné

#### 1.1.1 Grandeurs pertinentes et nombres adimensionnels

La remontée d'une bulle unique dans un liquide newtonien met en jeu une physique complexe, impliquant majoritairement la pesanteur, les effets de tension de surface et les frottements fluides. Dans cette partie, nous parlerons exclusivement du cas où la bulle est dans un milieu que l'on considère comme infini, ce qui revient à pouvoir négliger les effets de bord. Des photographies de bulles remontant dans de l'eau tirées de Hosen et al. (2024) sont présentées figure 1.1.1(a-d). Afin de caractériser les différents phénomènes physiques en jeu, il nous faut comprendre quelles sont les grandeurs physiques pertinentes qui les pilotent. Le système, schématisé sur la figure 1.1.1(e), est composé

- d'un liquide, caractérisé par sa masse volumique  $\rho$ , sa tension de surface avec l'air  $\gamma$  et sa viscosité  $\eta$ ;
- d'un paramètre extérieur, la gravité  $\vec{g}$ ;

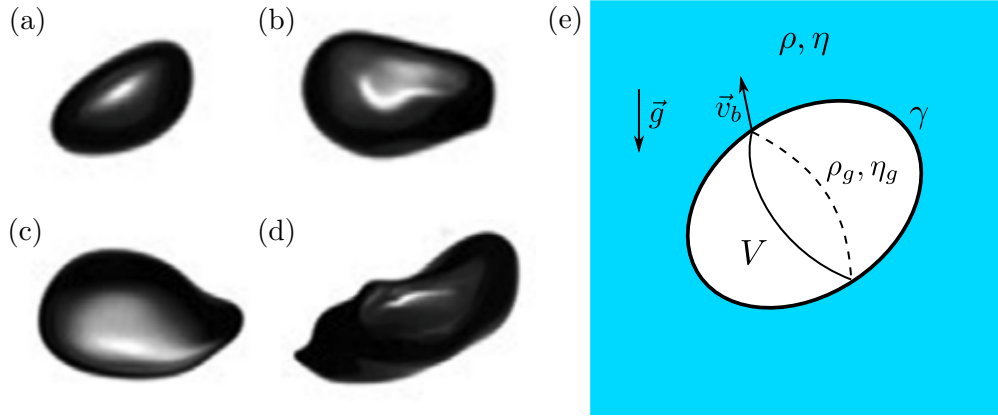


FIGURE 1.1.1 – (a-d) Photographies d’une bulle remontant dans de l’eau, tirées de [Hosen et al. \(2024\)](#). (e) Schéma d’une bulle de forme arbitraire de volume  $V = \pi d_3^3/6$ , rempli d’un gaz de masse volumique  $\rho_g$  et de viscosité  $\eta_g$ , allant à la vitesse  $v_b$  dans un fluide de masse volumique  $\rho$ , viscosité  $\eta$  et tension de surface  $\gamma$  avec l’air.

- d’une bulle allant à la vitesse  $\vec{v}_b$ , de forme quelconque, occupant un volume  $V$  composé d’air de masse volumique  $\rho_g$  et de viscosité  $\eta_g$ . Ce volume sera caractérisé par une longueur caractéristique correspondant à la phère de diamètre  $d_3$  donnant le même volume, à savoir

$$V = \pi d_3^3/6 \quad (1.1.1)$$

Afin de rendre l’étude la plus universelle possible, on cherche à construire des nombres adimensionnés qui piloteraient la physique du problème. Nous nous plaçons dans le cadre où il n’y a aucune réaction chimique dans le liquide et ce dernier est homogène. Les nombres adimensionnés que nous utiliserons pour notre étude sont

- le rapport des masses volumiques  $\tilde{\rho} = \rho_g/\rho$ . Comme nous ne considérons que la remontée d’une bulle d’air dans un liquide donc nous avons toujours  $\tilde{\rho} \ll 1$ .
- le rapport des viscosités  $\tilde{\eta} = \eta_g/\eta$ , qui vérifié  $\tilde{\eta} \ll 1$  dans notre cas d’étude.
- le nombre de Bond (ou d’Eötvös), qui compare les effets gravitationnels aux effets de tension de surface

$$Bo = Eo = \frac{\rho g d_3^2}{\gamma}. \quad (1.1.2)$$

Si le nombre de Bond est élevé, cela signifie que l’étirement de la bulle dû à la gravité dominera les effets de tension de surface qui tend à rendre la bulle sphérique.

- le nombre de Galilée, qui quantifie la compétition entre gravitation et viscosité

$$Ga = \frac{\rho \sqrt{g d_3} d_3}{\eta_f}. \quad (1.1.3)$$

- le nombre capillaire, qui caractérise l’importance relative de la capillarité et la viscosité,

$$Ca = \frac{v_b \eta}{\gamma}. \quad (1.1.4)$$

- le nombre de Weber, qui compare les effets de capillarité aux effets inertiels

$$We = \frac{\rho v_b^2 d_3}{\gamma}. \quad (1.1.5)$$

- le nombre de Reynolds, qui compare les effets inertiels aux effets visqueux

$$Re_3 = \frac{We}{Ca} = \frac{\rho v_b d_3}{\eta}. \quad (1.1.6)$$

- le nombre de Morton, qui permet de caractériser un liquide de manière intrinsèque en se basant uniquement sur ses propriétés physico-chimiques

$$Mo = \frac{g\eta^4}{\rho\gamma^3}. \quad (1.1.7)$$

Dans la suite, nous allons nous intéresser à l'influence de ces nombres sans dimension sur la dynamique des bulles à la fois au niveau de leur forme et de leur vitesse.

### 1.1.2 Forme des bulles

[Tripathi et al. \(2015\)](#) ont montré, à l'aide de simulations numériques, la grande variété de formes que peuvent prendre les bulles et proposent de les classer dans un diagramme  $(Eo, Ga)$  divisé en cinq zones distinctes (voir figure 1.1.2(a)). Ce diagramme a été vérifié expérimentalement par [Sharaf et al.](#) (d'où sont tirées les photographies 1.1.2(b), (c) et (d)) à l'aide de mélanges eau/glycérol allant de l'eau pure au glycérol pur. Il est organisé de la manière suivante :

- **I** Les bulles sont axisymétriques, de formes variées (sphérique, ellipsoïde ou de la forme d'un capuchon), l'axe de révolution étant orienté dans la sens du vecteur vitesse, qui est opposé à celui de la gravité.
- **II** Les effets inertiels deviennent importants et génèrent des recirculations, ce qui a pour effet de faire zigzaguer la bulle et de modifier sa forme au cours du temps. Une chronophotographie pour  $Ga = 44$  et  $Eo = 0.63$  est présentée figure 1.1.2(b).
- **III** La bulle est axisymétrique et remonte en ligne droite, comme pour la région I. Néanmoins, les effets de gravité étant plus importants, la bulle est étirée et une zone d'air se crée à l'arrière et au centre de celle-ci, lui donnant une forme semblable à celle d'une jupe. Un exemple d'une telle bulle de diamètre 19.3 mm obtenue expérimentalement est montré figure 1.1.2(c).
- **IV** Les effets gravitationnels et inertiels (qui sont déstabilisants) dominent les effets visqueux et de tension de surface (qui sont stabilisants), ce qui va entraîner une rupture de la bulle en une bulle principale et plusieurs bulles satellites. Cette région n'a pas été observée expérimentalement.
- **V** La bulle se fragmente en plusieurs bulles plus petites évoluant dans des régions  $(Eo, Ga)$  plus stables. La figure 1.1.2(d) montre une rupture de bulle de diamètre 22.8 mm pour  $Ga = 171$  et  $Eo = 131$ .

Dans la suite de ce manuscrit, on se place dans le cadre où les bulles ne se fragmentent pas et remontent à vitesse constante le long de leur axe de symétrie, ce qui correspond aux régions I et III.

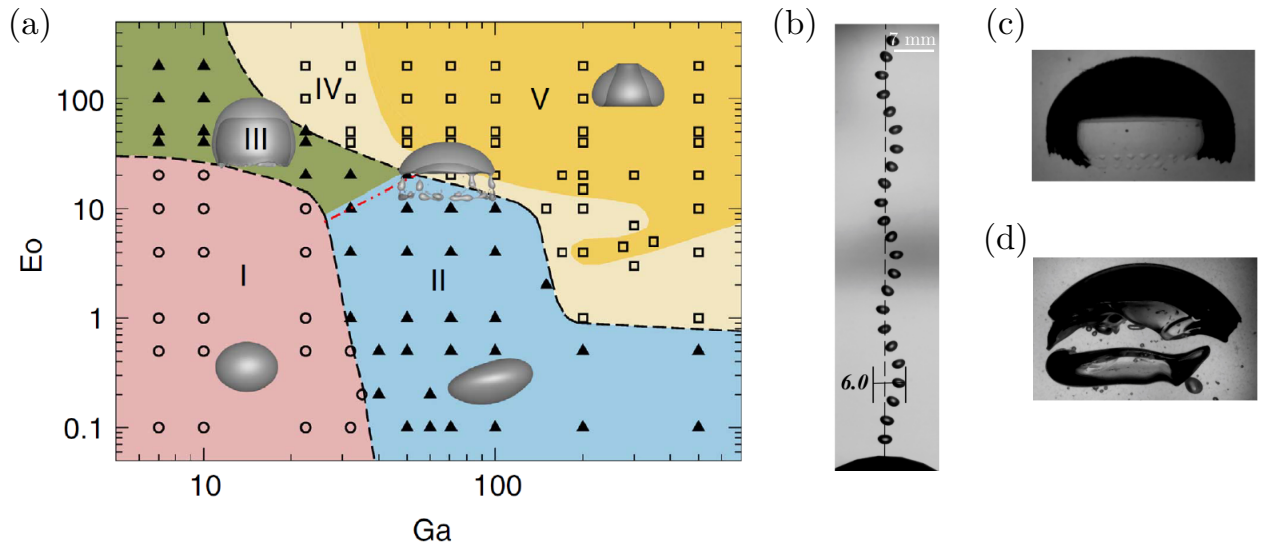


FIGURE 1.1.2 – (a) Diagramme  $(Eo, Ga)$  des différents comportements observés (tiré de [Tripathi et al. \(2015\)](#)). I : bulle axisymétrique remontant en ligne droite. II : bulle de forme variable qui zigzague. III : bulle en forme de jupe remontant en ligne droite. IV : Rupture de la bulle au niveau de l'arrière cette dernière. V : Rupture en plusieurs bulles plus stables. (b) Chrophotographie expérimentale d'une bulle dans la région II. Photographie d'une bulle (c) dans la région III et (d) dans la région V. Les photos sont extraites de [Sharaf et al.](#)

### 1.1.3 Vitesse des bulles

La vitesse d'une bulle est pilotée par la compétition entre la poussée d'Archimède, qui tend à faire remonter la bulle, son poids qui tend à la faire descendre et les frottements fluides qui s'opposent à son mouvement. La figure 1.1.3(a) montre l'évolution de la vitesse des bulles dans de l'eau en fonction de leur taille, où l'on peut distinguer trois régimes (d'après [Clift et al. \(2005\)](#)) :

- le régime de Stokes ( $d_3 \leq 0.5$  mm), où les bulles sont sphériques et le nombre de Reynolds inférieur à l'unité ( $Re_3 \ll 1$ ). Les frottements sont purement visqueux et la vitesse de remontée des bulles est alors donnée par

$$v_b = \frac{1}{12} \frac{g(\rho - \rho_g)d_3^2}{\eta}. \quad (1.1.8)$$

Noter que cette vitesse est légèrement différente de celle correspondant à une sphère rigide<sup>1</sup>.

- Pour les bulles plus grosses ( $d_3 > 20$  mm), dont le nombre de Reynolds est grand ( $Re_3 \gg 1$ ), la vitesse vaut

$$v_b = 0.707\sqrt{gd_3}, \quad (1.1.9)$$

ce qui fonctionne pour tout type de liquide, comme on peut le voir sur la figure 1.1.3(b).

1. Pour une sphère rigide, le préfacteur est de 1/18 mais les conditions à l'interface n'étant pas les mêmes pour une goutte, on trouve 1/12 ([Clift et al., 2005](#)).

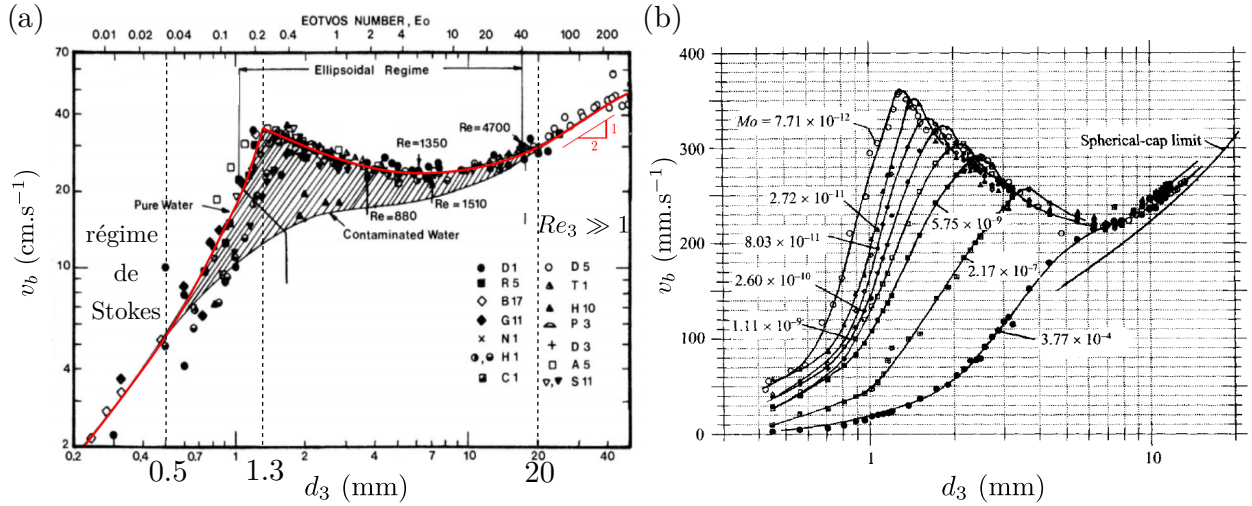


FIGURE 1.1.3 – (a) Vitesse  $v_b$  d’une bulle unique en fonction de son diamètre équivalent  $d_3$  pour de l’eau (d’après Clift et al. (2005)). La courbe rouge correspond aux équations 1.1.8, 1.1.9 et 1.1.10. (b) Vitesse  $v_b$  d’une bulle unique en fonction de son diamètre équivalent  $d_3$  pour différents mélanges eau/glycérine (d’après Maxworthy et al. (1996)). Les mélanges sont caractérisés par leur nombre de Morton.

- Pour les bulles de taille intermédiaires,  $0.5 < d_3 < 20$  mm, les effets inertiels et les effets de tension de surface interviennent. Les bulles se déforment et deviennent ellipsoïdales, en s’applatissant perpendiculairement à leur direction de remontée. Ces effets sont complexes à prendre en compte théoriquement mais une forme empirique a été proposée sous la forme

$$v_b = \sqrt{\frac{2g\lambda_c^2}{d_3} + \frac{g(\rho - \rho_g)d_3}{2\rho}}, \quad (1.1.10)$$

où  $\lambda_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$  est appelée longueur capillaire et caractérise la compétition entre gravité et capillarité ( $\lambda_c \sim 2.7$  mm pour de l’eau pure). L’équation 1.1.10 ne fonctionne que pour  $1.3 < d_3 < 20$  mm et permet de capturer la non-monotonie de la vitesse observée expérimentalement sur cette plage de diamètre. De plus, elle n’est valable que pour l’eau étant donné que le comportement de  $v_b$  avec  $d_3$  dépend fortement du nombre de Morton dans cette région comme le montre la figure 1.1.3(b). Le domaine  $0.5 < d_3 < 1.3$  mm n’a pas été modélisé à notre connaissance.

## 1.2 Remontées spontanées de bulles : vidange de réservoir

Un exemple pratique où l’on peut observer la génération spontanée de bulles est la vidange d’une bouteille (voir figure 1.2.1). En effet, celle-ci se compose d’alternances entre la rentrée d’air formant une bulle et la sortie de liquide qui vide progressivement le réservoir (Rohilla et Das, 2020). La vitesse de vidange d’un réservoir idéal (sans goulot) cylindrique est déterminée par la vitesse des bulles, comme suggéré par Clanet et Searby (2004). En s’appuyant sur la formule de la vitesse de remontée d’une bulle en 3D dans de l’eau (équation 1.1.9), Clanet et

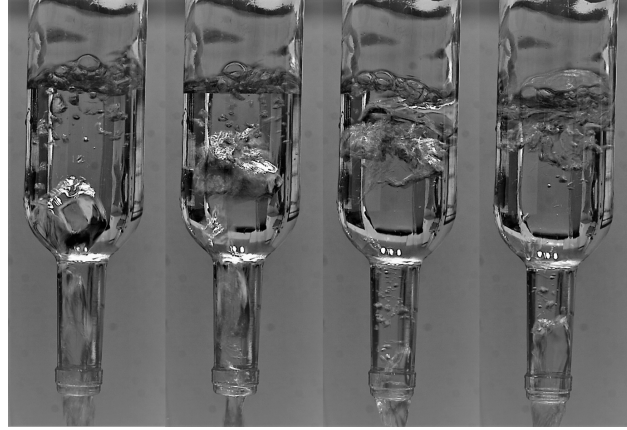


FIGURE 1.2.1 – Photographies (réalisées par mes soins) de la vidange d’une bouteille en verre commerciale remplie d’eau. Il s’agit d’une bouteille de Monbazillac 2019 consommée au préalable afin d’éviter tout gaspillage. *L’abus d’alcool est dangereux pour la santé.*

Searby (2004) montrent que le temps de vidange  $T_e$  d’un cylindre de hauteur  $L_b$ , diamètre  $D_0$  et trou de vidange  $d$  vaut

$$\frac{T_e}{T_{e0}} = \left( \frac{D_0}{d} \right)^{5/2} \quad (1.2.1)$$

où  $T_{e0} \approx 3.0L_b/\sqrt{gD_0}$  correspond au temps de vidange d’un cylindre dont le diamètre de vidange correspond à son diamètre en entier (Dumitrescu, 1943). La dérivation exacte de l’équation 1.2.1 est présentée dans le chapitre 5 (partie 5.3.2). On peut réécrire le temps de vidange sous la forme d’un débit volumique moyen

$$D_V = \frac{\pi}{12} d^2 \sqrt{gd} \equiv D_{Vi}. \quad (1.2.2)$$

qui se trouve être constant tout le long de la vidange et indépendant de la hauteur initiale de liquide. Ce résultat a été vérifié expérimentalement par Clanet et Searby (2004) pour différents cylindres ( $D_0, L, d$ ) remplis d’eau.

La remontée des bulles à la surface fait osciller cette dernière, modifiant la pression qu’il y a au-dessus de la surface libre dans le réservoir. On note  $P_{eq} = P_0 - \rho g(L_b - z_{eq})$  la pression à l’équilibre hydrostatique, où  $z_{eq}$  la hauteur d’air dans la bouteille (voir figure 1.2.2(a)). En notant  $\delta P$  les variations de pression induites par les variations  $\delta z$  de la surface autour de la position d’équilibre  $z_{eq}$ , on a  $\delta P/P_{eq} = -\Gamma \delta z/z_{eq}$  en supposant l’évolution isentropique, où  $\Gamma$  est l’indice adiabatique du gaz. On en déduit la force résultante qui vaut  $\delta F = \delta P \pi D_0^2/4$ , qui peut s’écrire sous la forme d’une force de rappel de ressort, c’est-à-dire  $\delta F = -k \delta z$  où  $k = \Gamma P_{eq} \pi D_0^2/(4z_{eq})$ . On utilise alors l’analogie masse-ressort présentée sur la figure 1.2.2(b) où la raideur du ressort vaut  $k = \Gamma P_0 \pi D_0^2/(4z_{eq})$  car  $P_{eq} = P_0 - \rho g(L_b - z_{eq}) \approx P_0$  dans la limite  $\rho g L_b \ll P_0$  et la masse d’eau vaut  $M = \rho \pi D_0^2(L_b - z_{eq})/4$ . On déduit de cette analogie la période d’oscillations  $T = 2\pi\sqrt{M/k}$  qui vaut

$$T = 2\pi \frac{L}{\sqrt{\Gamma P_0/\rho}} \sqrt{\frac{z_{eq}}{L_b} \left( 1 - \frac{z_{eq}}{L_b} \right)}. \quad (1.2.3)$$

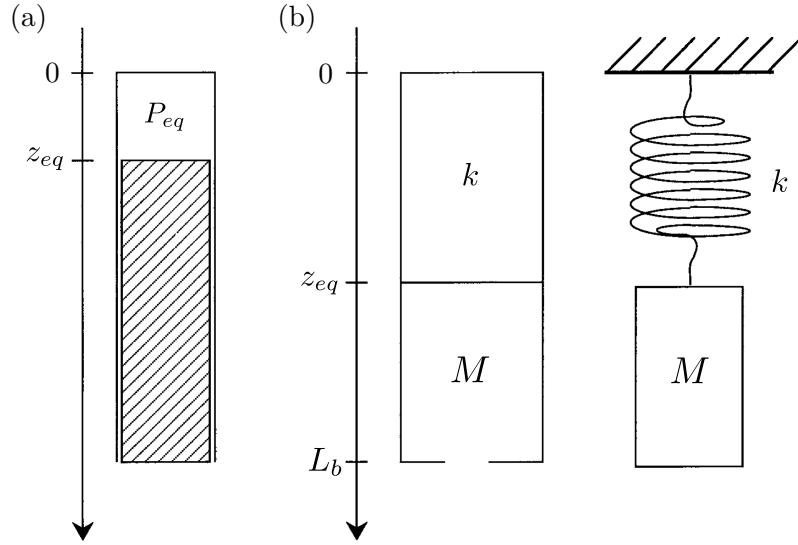


FIGURE 1.2.2 – (a) Schéma du cylindre dont la hauteur d’air vaut  $z_{eq}$  et la pression au niveau de la surface libre vaut  $P_{eq}$ . (b) Schéma de l’analogie masse-ressort où  $M$  est la masse d’eau restante dans le cylindre et  $k$  la raideur du ressort équivalent déduit du travail des forces de pression (d’après [Clanet et Searby \(2004\)](#)).

Ce raisonnement est tiré de [Clanet et Searby \(2004\)](#), qui propose aussi une autre équation physiquement semblable mais plus complète pour  $T$ , trouvée par un calcul partant de l’équation de Navier-Stokes et non pas par analogie. Le préfacteur est similaire mais la dépendance en  $z_{eq}/L$  est légèrement différente et une dépendance en  $d$  apparaît. Néanmoins, dans la limite  $D_0^2/(dL_b) \ll 1$ , on retrouve l’équation 1.2.3, qui a été vérifiée expérimentalement ([Clanet et Searby, 2004](#)). On peut noter qu’il ne semble pas y avoir de lien entre le débit volumique et la fréquence d’oscillations de la pression. En effet, le premier est constant alors que le dernier est variable d’après ce que l’on vient de voir. Néanmoins, on pourrait s’attendre à ce que la période de formation des bulles au niveau du trou de vidange puisse être liée au débit. [Mer et al. \(2018, 2019\)](#) ont étudié expérimentalement et numériquement la vidange d’un cylindre rempli d’eau, montrant que la période d’oscillations de la surface ainsi que le temps de remontée de la première bulle. L’équation 1.2.2 a été vérifiée et l’évolution précise du signal de pression à la surface libre a été étudiée. On peut voir sur la figure 1.2.3 qu’elle oscille effectivement autour de la pression  $P_{eq} = P_0 - \rho g(L - z_{eq})$  avec une période caractéristique compatible avec l’équation 1.2.3.

### 1.3 Remontée d’une bulle unique en milieu confiné

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux bulles d’air remontant dans un milieu confiné. La géométrie dans laquelle la bulle évolue étant modifiée, les conditions aux limites et donc la physique du problème s’en trouvent changées.



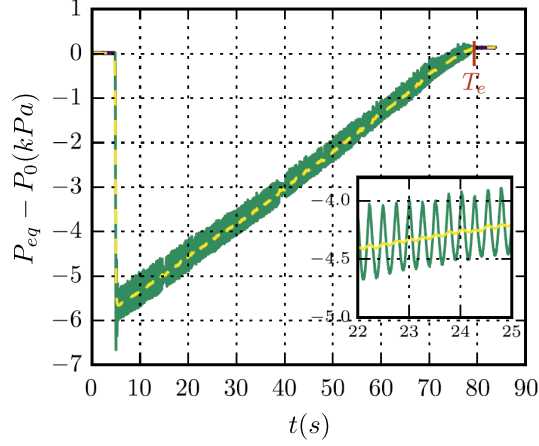


FIGURE 1.2.3 –  $P_{eq} - P_0$  en fonction du temps au cours de la vidange d’une bouteille de hauteur  $L_b = 800$  mm, diamètre  $D_0 = 114$  mm et diamètre de vidange  $d = 25$  mm. Le trait plein vert correspond au signal brut et les pointillés jaunes à un lissage de celui-ci. L’insert montre un zoom sur la plage de temps  $22 < t < 25$  s (d’après Mer et al. (2019)).

### 1.3.1 Présentation et mise en équation en régime visqueux

La figure 1.3.1(a) propose un schéma d’une cellule de Hele-Shaw, qui est constituée de deux plaques parallèles dont la hauteur  $H_c$  et la largeur  $L_c$  sont grandes devant la distance  $h$  qui les sépare (appelée "entrefer" ou "gap"). La bulle, à condition d’avoir un diamètre grand devant le gap, se retrouve donc aplatie dans la direction perpendiculaire aux plaques et prend une forme similaire à celle d’un pancake. On considère qu’elle occupe une aire  $A = \pi d_2^2/4$  dans le plan  $xz$ , où  $d_2$  est le diamètre équivalent de la bulle dans ce plan. On supposera ici que la bulle est circulaire dans le plan  $xz$ ,  $d_2$  étant donc son diamètre. Le développement théorique qui suit est inspiré de Maxworthy (1986) et Madec (2021). Afin d’étudier le problème de la remontée d’une bulle unique dans une telle géométrie, on fait l’hypothèse que le fluide est incompressible, ce qui donne, avec l’équation de Navier-Stokes, le système

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) &= -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}, \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

où  $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$  est le champ de vitesse du liquide et  $P$  le champ de pression.

#### Adimensionnalisation

Afin de mieux comprendre ce système, nous introduisons les grandeurs adimensionnées  $\tilde{s}$ . En utilisant  $d_2/2$  comme longueur caractéristique dans le plan  $(x, z)$  et  $h$  dans la direction  $y$ , cela donne

$$\tilde{x} = \frac{x}{d_2/2}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{d_2/2}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{h}. \quad (1.3.2)$$



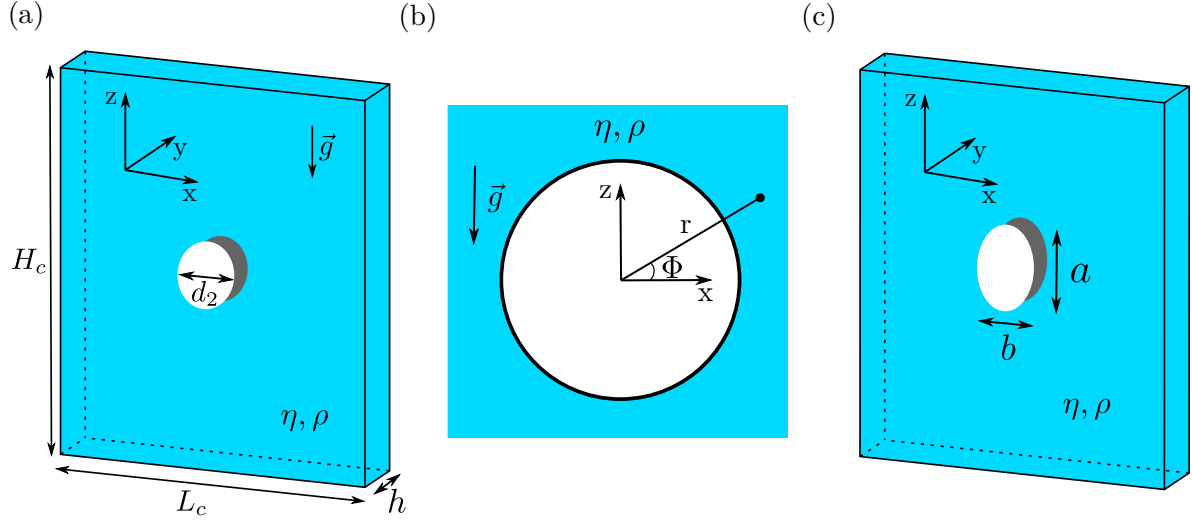


FIGURE 1.3.1 – (a) Schéma d'une bulle formant un disque de diamètre  $d_2$  dans le plan  $xz$  dans une cellule de Hele-Shaw dont l'entrefer  $h$  est petit devant sa hauteur  $H_c$  et sa largeur  $L_c$ . (b) Schéma dans le plan  $xz$  où les coordonnées cylindriques  $(r, \Phi)$  sont définies.  $g$  indique la gravité et  $\eta$  et  $\rho$  indiquent la viscosité et la masse volumique du fluide. (c) Schéma d'une bulle elliptique d'axe dans le sens de la remontée  $a$  et perpendiculairement à la remontée  $b$ . La cellule de Hele-Shaw forme un angle  $\theta$  avec la gravité.

En adimensionnant la vitesse le long de l'axe de remontée de la bulle  $z$  par la vitesse de la bulle  $v_b$ , i.e.  $\tilde{v}_z = v_z/v_b$ , l'incompressibilité du fluide nous donne

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \sim \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{\partial v_y}{\partial y} \Rightarrow v_x \sim v_z \text{ et } \frac{v_z}{d_2} \sim \frac{v_y}{h}. \quad (1.3.3)$$

On introduit donc

$$\tilde{v}_z = \frac{v_z}{v_b}, \quad \tilde{v}_x = \frac{v_x}{v_b} \text{ et } \tilde{v}_y = \frac{v_y d_2}{v_b h} \quad (1.3.4)$$

les vitesses adimensionnées selon  $z, x$  et  $y$ . On a tout ce qu'il faut pour adimensionner l'équation de Navier-Stokes et d'incompressibilité (système 1.3.1) :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{v_b^2}{d_2} \left( \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{v_b^2}{d_2} \frac{h}{d_2} \left( \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{z}} \right) \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{v_b^2}{d_2} \left( \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right) \end{cases} \quad (1.3.5)$$

De même,

$$\Delta \vec{v} = \begin{cases} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{v_b}{h^2} \left[ \left( \frac{h}{d_2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \frac{v_b}{h^2} \left[ \left( \frac{h}{d_2} \right)^3 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial z^2} \right) + \frac{h}{d_2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \frac{v_b}{h^2} \left[ \left( \frac{h}{d_2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial y^2} \right] \end{cases} \quad (1.3.6)$$

On fait l'hypothèse que les bulles sont de grande taille par rapport au gap ( $d_2 \gg h$ ). En gardant uniquement les termes d'ordre 0 en  $h/d_2$ , seuls les termes en rouge restent. On peut alors comparer les termes inertiels et visqueux afin de définir le nombre de Reynolds pertinent pour une cellule de Hele-Shaw

$$\frac{|\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}|}{|\eta \Delta \vec{v}|} = \frac{\rho v_b d_2}{\eta} \left( \frac{h}{d_2} \right)^2 \equiv Re_{2h}. \quad (1.3.7)$$

Cette expression est semblable à celle attendue (voir équation 1.1.6) sauf qu'un facteur géométrique  $(h/d_2)^2$  s'ajoute à cause de la spécificité de la géométrie étudiée. On s'intéresse au régime visqueux, c'est à dire au cas  $Re_{2h} \ll 1$ . On réutilise les variables dimensionnées et on introduit  $\Pi = P + \rho g z$  le champ de pression prenant en compte la pression hydrostatique, ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \end{cases} \quad (1.3.8)$$

## Résolution

Avec l'équation 1.3.8, on déduit tout d'abord que  $\Pi$  ne dépend pas de la variable  $y$ . Les conditions de non pénétration et de non glissement impose que la vitesse soit nulle au niveau des parois de la cellule ( $\vec{v}(y = \pm h/2) = \vec{0}$ ), on obtient

$$\begin{cases} v_x(x, y, z) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \\ v_y(x, y, z) = 0 \\ v_z(x, y, z) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \end{cases}, \quad (1.3.9)$$

où  $v_y = 0$  est obtenue dans la limite  $d_2 \gg h$  car  $v_y = (h/d_2)v_z \ll v_z$  (équation 1.3.3). On peut écrire le champ de vitesse de manière plus compacte sous la forme

$$\vec{v} = -\frac{1}{2\eta} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \vec{\nabla} \Pi(x, z). \quad (1.3.10)$$

L'écoulement s'effectue donc uniquement dans deux directions : il n'y a pas de mouvement dans la direction du gap (nommée  $y$ ). Afin de terminer la résolution du problème, une méthode connue consiste à introduire le champ de vitesse moyenné sur le gap de la cellule,

$$\vec{v} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{v}(x, y, z) dy = -\frac{h^2}{12\eta} \vec{\nabla} \Pi. \quad (1.3.11)$$

On voit donc que le champ moyenné se met sous la forme d'un potentiel

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \Xi, \quad \Xi = -\frac{h^2}{12\eta} \Pi + C, \quad (1.3.12)$$

où  $C$  est une constante. Avec l'incompressibilité du fluide  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 1/h \int_{-h/2}^{h/2} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(x, y, z) dy = 0$ , cela donne

$$\Delta \Xi = 0. \quad (1.3.13)$$

Autrement dit, le potentiel  $\Xi$  suit l'équation de Laplace bidimensionnelle. Afin de complètement déterminer le champ de pression (et donc le champ de vitesse, les deux étant reliés par la relation 1.3.10), il faut donc résoudre cette équation différentielle en utilisant les conditions au bord, c'est-à-dire que la vitesse du fluide au niveau de l'interface de la bulle est égale à la vitesse de la bulle. La forme générale d'une solution au problème de Laplace bidimensionnel est

$$\Xi(r, \Phi) = a_0 \ln r + b_0 + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(n\Phi) + b_n \sin(n\Phi)] (c_n r^n + f_n r^{-n}), \quad (1.3.14)$$

où on se place en coordonnées polaire  $(r, \Phi)$  (voir figure 1.3.1(b)). On considère le problème comme symétrique sous la transformation  $\Phi \rightarrow \pi - \Phi$  (la gauche et la droite de la bulle sont identiques), ce qui implique que  $\forall n \geq 1, a_n = 0$ . De plus, le fluide étant au repos loin de la bulle, on en déduit que  $a_0 = 0$  et  $\forall n \geq 1, c_n = 0$ . Finalement, pour terminer la résolution on utilise le fait que le liquide a la même vitesse que la bulle à l'interface entre les deux, c'est-à-dire que

$$\bar{v}_r(d_2/2, \Phi) = v_b \sin \Phi = \left. \frac{\partial \Xi}{\partial r} \right|_{r=d_2/2}, \quad (1.3.15)$$

ce qui donne

$$v_b \sin \Phi = \sum_{n \geq 1} f_n b_n \sin(n\Phi) (-n) \left( \frac{d_2}{2} \right)^{-(n+1)}. \quad (1.3.16)$$

On en déduit donc que  $\forall n \geq 2, b_n f_n = 0$  et

$$v_b = -b_1 f_1 \frac{4}{d_2^2}, \quad (1.3.17)$$

ce qui permet de conclure sur la forme du potentiel

$$\Xi = -\frac{v_b d_2^2}{4r} \sin \Phi + b_0 \quad (1.3.18)$$

et sur celle du champ de pression, relié au potentiel par l'équation 1.3.12

$$\Pi = \frac{12\eta}{h^2} \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \frac{v_b \sin \Phi}{r} + C', \text{ avec } C' = b_0 + C. \quad (1.3.19)$$

Enfin, on en déduit le champ de vitesse moyenné

$$\begin{aligned} \bar{v}_r &= -\frac{\partial \Xi}{\partial r} \Rightarrow \bar{v}_r = \frac{v_b d_2^2}{4r^2} \sin \Phi \\ \bar{v}_\Phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Xi}{\partial \Phi} \Rightarrow \bar{v}_\Phi = -\frac{v_b d_2^2}{4r^2} \cos \Phi \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

et par la même occasion le champ de vitesse total

$$\vec{v}(r, \Phi, y) = \frac{3v_b}{2} \left(\frac{d_2}{2r}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right] (\sin \Phi \vec{e}_r - \cos \Phi \vec{e}_\Phi). \quad (1.3.21)$$

Cet écoulement correspond à un champ dipolaire dans le plan  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\Phi)$  modulé par un profil de Poiseuille dans la direction  $y$  du gap afin de respecter la condition de non glissement au niveau des parois de la cellule. Néanmoins, le champ de vitesse, tout comme le champ de pression, est proportionnel à la vitesse de la bulle qui reste encore une inconnue.

### Vitesse de remontée de la bulle

Afin de déterminer la vitesse de remontée de la bulle, nous allons utiliser l'équilibre des pressions au niveau de l'interface liquide/gaz. On peut se rendre compte que tout le raisonnement que l'on vient de faire s'applique autant au liquide à l'extérieur de la bulle qu'au gaz à l'intérieur à condition de considérer ce dernier comme incompressible<sup>2</sup>. Le potentiel prend alors exactement la même forme que celui dans le liquide (équation 1.3.14) mais avec des conditions aux limites différentes. En effet, la vitesse est finie en  $r = 0$  donc

$$\Xi_g = b_0 + \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\Phi) c_n r^n, \quad (1.3.22)$$

où  $\Xi_g$  correspond au potentiel du gaz. On utilise alors la même condition aux bords que pour l'eau

$$\bar{v}_r(d_2/2, \Phi) = v_b \sin \Phi = \left. \frac{\partial \Xi_g}{\partial r} \right|_{r=d_2/2}, \quad (1.3.23)$$

ce qui donne

$$\Xi_g = -v_b r \sin \Phi + b_0 \text{ et } \Pi_g = \frac{12\eta_g}{h^2} r \sin \Phi + C'_g, \quad (1.3.24)$$

---

2. Cette hypothèse est cohérente tant que les variations de masse volumique  $\delta\rho$  sont faibles devant la masse volumique. Pour un gaz parfait, on peut estimer  $\delta\rho/\rho = M/(RT)\delta P/P_0 \approx M/(RT)\rho g H_c/P_0 \approx 10^{-7} \ll 1$ .

où  $C'_g$  est une constante. On utilise la continuité du champ de pression et avec  $P = \Pi + \rho g z$  pour  $r > d_2/2$  et  $P = \Pi_g + \rho_g g z$  pour  $r < d_2/2$ , cela donne

$$P\left(r = \frac{d_2^+}{2}, \Phi\right) - P\left(r = \frac{d_2^-}{2}, \Phi\right) - C' - C'_g = \frac{12\Delta\eta v_b d_2}{h^2} \sin \Phi - \Delta p g \frac{d_2}{2} \sin \Phi, \quad (1.3.25)$$

avec  $\Delta\eta = \eta - \eta_g$  et  $\Delta\rho = \rho - \rho_g$ . Les termes de gauche étant indépendants de l'angle  $\Phi$ , l'ensemble est forcément nul et on en déduit

$$v_b = \frac{\Delta\rho g h^2}{12\Delta\eta} = \frac{\rho g h^2}{12\eta} \quad (1.3.26)$$

car nous sommes dans la limite  $\rho \gg \rho_g$  et  $\eta \gg \eta_g$ .

### Point de vue énergétique

On peut retrouver le résultat précédent en effectuant un bilan de puissance sur la bulle. Pour une bulle circulaire, la puissance injectée par la poussée d'Archimède vaut

$$\mathcal{P}_b = \rho g \pi \frac{d_2^2}{4} h v_b. \quad (1.3.27)$$

La puissance dissipée par viscosité se déduit du champ de vitesse donné par l'équation 1.3.21 en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_V &= - \iiint_{\mathcal{V}} \eta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} dV \\ &= - \iiint_{\mathcal{V}} \eta \vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \eta \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right|^2 dV \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

où  $\mathcal{V}$  représente le volume de la cellule en excluant celui de la bulle et la dernière égalité est obtenue par intégration par partie en utilisant  $\vec{v} = \vec{0}$  pour  $r \rightarrow +\infty$ . On conclut le calcul en utilisant le champ de vitesse donné par l'équation 1.3.21

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_V &= \int_{d_2/2}^{+\infty} dr \int_{\pi}^{\pi} r d\theta \int_{-h/2}^{h/2} dy \eta \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right|^2 \\ &= \frac{3\pi\eta v_b^2 d_2^2}{h}. \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

L'équilibre des puissances dissipée et injectée donne

$$v_b = \frac{\rho g h^2}{12\eta}. \quad (1.3.30)$$

Eck et Siekmann (1978) et Maxworthy (1986) ont établi théoriquement un résultat plus général, fonctionnant pour des bulles elliptiques remontant dans une cellule inclinée d'un

angle  $\theta$  avec la gravité. On note  $a$  l'axe de la bulle dans la direction de la remontée et  $b$  son axe perpendiculaire (voir figure 1.3.1(c)). Eck et Siekmann (1978) ont montré que la dissipation visqueuse vaut alors  $P_V = 3\pi\eta v_b^2 b^2/h$ , la différence avec l'équation 1.3.29 que l'on vient de trouver étant l'échelle de longueur qui intervient ( $d_2 \rightarrow b$ ). La puissance injectée par la poussée d'Archimède s'écrit simplement  $\mathcal{P}_b = \rho g \cos \theta \pi a b h v_b/4$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{3\pi\eta v_b^2 b^2}{h} &= \frac{\rho g \cos \theta \pi a b h v_b}{4} \\ \Leftrightarrow v_b &= \frac{\rho g \cos \theta h^2 a}{12\eta b} \equiv v_M. \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

Ce résultat a aussi été établi par Taylor et Saffman (1959) par continuité de la pression à l'aide de transformations conformes. Dans le raisonnement qui précède, nous avons supposé que la bulle occupe tout le gap de la cellule, ce qui est en réalité faux. De part et d'autre de la bulle se trouve une couche de lubrification qui fait qu'elle ne touche pas directement les parois de la cellule de Hele-Shaw (voir la partie 1.3.3 pour plus de détails). Le calcul complet prenant en compte cela a été établi par Keiser et al. (2018) et Toupoint et al. (2021), qui montrent que, dans la limite  $\eta \gg \eta_g$ , on retrouve le même résultat car la dissipation dans les couches de lubrification est négligeable, comme suggéré par Eck et Siekmann (1978).

## Résultats expérimentaux

La figure 1.3.2(a) (d'après Madec (2021)) montre l'évolution de la vitesse expérimentale d'une bulle unique, normalisée par la vitesse théorique  $v_M$  en fonction du diamètre normalisé  $d_2/h$  dans une cellule de Hele-Shaw verticale ( $\theta = 0$ ). Les mélanges sont composés d'eau et de UCON dont la viscosité cinématique  $\nu_f = \eta/\rho$  ainsi que le gap de la cellule utilisée sont précisés en légende. On voit que la vitesse normalisée  $v_b/v_M$  augmente avec la taille de la bulle  $d_2$  normalisée par  $h$  jusqu'à atteindre le plateau  $v_b/v_M = 1$  pour  $d_2/h \gtrsim 8$ . Les points expérimentaux se superposent indépendamment de la viscosité du liquide et suivent une courbe maîtresse représentée en pointillés verts dont l'expression empirique est donnée par

$$\frac{v_b}{v_M} = \mu_1 \left( 1 - e^{-\mu_2 \times d_2/h} \right), \quad (1.3.32)$$

avec  $\mu_1 = 1.02 \pm 0.03$  et  $\mu_2 = 0.37 \pm 0.04$ . Le coefficient  $\mu_1 \approx 1$  permet de valider le fait que  $v_b = v_M$  pour les grosses bulles ( $d_2 \gg h$ ).  $\mu_2$  permet d'obtenir un ordre de grandeur de la définition de "grosses" bulles et quantifie la transition vers la valeur limite  $v_b = v_M$ .

La figure 1.3.2(b) (d'après Maxworthy (1986)) montre l'évolution de la vitesse expérimentale de bulles uniques normalisée par la vitesse théorique  $v_M(a = b)$  en fonction du diamètre normalisé  $d_2/h$  et de  $d_2$  pour différents angles d'inclinaison  $\theta = [70 - 86]^\circ$  de la cellule avec la verticale, soit que des configurations où la cellule est quasiment horizontale. À un  $\theta$  donné, la vitesse normalisée  $v_b/v_M(a = b)$  augmente avec la taille de la bulle mais cette augmentation est de moins en moins prononcée. Plus  $\cos \theta$  est élevé, plus la vitesse normalisée  $v_b/v_M(a = b)$  est grande pour une taille de bulle donnée. Autrement dit, plus la cellule est verticale, plus  $v_b/v_M(a = b)$  augmente. Pour les bulles les plus grosses,  $v_b/v_M(a = b)$  dépasse largement 1, ce qui semble en contradiction avec ce que l'on a pu voir sur la figure 1.3.2(a), où  $v_b/v_M = 1$  a été observé en vertical pour les grosses bulles. Néanmoins, il est important de remarquer

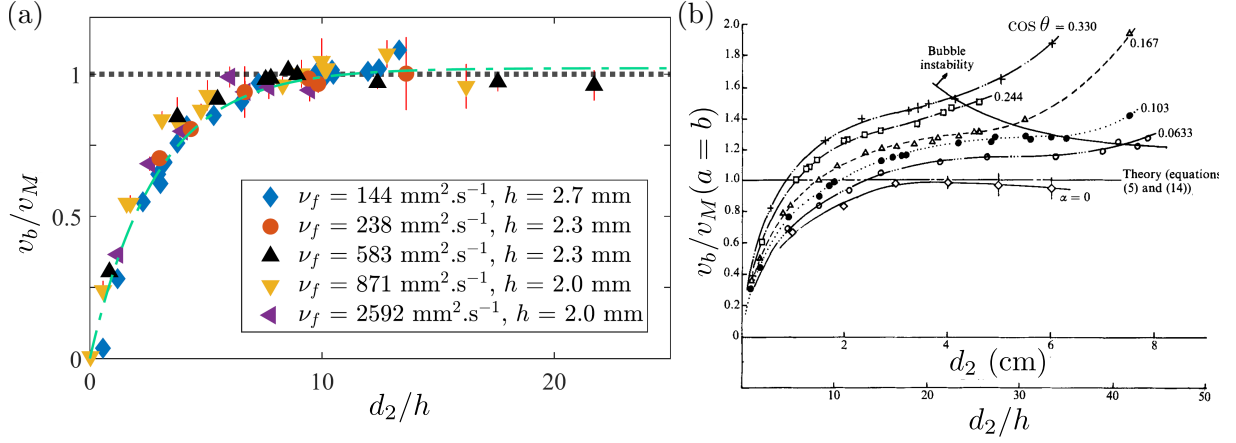


FIGURE 1.3.2 – (a) Vitesse expérimentale d’une bulle unique normalisée par la vitesse théorique  $v_M$  en fonction du diamètre normalisé  $d_2/h$  dans une cellule de Hele-Shaw verticale. Les mélanges sont composés d’eau et de UCON dont la viscosité cinématique  $\nu_f = \eta/\rho$  ainsi que le gap  $h$  de la cellule utilisée sont précisés en légende (d’après Madec (2021)). (b) Vitesse expérimentale de bulles uniques normalisée par la vitesse théorique  $v_M(a=b)$  en fonction du diamètre normalisé  $d_2/h$  et de  $d_2$ . Les valeurs de  $\cos \theta$  sont indiquées, où  $\theta$  est l’angle d’inclinaison de la cellule avec la verticale (d’après Maxworthy (1986)).

que la normalisation de la vitesse n’est pas la même dans les deux cas car le rapport  $a/b$  n’est pas pris en compte sur la figure 1.3.2(b).

Nous nous sommes restreints au régime visqueux ( $Re_{2h} \ll 1$ ) jusqu’ici. On peut naturellement se demander quelle est la vitesse des bulles dans le régime inertiel ( $Re_{2h} \gg 1$ ).

### 1.3.2 Vitesse des bulles en régime inertiel

En régime inertiel ( $Re_{2h} \gg 1$ ), les termes non linéaires deviennent prédominants et les résolutions théoriques deviennent donc extrêmement complexes. Roig et al. (2012) ont étudié la remontée d’une bulle unique dans une cellule de gap  $h = 1$  mm remplie d’eau et ont remarqué l’apparition d’oscillations sur la forme et la vitesse de la bulle ou encore l’apparition d’un angle entre la vitesse de la bulle et la verticale. Les oscillations sont accompagnées de vortex qui se forment à l’arrière de la bulle à intervalles réguliers. Roig et al. (2012) ont empiriquement proposé une formule pour la vitesse moyenne de remontée d’une bulle dans un tel régime qui s’écrit

$$v_b \propto \sqrt{gd_2} \quad (1.3.33)$$

où le facteur de proportionnalité est dépendant de la cellule étudiée. Peu après, Filella et al. (2015) proposent la formule

$$v_b = 0.71\sqrt{gd_3} \equiv v_i, \quad (1.3.34)$$

indépendante du gap  $h$  de la cellule, où  $d_3 = (6V/\pi)^{1/3}$  (avec  $V$  le volume de la bulle) correspond au diamètre d’une bulle sphérique de même volume  $V$ . Il est intéressant de noter que cette loi coïncide avec celle trouvée pour des remontées de bulles en 3D en régime inertiel (équation 1.1.9), ce qui suggère que la bulle évolue comme si elle n’était pas confinée (d’un

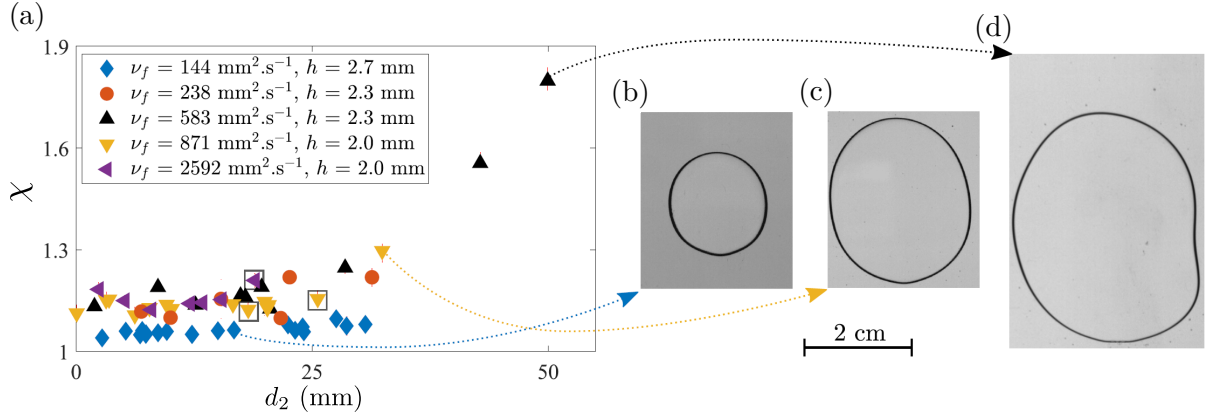


FIGURE 1.3.3 – (a) Rapport d’aspect  $\chi = a/b$  en fonction du diamètre  $d_2$  pour des bulles remontant dans des mélanges eau/UCON de différentes viscosités. (b), (c), (d) Photographies de différentes bulles (figure et photos tirées de Madec (2021)).

point de vue de la vitesse moyenne). L’étude de la remontée d’une bulle unique dans divers mélanges eau/glycérol réalisée par Hashida et al. (2019) montre que le préfacteur valant 0.71 dépend des caractéristiques physiques du liquide (viscosité  $\eta$ , masse volumique  $\rho$  et tension de surface  $\gamma$ ) et n’est pas valable pour toute taille de bulle, le domaine de validité étant dépendant du liquide.

### 1.3.3 Forme des bulles

#### Dans le plan de la cellule

Nous avons vu dans la partie 1.1.2 qu’il existe une grande variété de formes de bulles en 3D. Dans une cellule de Hele-Shaw, les bulles sont assimilables à des ellipses et sont caractérisées par  $a$  et  $b$  qui sont respectivement les axes de la bulle dans le sens de sa remontée et perpendiculairement à celui-ci (Maxworthy, 1986; Filella et al., 2015; Madec et al., 2020). On s’intéresse dans un premier temps au rapport d’aspect  $\chi = a/b$ , c’est-à-dire à la forme de la bulle dans le plan de la cellule  $xz$  (voir figure 1.3.1(c)). Sur la figure 1.3.3(a) est représenté  $\chi$  en fonction du diamètre  $d_2$ . Toutes les expériences ont été réalisées dans des mélanges eau/UCON de différentes viscosités vérifiant  $Re_{2h} \ll 1$ . On voit que le rapport d’aspect est supérieur à 1 et approximativement le même pour tous les mélanges avec  $\chi \approx 1.2$ , sauf pour les deux bulles à  $d_2 > 35 \text{ mm}$  qui ont un rapport d’aspect supérieur. Les figures 1.3.3(b), (c) et (d) sont des photographies de trois bulles de taille distincte. On voit qu’elles sont allongées dans le sens de leur remontée, ce qui correspond à  $a > b$  et donc  $\chi > 1$ . La figure 1.3.3(d), qui montre la bulle de plus grand diamètre, met en avant le fait que la forme de cette dernière est moins régulière. Il se trouve que le rapport d’aspect des trop grandes bulles ( $d_2 > 30 \text{ mm}$ ) est en fait non stationnaire.

La figure 1.3.4(a) (d’après Maxworthy (1986)), montre l’évolution du rapport d’aspect en fonction de  $b$ ,  $b/L_c$  et  $b/h$  pour différents angles d’inclinaison de la cellule avec la verticale, noté  $\theta$ . Les expériences sont effectuées dans le régime visqueux. Les valeurs de  $\cos \theta$  sont précisées ( $\cos \theta = 0$  correspond à une cellule horizontale). On remarque que, pour un angle d’inclinaison  $\theta$  donné, le rapport d’aspect est supérieur à 1 et augmente avec la taille de la



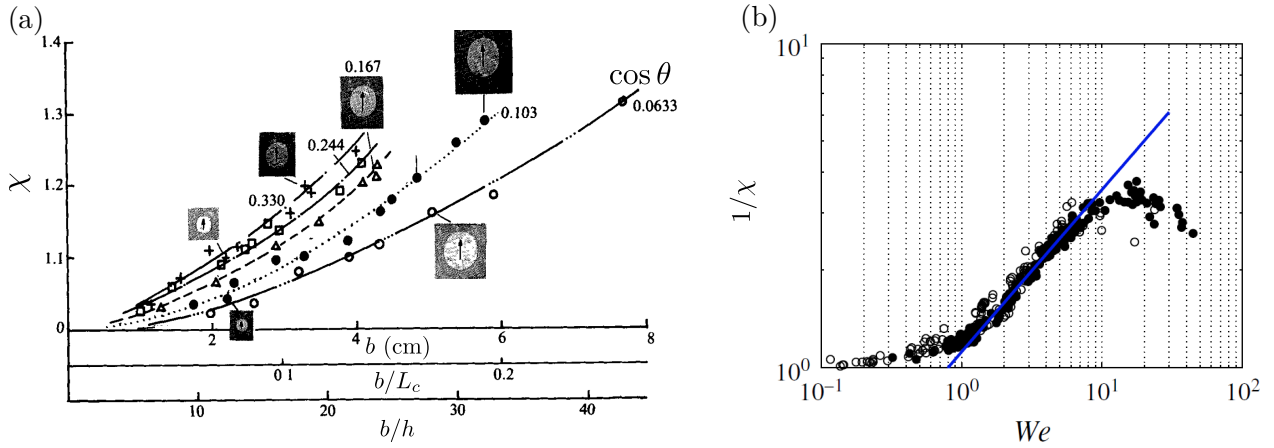


FIGURE 1.3.4 – (a) Rapport d’aspect en fonction de  $b$ ,  $b/L_c$  et  $b/h$ , où  $b$  est la longueur de l’axe de la bulle perpendiculairement à sa remontée pour des bulles remontant dans une cellule inclinée d’un angle  $\theta$  avec la verticale. Toutes les expériences sont faites dans le régime visqueux ( $Re_{2h} \ll 1$ ). Les valeurs de  $\cos \theta$  sont indiquées (d’après Maxworthy (1986)). (b)  $1/\chi$  en fonction du nombre de Weber  $We = \rho v_b^2 d_2 / \gamma$  qui compare les effets non-linéaires aux effets de tension de surface, dans le régime inertiel  $Re_{2h} \gg 1$ . La ligne bleue correspond à l’équation  $1/\chi = 1.12We^{1/2}$  (d’après Filella et al. (2015)).

bulle. Plus l’angle d’inclinaison est élevé (plus  $\cos \theta$  diminue) et plus le rapport d’aspect est faible. Le comportement trouvé dans une cellule inclinée par Maxworthy (1986) diffère donc notablement de celui observé par Madec et al. (2020) avec  $\theta = 0$ . Kopf-Sill et Homsy (1988) ont mené des études dans le régime visqueux en imposant un écoulement dans la cellule de Hele-Shaw. Une grande variété de formes de bulles a alors été observée en fonction de l’intensité de l’écoulement imposé.

Dans le régime inertiel ( $Re_{2h} \gg 1$ ), pour des bulles remontant dans de l’eau, Filella et al. (2015) ont montré que le rapport d’aspect est inférieur à 1, c’est-à-dire que les bulles sont aplaties perpendiculairement à leur sens de remontée. La figure 1.3.4(b) montre l’évolution de l’inverse du rapport d’aspect en fonction du nombre de Weber  $We = \rho v_b^2 d_2 / \gamma$  qui compare les effets non-linéaires aux effets de tension de surface. Plus une bulle est grande, plus sa vitesse et son nombre de Weber sont grands, ce qui augmente  $1/\chi$  et donc diminue le rapport d’aspect. Autrement dit, plus une bulle est grosse, plus elle va vite et plus elle est aplatée.

Nous n’avons regardé que la forme de la bulle dans le plan  $xz$ , caractérisée par le rapport d’aspect  $\chi$ . On peut se demander ce qu’il en est dans la direction perpendiculaire aux plaques (plan  $xy$ ).

### Dans le gap

Bretherton (1961) a montré théoriquement qu’une bulle remontant dans un tube capillaire laisse une couche de liquide entre elle et la paroi. Une photographie de ce phénomène est présentée figure 1.3.5(a) (d’après Campos et De Carvalho (1988)). L’épaisseur  $\delta$  de cette couche évolue selon la loi

$$\frac{\delta}{R} = 1.34 Ca^{2/3}, \quad (1.3.35)$$

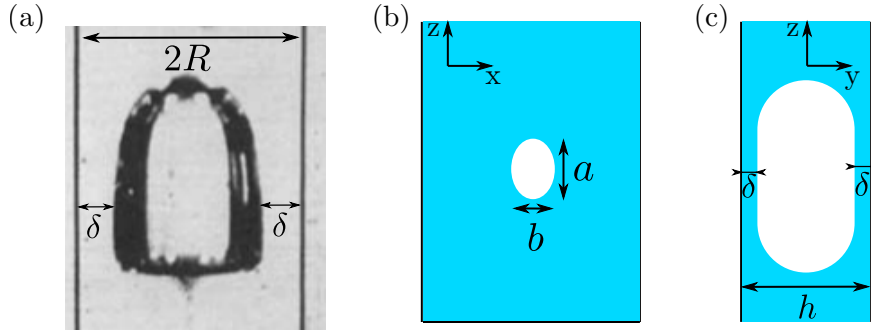


FIGURE 1.3.5 – (a) Photographie d’une bulle remontant le long d’un tube capillaire (d’après Campos et De Carvalho (1988)). (b) Schéma dans le plan  $xz$  et (c) dans le plan  $yz$  d’une bulle elliptique remontant dans une cellule de Hele-Shaw. On voit une couche de lubrification d’épaisseur  $\delta$  de chaque côté de la bulle.

dans la limite  $Ca \ll 1$ , où  $R$  est le rayon du capillaire et  $Ca$  le nombre capillaire (Bretherton, 1961). Aussillous et Quéré (2000) ont étendu ce résultat à tout nombre capillaire sous la forme

$$\frac{\delta}{R} = \frac{c_1 Ca^{2/3}}{1 + c_1 c_2 Ca^{2/3}}. \quad (1.3.36)$$

où  $c_1 = 1.34$  est le résultat théorique de Bretherton (1961) et  $c_2 = 2.5$  a été trouvé empiriquement. L’étude des couches de lubrification a été exportée aux cellules de Hele-Shaw à flux de liquide imposé par Park et Homsy (1984) qui ont montré théoriquement l’existence de part et d’autre de la bulle d’une couche de lubrification dont l’épaisseur  $\delta$  suit la loi

$$\frac{\delta}{h} = 1.337 Ca^{2/3}, \quad (1.3.37)$$

pour  $Ca \ll 1$ , résultat très semblable à la formule obtenue par Bretherton (1961) pour les tubes capillaires (équation 1.3.35). L’équation 1.3.37 a été obtenue en supposant qu’un flux de liquide est imposé dans la cellule. Expérimentalement, cette loi a été étendue par Gaillard et al. (2021) pour tout nombre capillaire dans une cellule de Hele-Shaw à flux de liquide imposé sous la même forme que celle proposée par Aussillous et Quéré (2000) pour les tubes capillaires (équation 1.3.38), c’est-à-dire

$$\frac{\delta}{h} = \frac{c_1 Ca^{2/3}}{1 + c_1 c_2 Ca^{2/3}}. \quad (1.3.38)$$

avec  $c_1 = 1.29$  et  $c_2 = 3.2$ , ce qui diffère donc des valeurs trouvées pour les tubes capillaires. On remarque que dans la limite  $Ca \ll 1$ , on ne retrouve pas exactement le résultat de Park et Homsy (1984) qui implique  $c_1 = 1.337$ .

## 1.4 Remontée d'une bulle unique dans une suspension

### 1.4.1 Rhéologie des suspensions

Parmi les différents mélanges utilisés, nous nous sommes intéressés au cours de cette thèse aux suspensions, c'est-à-dire aux assortiments entre un liquide et des particules de diamètre  $d_p$  et masse volumique  $\rho_p$ . Nous nous limiterons aux suspensions monodisperses ( $d_p$  est identique pour toutes les particules) et isodenses ( $\rho_p = \rho$ ) dont les particules sont sphériques.

#### Comportement des grains

Afin de comprendre comment les grains se comportent dans la suspension, on va regarder deux nombres adimensionnés.

— Le nombre de Stokes

$$St = \left( \frac{\rho}{\rho_p} + 1 \right) \frac{\rho_p d_p |\vec{v} - \vec{v}_p|}{18\eta}, \quad (1.4.1)$$

où  $\vec{v}_p$  correspond à la vitesse de la particule, compare le temps de réponse d'une particule à un changement de vitesse du fluide et le temps que la particule met à parcourir son diamètre. Dans le régime  $St \ll 1$ , le temps de réponse de la particule est faible et celle-ci va suivre le fluide. Dans le régime  $St \gg 1$ , l'inertie de la particule domine et elle se détache de l'écoulement lorsque celui-ci varie.

— Le nombre de Péclet

$$Pe = \frac{3\pi\eta|\vec{v}|d_p^2}{k_b T}, \quad (1.4.2)$$

où  $k_b$  correspond à la constante de Boltzmann et  $T$  à la température, compare le temps de diffusion par agitation thermique au temps que met la particule à parcourir son diamètre en étant emportée par l'écoulement. Dans le régime  $Pe \gg 1$ , l'écoulement du fluide domine sur les perturbations thermiques. Dans le régime  $Pe \ll 1$ , les fluctuations thermiques sont importantes et les particules bougent de manière aléatoire. Lorsqu'il n'y a pas d'écoulement, une particule de diamètre  $d_p = 10 \mu\text{m}$  met environ une heure dans de l'eau pour parcourir son diamètre à l'aide des fluctuations thermiques<sup>3</sup>. Ce temps étant très grand devant les durées typiques de nos expériences (inférieures à la minute), nous considérerons toujours les suspensions avec des particules de diamètre  $d_p > 10 \mu\text{m}$  comme non-Browniennes.

Nous nous intéresserons uniquement aux suspensions homogènes, monodisperses, isodenses et non-Browniennes vérifiant  $St \ll 1$ .

#### Comportement rhéologique

Dans le régime très dilué, Einstein (1905) a montré théoriquement que de telles suspensions se comportent comme un fluide dont la viscosité effective vaut

$$\eta_s(\phi) = \eta(1 + 2.5\phi). \quad (1.4.3)$$

---

3. On utilise la loi de Stokes-Einstein pour obtenir ce résultat ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi\\_de\\_Stokes-Einstein](https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Stokes-Einstein)).

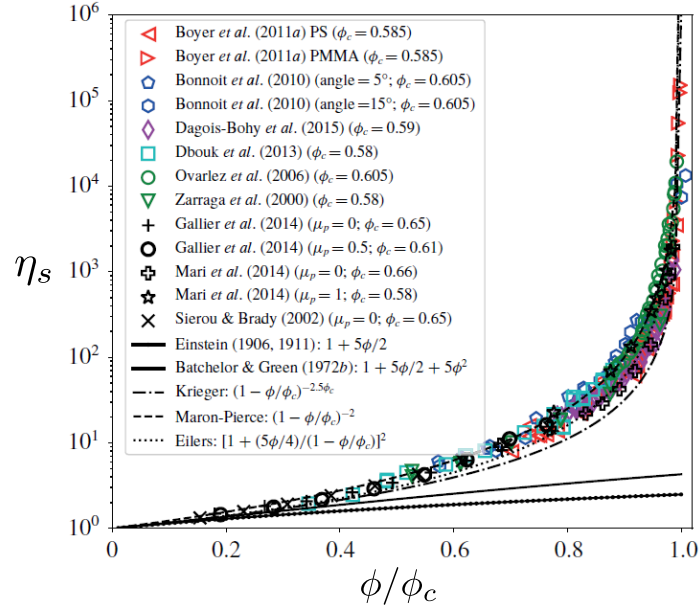


FIGURE 1.4.1 – Viscosité d’une suspension  $\eta_s$  homogène, monodisperse, isodense, non-Brownienne vérifiant  $St \ll 1$  en fonction de  $\phi/\phi_c$ , où  $\phi_c$  est une fraction volumique déterminée empiriquement pour laquelle la viscosité diverge (d’après [Guazzelli et Pouliquen \(2018\)](#)).

Cette expression suppose que l’on puisse négliger les interactions entre les particules et n’est donc valable qu’à des fractions volumiques très faibles ( $\phi < 5\%$ ). Plus tard, [De Bruijn \(1942\)](#) puis [Batchelor \(1977\)](#) ont développé un nouveau modèle théorique qui prend en compte les interactions entre les paires de particules, aboutissant à la relation dite de Batchelor et Green

$$\eta_s(\phi) = \eta(1 + 2.5\phi + 5\phi^2), \quad (1.4.4)$$

qui fonctionne bien pour les régimes dilués ( $\phi < 10 - 15\%$ ). Au-delà de ces fractions volumiques, la microstructure de la suspension devient bien plus complexe à analyser à cause des inhomogénéités et de l’anisotropie qui peut s’y développer. Nous considérerons tout de même que l’on peut estimer la viscosité effective de nos suspensions sous la forme

$$\eta_s(\phi) = \eta g(\phi) \quad (1.4.5)$$

jusqu’à  $\phi < 40\%$ . Nous resterons cependant vigilants sur les limites de ce modèle. Sur la figure 1.4.1, tirée de [Guazzelli et Pouliquen \(2018\)](#), la viscosité  $\eta_s$  est tracée en fonction de  $\phi/\phi_c$ ,  $\phi_c$  étant une fraction volumique déterminée empiriquement à laquelle la viscosité diverge. On voit que la relation de Batchelor et Green ne marche que pour des fractions volumiques faibles  $\phi \leq 10 - 15\%$ . On remarque que les différents jeux de points expérimentaux se superposent tous en une unique courbe, avec  $0.58 < \phi_c < 0.66$ . Les mesures présentées sur ce graphe sont réalisées dans des conditions bien particulières qui permettent de s’affranchir des problèmes évoqués plus tôt (inhomogénéité, perte d’isotropie) et de rendre le modèle de liquide de viscosité effective valable pour de grandes fractions volumiques.

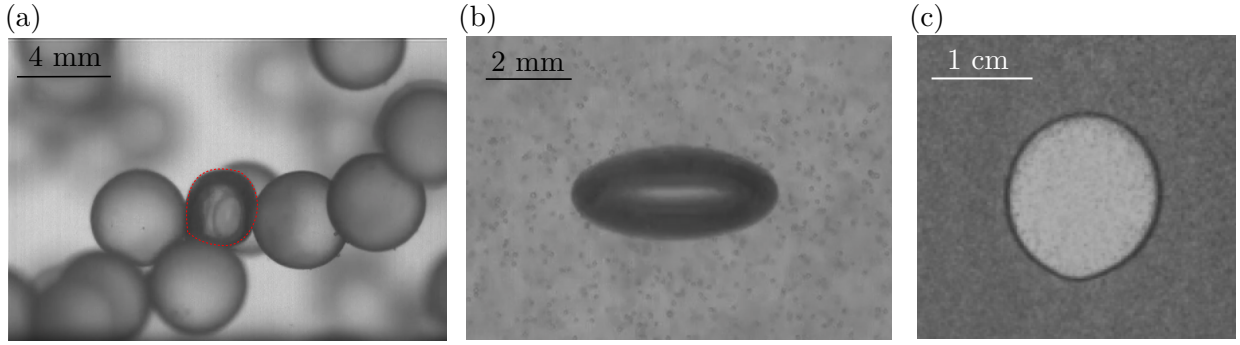


FIGURE 1.4.2 – (a) Photographie par rayons X d’une bulle (entourée par les pointillés rouges) de diamètre équivalent  $d_3 \approx 3$  mm remontant dans une suspension composée de particules isodenses de diamètre  $d_p = 4$  mm et (b)  $d_p = 78 \mu\text{m}$  (d’après [Hooshyar et al. \(2013\)](#)). (c) Photographie d’une bulle remontant dans une suspension isodense ( $d_p = 230 \mu\text{m}$ ) confinée dans une cellule de Hele-Shaw (d’après [Madec \(2021\)](#)).

### 1.4.2 Remontée dans un milieu non confiné

La remontée d’une bulle unique dans une suspension est complexe à étudier dans le cas où la bulle est loin des parois car cela signifie que la suspension empêche la visualisation de la bulle. En effet, les grains réfléchissent la lumière, ce qui empêche une observation directe. Afin de s’affranchir de ce problème, une possible solution consiste à utiliser des rayons X, qui permettent de voir à travers les grains et d’obtenir les informations de la bulle. La photographie d’une bulle de diamètre  $d_3 \approx 3$  mm observée de cette manière est présentée figure 1.4.2(a) (d’après [Hooshyar et al. \(2013\)](#)). La bulle est entourée par des pointillés rouges. Elle remonte dans une suspension composée de particules de diamètre  $d_p = 4$  mm, contre lesquelles elle collisionne lors de sa remontée. Afin de pouvoir considérer la suspension comme un liquide effectif, il faut que les particules n’agissent pas individuellement mais collectivement sur la bulle, ce que l’on peut traduire  $d_p \ll d_3$ . La figure 1.4.2(b) présente la photographie d’une bulle de diamètre  $d_3 \approx 3$  mm remontant dans une suspension composée de particules de diamètre  $d_p = 78 \mu\text{m}$ . On peut distinguer ces dernières qui forment de petits points gris autour de la bulle. On remarque par ailleurs que celle-ci n’a pas la même forme que sur la figure 1.4.2(a). Dans la limite  $d_p \ll d_3$ , [Hooshyar et al. \(2013\)](#) ont montré que le modèle de fluide effectif permet de prédire la vitesse de remontée des bulles dans une suspension contenue dans un milieu infini.

Une autre manière de parvenir à visualiser la remontée d’une bulle dans une suspension consiste à changer de géométrie. Par exemple, dans une cellule de Hele-Shaw, nous avons vu que la bulle remonte en occupant la majorité de l’espace entre les plaques (voir partie 1.3), ce qui signifie que la suspension n’obstrue pas la visualisation de la bulle (voir figure 1.4.2(c)). Nous allons donc nous intéresser maintenant à la remontée d’une bulle unique dans une suspension en cellule de Hele-Shaw.

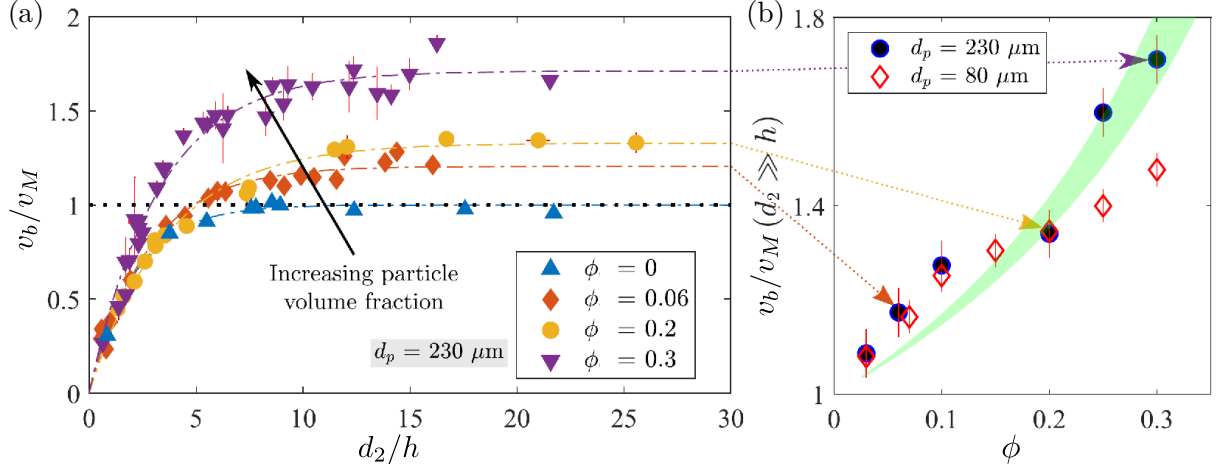


FIGURE 1.4.3 – (a) Vitesse moyenne de remontée normalisée par  $v_M$  en fonction de  $d_2/h$  pour des suspensions eau/UCON avec des particules de polystyrène de différentes fractions volumiques. (b) Valeur atteinte par les bulles dans la limite  $d_2/h \gg 1$  en fonction de la fraction volumique. Le faisceau vert correspond à un modèle théorique prenant en compte la migration de particules. Ces figures sont tirées de Madec et al. (2020).

### 1.4.3 Remontée dans un milieu confiné

#### Vitesse de remontée

On rappelle que la vitesse de remontée d'une bulle unique vérifiant  $d_2 \gg h$  dans un liquide newtonien visqueux ( $Re_{2h} \ll 1$ ) en cellule de Hele-Shaw verticale est donnée par

$$v_b = v_M = \frac{\rho g h^2 a}{12 \eta b}. \quad (1.4.6)$$

Dans le cas où le diamètre de la bulle est grand devant le diamètre des particules ( $d_2 \gg d_p$ ), les interactions bulle/suspension sont bien prises en compte par le modèle de viscosité effective car les particules ne jouent pas un rôle individuel mais collectif. On peut donc s'attendre à ce que, dans une suspension, en régime visqueux ( $Re_{2h} \ll 1$ ), une bulle unique remonte à la vitesse

$$v_b = v_M = \frac{\rho g h^2 a}{12 \eta_s(\phi) b}. \quad (1.4.7)$$

Lors d'une thèse précédente, Madec (2021) a étudié la validité de cette formule. La figure 1.4.3(a), tirée de cette thèse, montre l'évolution de la vitesse moyenne de remontée normalisée par  $v_M$  en fonction de  $d_2/h$  dans des suspensions de différentes fractions volumiques. À  $\phi$  constant, la grandeur  $v_b/v_M$  augmente avec le diamètre normalisé avant d'atteindre un plateau. On remarque que la vitesse normalisée  $v_b/v_M$  augmente avec la fraction volumique à  $d_2/h$  donné. Dans une suspension, une bulle vérifiant  $d_2 \gg h$  a donc une vitesse réelle plus grande que celle attendue théoriquement ( $v_b/v_M > 1$ ). Autrement dit, une bulle dans une suspension va plus vite qu'une bulle identique dans un liquide newtonien de même viscosité. La valeur plateau atteinte par  $v_b/v_M$  dans la limite  $d_2 \gg h$  est reportée sur la figure 1.4.3(b) en fonction de  $\phi$  (d'après Madec (2021)). Les différents symboles correspondent



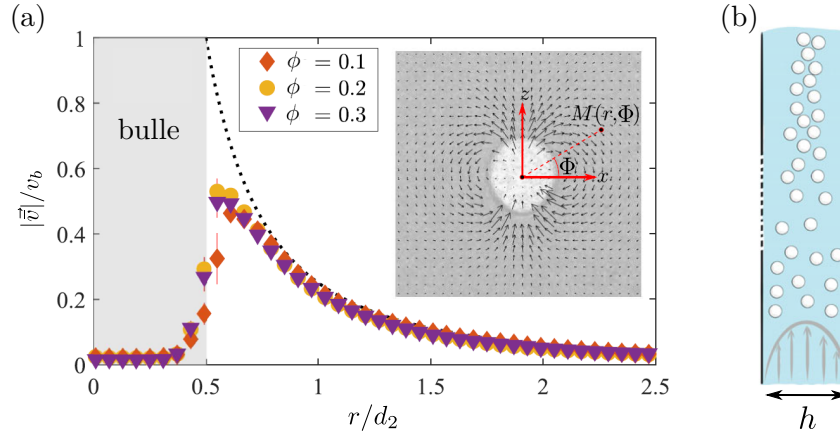


FIGURE 1.4.4 – (a) Norme du champ de vitesse du liquide normalisé par  $v_b$  pour une bulle de diamètre  $d_2 = 25$  mm pour différentes fractions volumiques  $\phi$  différentes. Les pointillés noirs correspondent à l'équation théorique 1.3.20. Insert : champ de vitesse instantané obtenu par PIV pour  $\phi = 10\%$  (d'après Madec et al. (2020)). (b) Schéma du principe de migration de particules (d'après Guazzelli et Pouliquen (2018)).

à différents diamètres de grains. On voit bien que la vitesse normalisée augmente avec  $\phi$  et semble être indépendante de la taille des particules  $d_p$ .

L'équation 1.4.7 a été établie en équilibrant la puissance injectée par la puissance d'Archimède et la puissance dissipée par viscosité (voir partie 1.3). La poussée n'étant pas modifiée par le fait d'être dans une suspension, on peut se demander si la dissipation visqueuse change. Il y a deux possibilités pour cela : la viscosité est modifiée ou le champ de vitesse du fluide l'est. Le raisonnement qui suit est tiré de Madec et al. (2020). La figure 1.4.4(a) montre la norme du champ de vitesse du liquide obtenu par suivi de particules (PIV ou *Particle Image Velocimetry*) normalisée par  $v_b$  pour une bulle de diamètre  $d_2 = 25$  mm pour différentes fractions volumiques  $\phi$  (d'après Madec et al. (2020)). Les pointillés noirs correspondent à l'équation théorique 1.3.20. On voit que les courbes se superposent, ce qui signifie que l'écoulement n'est pas modifié dans le plan de la cellule. Si la dissipation visqueuse est changée, c'est donc dans le plan perpendiculaire à la cellule que cela a lieu.

L'arrangement des particules dans le gap pourrait être modifié par le phénomène de migration de particules, schématisé figure 1.4.4(b). Les collisions entre les particules les poussent à se regrouper dans les régions où le gradient de vitesse est le plus faible, ce qui correspondrait au centre de la cellule dans notre cas. Cela implique que la fraction volumique n'est pas homogène et donc que le modèle de fluide newtonien effectif homogène dans toute la cellule n'est pas bon. En supposant que les particules migrent effectivement dans le gap, le Suspension Balance Model (Nott et Brady, 1994) et un lien empirique entre  $\phi$  à  $\eta$  permettent d'obtenir une estimation de la fraction volumique locale, ce qui donne la possibilité de recalculer la dissipation visqueuse dans la cellule et d'estimer la valeur de  $v_b/v_M$ . Les résultats théoriques obtenus par ce modèle sont représentés par le faisceau vert sur la figure 1.4.3(b). On remarque un bon accord entre ce modèle et les données expérimentales.

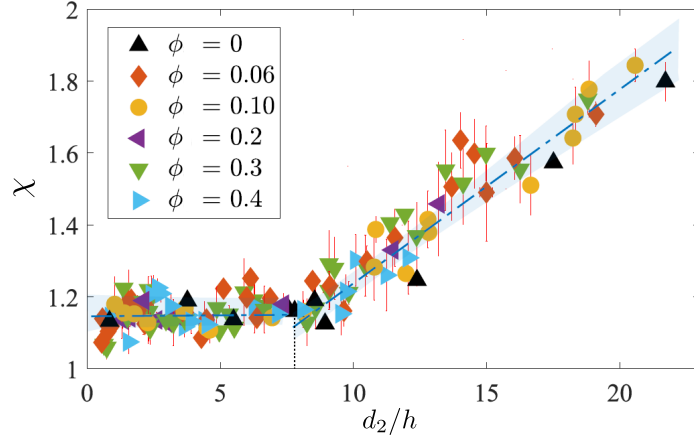


FIGURE 1.4.5 – Rapport d’aspect  $\chi$  en fonction du diamètre normalisé  $d_2/h$  pour différentes fractions volumiques  $\phi$  (d’après Madec (2021)). La ligne tiretée est un guide visuel.

### Formes des bulles

La figure 1.4.5 montre la dépendance du rapport d’aspect par rapport au diamètre normalisé  $d_2/h$  pour différentes fractions volumiques de grains (d’après Madec (2021)). La ligne tiretée est un guide visuel. On peut noter que les variations du rapport d’aspect pour une bulle donnée sont plus grandes lorsque  $\phi$  augmente. L’évolution de  $\chi$  avec  $d_2/h$  est indépendante de  $\phi$  avec un rapport d’aspect constant jusqu’à  $d_2/h \sim 8$  puis croissant avec le diamètre de la bulle de manière linéaire. Il n’existe pas, à notre connaissance, d’explication théorique à cette tendance observée.

## 1.5 Objectifs et plan de la thèse

Les écoulements multiphasiques posent encore d’innombrables questions. Nous allons essayer dans ce manuscrit de répondre à une poignée d’entre elles en se basant sur l’état de l’art présenté jusqu’ici.

Le chapitre 2 présentera une étude sur la transition entre le régime visqueux et le régime inertiel pour une bulle unique remontant dans un liquide newtonien en cellule de Hele-Shaw verticale. En effet, à notre connaissance, seuls les régimes visqueux ou inertiels ont été explorés, mais pas le raccordement entre les deux régimes. L’évolution de la forme et de la vitesse de la bulle ainsi que celle du champ de vitesse du liquide seront tout particulièrement explorées.

Ensuite, le chapitre 3 s’intéressera à l’impact de l’inclinaison d’une cellule de Hele-Shaw avec la verticale sur la remontée d’une bulle unique dans un liquide newtonien. En comparant modèle théorique et résultats expérimentaux, nous mettrons en avant de nouveaux résultats, tant sur la vitesse que sur la forme des bulles. Nous nous intéresserons également à la caractérisation des couches de lubrification.

Dans le chapitre 4, nous retournerons sur le cas de la remontée d’une bulle unique en cellule de Hele-Shaw verticale, que l’on remplira cette fois avec une suspension visqueuse, isodense, monodisperse et non-Brownienne. Le régime visqueux et le régime inertiel seront



tous deux explorés.

Enfin, le chapitre 5 proposera une étude de la vidange d'un cylindre rempli d'un liquide newtonien ou d'une suspension isodense. Dans le premier cas, nous explorerons l'impact des propriétés physiques du liquide vidangé sur le débit volumique et la fréquence des bulles. Dans le second cas, nous ferons varier la fraction volumique de particules afin de comprendre comment celle-ci modifie la vidange.

Le manuscrit se finira par une conclusion et un aperçu des perspectives envisageables au vue des résultats mis en avant dans les chapitre précédents.



## Chapitre 2

# Bulle unique en cellule de Hele-Shaw verticale

*"La vérité est une bulle de champagne, elle remonte toujours à la surface."*

Gilles Martin-Chauffier

Le but de ce chapitre est d'étudier la remontée d'une bulle unique dans un fluide newtonien en cellule de Hele-Shaw verticale ( $\theta = 0^\circ$ ). Nous allons dans un premier temps présenter le système expérimental utilisé et les observations générales réalisées sur la remontées d'une bulle en cellule de Hele-Shaw. Ensuite, nous discuterons en détails de l'évolution de la vitesse des bulles en nous focalisant en premier lieu sur le régime visqueux, où la force de viscosité prédomine sur l'inertie du fluide, avant de discuter plus largement de toutes les viscosités explorées dans le cadre de ce manuscrit. Après cela, nous regarderons l'évolution de la forme des bulles, caractérisée par leur rapport d'aspect, lorsque leur taille et les paramètres physiques du liquide (viscosité, masse volumique et tension de surface) sont modifiés. Finalement, en comparant théorie et expériences, nous nous intéresserons à la dynamique du liquide par l'étude du champ de vitesse généré par la remontée de la bulle, dépendant du nombre de Reynolds. Les notations utilisées dans ce chapitre sont résumées dans le tableau 2.1.

Les parties 2.4, 2.5 et 2.6 ont donné lieu à une publication :

[Monnet et al. \(2022\)](#) "Bubble rise in a Hele-Shaw cell : bridging the gap between viscous and inertial regimes", Journal of Fluid Mechanics, 942 : R3, 2022.

Grandeur	Signification
$g$	Accélération gravitationnelle ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$\alpha$	Valeur plateau de $v_b/v_M = f(d_2/h)$
$\beta$	Préfacteur pour la puissance dissipée par inertie
$\Phi$	Angle des coordonnées cylindriques du plan $(x, z)$ (rad)
$r$	Coordonnée radiale du repère cylindrique du plan $(x, z)$ (m)
Bulle	
$V_b = \pi d_3^3/6 = \pi abh$	Volume de la bulle ( $\text{m}^3$ )
$d_3$	Diamètre basé sur le volume $V_b = \pi d_3^3/6$ de la bulle (m)
$d_2$	Diamètre basé sur l'aire apparente de la bulle (m)
$a$	Longueur de la bulle dans le sens de la remontée (m)
$b$	Longueur de la bulle perpendiculaire au sens de la remontée (m)
$\chi = a/b$	Rapport d'aspect de la bulle
$v_b$	Vitesse de remontée de la bulle ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$v_X$	Vitesse de la bulle selon l'axe $X = x$ ou $X = z$ ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$v_M$	Vitesse visqueuse théorique d'une grosse bulle ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$\delta_t$	Couche de lubrification au-dessus de la bulle (m)
$\delta_b$	Couche de lubrification en dessous de la bulle (m)
$\mathcal{P}_V$	Puissance dissipée par la viscosité ( $\text{kg.m.s}^{-3}$ )
$\mathcal{P}_b$	Puissance injectée par la poussée d'Archimède ( $\text{kg.m.s}^{-3}$ )
$\mathcal{P}_f$	Puissance dissipée par frottement avec le milieu ambiant ( $\text{kg.m.s}^{-3}$ )
Liquide	
$\rho$	Masse volumique du liquide ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
$\gamma$	Tension de surface du liquide avec l'air ( $\text{N.m}^{-1}$ )
$\eta$	Viscosité dynamique ( $\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$ )
$\nu$	Viscosité cinématique ( $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ )
$\vec{v}_f$	Champ de vitesse du fluide ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$\Xi$	Potentiel complexe du champ de vitesse moyenné dans le gap ( $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ )
$\vec{v}_f = -\vec{\nabla}\Re(\Xi)$	Champ de vitesse du fluide moyenné dans le gap ( $\text{m.s}^{-1}$ )
Cellule	
$h$	Gap de la cellule de Hele-Shaw (m)
$H_c$	Hauteur de la cellule de Hele-Shaw (m)
$L_c$	Largeur de la cellule de Hele-Shaw (m)
Nombres adimensionnels	
$Re_{2h} = \frac{\rho d_2 v_b h^2}{\eta d_2^2}$	Nombre de Reynolds en cellule de Hele-Shaw
$Re_{3h} = \frac{\rho d_3 v_b h^2}{\eta d_3^2} = Re_{2h} \frac{d_2}{d_3}$	Nombre de Reynolds modifié en cellule de Hele-Shaw

TABLE 2.1 – Notations utilisées dans ce chapitre. Les unités des différentes grandeurs sont indiquées entre parenthèses dans le cas où elles sont dimensionnées.

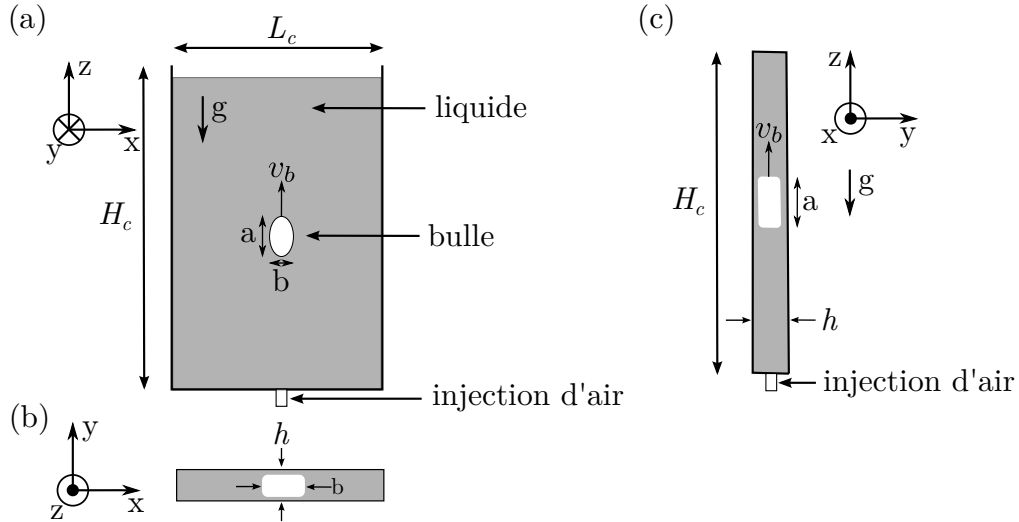


FIGURE 2.1.1 – Schéma du dispositif expérimental où l'on voit une bulle unique remonter dans une cellule de Hele-Shaw, dont la hauteur  $H_c$  (30 cm) et la largeur  $L_c$  (20 cm) sont grandes devant l'entrefer  $h = [2.3, 5.2]$  mm, aussi appelé "gap". La bulle est caractérisée par sa vitesse  $v_b$ , la taille de son axe le long du mouvement  $a$  et celle de son axe perpendiculaire au mouvement  $b$ . Les schémas ne sont pas à l'échelle. (a) Projection dans le plan  $xz$ , parallèle aux plaques. (b) Projection dans le plan  $xy$  (vue de dessus) et (c) dans le plan  $yz$  (vue de côté).

## 2.1 Méthodologie

### 2.1.1 Dispositif expérimental

Nous nous intéressons à la remontée d'une bulle en cellule de Hele-Shaw (de largeur  $L_c = 20$  cm et de hauteur  $H_c = 30$  cm, voir figure 2.1.1). Les expériences ont été réalisées dans deux cellules différentes, chacune formée de deux plaques de verre d'épaisseur  $e_g = 5$  mm séparée d'une distance  $h = 2.3$  mm (que nous appellerons aussi "gap") pour l'une et  $h = 5.2$  mm pour l'autre, les cellules étant identiques par ailleurs. Dans tout ce qui suit, l'effet du confinement latéral (selon l'axe  $x$ ) est négligeable (Gondret et al., 1997; Pavlov et al., 2021b).

Les bulles sont générées manuellement à la base de la cellule (voir figure 2.1.1) à l'aide d'une seringue de 50 mL. Un panneau LED, disposé  $\sim 30$  cm derrière la cellule de Hele-Shaw, est allumé à l'aide d'une alimentation stabilisée afin d'assurer un éclairage constant et d'éviter le scintillement dû aux 50 Hz du secteur. Le panneau LED est de dimensions bien supérieures à celles des cellules pour assurer un éclairage uniforme sur l'ensemble de ces dernières. Les remontées de bulles sont filmées à l'aide d'une caméra Basler AC-0.400, 2048x2048 pixels, dont le nombre d'images par seconde est adapté à la vitesse de la bulle étudiée, allant de 10 à 60 IPS. Seule la région centrale de la cellule est étudiée pour s'assurer que les effets de bord sont négligeables. Pour cela, on s'assure d'être à au moins  $\sim 4$  cm de toutes les bordures (haut, bas et côtés).

### 2.1.2 Liquides utilisés

Afin de faire varier la viscosité  $\eta$ , la densité  $\rho$  et la tension de surface  $\gamma$  du liquide, nous avons utilisé plusieurs types de mélanges, présentés dans le tableau 2.2. Les noms des solutions en gras correspondent à des expériences réalisées par moi-même et les autres ont été réalisées par le précédent doctorant, Madec (2021). Les symboles indiqués sont valables pour ce chapitre uniquement. Par commodité, nous noterons ces différents mélanges de la manière suivante : un préfixe indiquant le type de mélange suivi d'un suffixe correspondant à la viscosité du mélange en mPa.s. Les différents préfixes sont :

- EG : mélange eau distillée/sirop de glucose (celui qui a été utilisé ici est le sirop de glucose de la marque TRÉSORS DE CHEFS).
- EU : mélange eau distillée/Ucon Lubricant 75-H-90,000, ce dernier étant une huile industrielle miscible à l'eau, de masse volumique  $\rho_{\text{UCON}} \approx 1150 \text{ kg.m}^{-3}$  et de viscosité  $\eta \approx 44 \text{ Pa.s}$ , que nous appellerons UCON dans la suite par souci de simplicité.
- ET : mélange eau/Triton X-100/ZnCl, le Triton X-100 étant un détergent commercial miscible à l'eau. Contrairement aux mélanges précédents, celui-ci contient deux composants corrosifs et dangereux pour l'environnement, qui nécessitent donc l'utilisation d'une blouse et de gants ainsi qu'un tri adéquat des déchets. De plus, ce mélange étant très visqueux, il faut respecter un protocole strict afin d'éviter la présence de bulles ou d'inhomogénéités dans le mélange. Dans un premier temps, il faut verser dans l'eau le chlorure de zinc en agitant jusqu'à ce que ce dernier soit totalement dissous. Ensuite, il faut verser lentement le Triton dans le mélange obtenu en le faisant glisser le long de la paroi du bécher, le tout en agitant lentement la solution afin de s'assurer qu'il se mélange bien à l'eau, sans entrainer de bulles.

Les méthodes utilisées pour caractériser les différentes propriétés physiques des liquides sont détaillées dans l'annexe A.

### 2.1.3 Traitement numérique

Le but du traitement d'images que nous effectuons est d'accéder à la cinématique des bulles (trajectoire, vitesse, taille, ...). Pour ce faire, il faut que la bulle soit identifiée numériquement afin d'en extraire ses propriétés. Nous utilisons le logiciel MATLAB<sup>®</sup> pour tous les traitements numériques réalisés pendant cette thèse. Afin d'obtenir les informations pertinentes, nous réalisons les étapes suivantes, qui sont illustrées figure 2.1.2 :

- Le contour de la bulle étant particulièrement sombre, nous binarisons l'image à l'aide de la fonction *imbinarize* afin que seul le contour reste noir.
- La fonction *imclearborder* va permettre de conserver uniquement l'intérieur de la bulle (dont le contour correspond aux seuls pixels noirs) en blanc.
- Ensuite, la fonction *regionprops* va permettre de récupérer les informations que l'on souhaite sur la zone de pixels blancs restante en la modélisant par une ellipse : sa position, son aire, son excentricité, son petit axe et grand axe, son orientation, ... Nous pouvons vérifier que l'ellipse détectée ainsi a bien une forme semblable à celle de la bulle en superposant l'ellipse obtenue à l'image brute comme sur la figure 2.1.2, où le



















	$\eta$ (mPa.s)	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\gamma$ (mN.m <sup>-1</sup> )	$h$ (mm)	Symbole	$\tau/T_b$
<b>Eau</b>	0.94	997	72	2.3		1.0
<b>Éthanol (95%)</b>	1.2	789	22	2.3		0.87
<b>EG3</b>	3.0	1100	67	2.3		0.37
<b>EG13</b>	13	1187	67	2.3		0.07
<b>EG24</b>	24	1208	67	2.3		0.03
<b>EU8</b>	8	1011	53	2.3		0.10
<b>EU17</b>	17	1020	52	2.3		0.03
<b>EU42</b>	42	1032	52	2.3		0.01
<b>EU80</b>	80	1041	52	2.3		$4.9 \times 10^{-3}$
<b>EU140</b>	140	1048	51	2.3		$1.4 \times 10^{-3}$
EU152	152	1051	51	2.3		$1.1 \times 10^{-3}$
EU210	210	1057	50	2.3		$5.8 \times 10^{-4}$
<b>EU260</b>	260	1058	49	5.2		$9.0 \times 10^{-3}$
EU620	620	1066	47	2.3		$9.6 \times 10^{-5}$
EU930	930	1074	47	2.0		$1.8 \times 10^{-5}$
<b>EU1120</b>	1120	1075	46	2.3		$3.0 \times 10^{-5}$
EU2890	2890	1085	45	2.0		$1.7 \times 10^{-6}$
<b>ET2700</b>	2700	1187	$32 \pm 1$	5.2		$1.3 \times 10^{-4}$

TABLE 2.2 – Propriétés physiques des différents liquides utilisés ainsi que le gap  $h$  dans lequel ils ont été utilisés. EUxxx, EGxxx et ETxxx correspondent à de l’eau mélangée avec du UCON, du sirop de glucose ou du Triton X-100 et du chlorure de zinc respectivement, où xxx indique la viscosité du mélange en mPa.s. Le nom des solutions en gras indiquent les expériences réalisées au cours de cette thèse tandis que les autres expériences ont été faites par le précédent doctorant, [Madec \(2021\)](#). L’incertitude sur la densité est de  $1 \text{ kg.m}^{-3}$  et celle sur la viscosité est d’environ 10% lorsque  $\eta < 20 \text{ mPa.s}$  et de 1% autrement. Néanmoins, les incertitudes sur la viscosité sont certainement sous-estimées dans cette partie car la dépendance de  $\eta$  avec la température n’a pas été précisément prise en compte.  $T_b$  indique le temps de remontée d’une bulle et  $\tau = h^2 \rho / (4\eta)$  indique le temps caractéristique de l’établissement de la stationnarité de l’écoulement.

trait bleu correspond à l’ellipse détectée. On remarque que celle-ci coïncide très bien avec la bulle visualisée, validant ainsi la méthode proposée.

- Enfin, pour avoir les résultats en longueur réelle, nous utilisons une grille de calibration placée dans le plan de remontée des bulles, qui nous permet d’obtenir la conversion pixels  $\leftrightarrow$  millimètres. Dans la majorité des cas, la distortion sur le bord des images est très faible et inférieure aux autres erreurs.

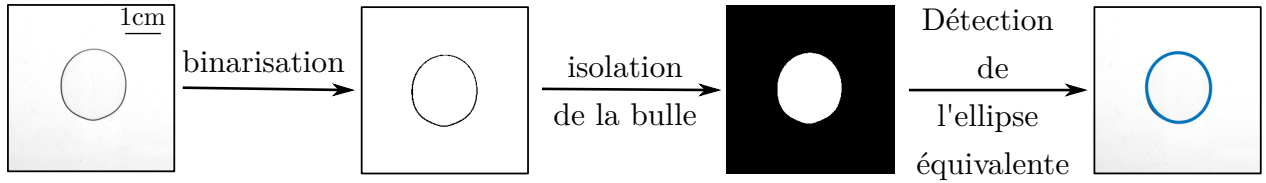


FIGURE 2.1.2 – Illustration des différentes étapes du traitement numérique. Toutes les images sont à la même échelle. L’ellipse bleue sur l’image de droite correspond à l’ellipse détectée par la fonction *regionprops*. On remarque que celle-ci coïncide très bien avec la bulle que nous souhaitons étudier.

## 2.2 Observations générales

Sur la figure 2.2.1(a), on peut voir la chronophotographie de deux bulles uniques remontant toutes deux dans un mélange eau/UCON dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm. L’une, dont le centre de masse est suivi en trait plein, remonte dans le mélange EU140 ( $\eta = 140$  mPa.s) et l’autre, dont le centre de masse est suivi en pointillés, remonte dans le mélange EU17 ( $\eta = 17$  mPa.s). Tout d’abord, nous pouvons remarquer que les bulles semblent conserver une vitesse et une forme constantes tout du long de leur remontée et qu’elles se déplacent majoritairement verticalement. De plus, la forme des deux bulles est remarquablement différente : la bulle dans le milieu le plus visqueux a un rapport d’aspect  $a/b > 1$  tandis que l’autre a un rapport d’aspect  $a/b < 1$ . On voit aussi que, de manière assez intuitive, la bulle remontant dans le mélange le moins visqueux est plus rapide. Pour se convaincre de ces observations, la figure 2.2.1(b) montre la vitesse verticale  $v_z$  et la vitesse horizontale  $v_x$  des deux bulles en fonction du temps et la figure 2.2.1(c) montre le rapport d’aspect instantané  $a/b$  en fonction du temps, avec en pointillés la bulle dans le mélange le moins visqueux. On remarque effectivement que la vitesse verticale des deux bulles varie de manière négligeable le long de la remontée et que, à tout instant,  $v_z \gg v_x$ . De même, la forme de la bulle, caractérisée par son rapport d’aspect, semble stationnaire et on voit bien que la bulle la plus rapide a le rapport d’aspect le plus faible. La stationnarité observée des différentes grandeurs physiques n’est pas spécialement surprenante étant donné que, dans nos expériences, le temps de remontée des bulles  $T_b$  est très grand devant le temps caractéristique du régime transitoire défini par  $\tau = h^2\rho/(4\eta)$  (Filella et al., 2015) (voir tableau 2.2 pour les valeurs de  $\tau/T_b$  de nos expériences). Au regard de ces résultats, nous définissons  $v_b = \langle v_z \rangle_t$  et  $\chi = \langle a/b \rangle_t$  comme étant respectivement les moyennes temporelles de la vitesse verticale et du rapport d’aspect de la bulle,  $\langle \rangle_t$  désignant un moyennage temporel sur toute la remontée de la bulle. Les barres d’erreur correspondront à l’écart type de ces quantités.

Néanmoins, en regardant le tableau 2.2, on peut remarquer que la condition  $T_b \gg \tau$  n’est pas valide pour les mélanges les moins visqueux (eau et éthanol) et donc que l’on ne peut pas s’assurer d’être dans un cas stationnaire. En réalité, le cas est même plus complexe étant donné que la vitesse et la forme des bulles oscillent, ce sur quoi nous reviendrons plus tard en fin de partie 2.5.



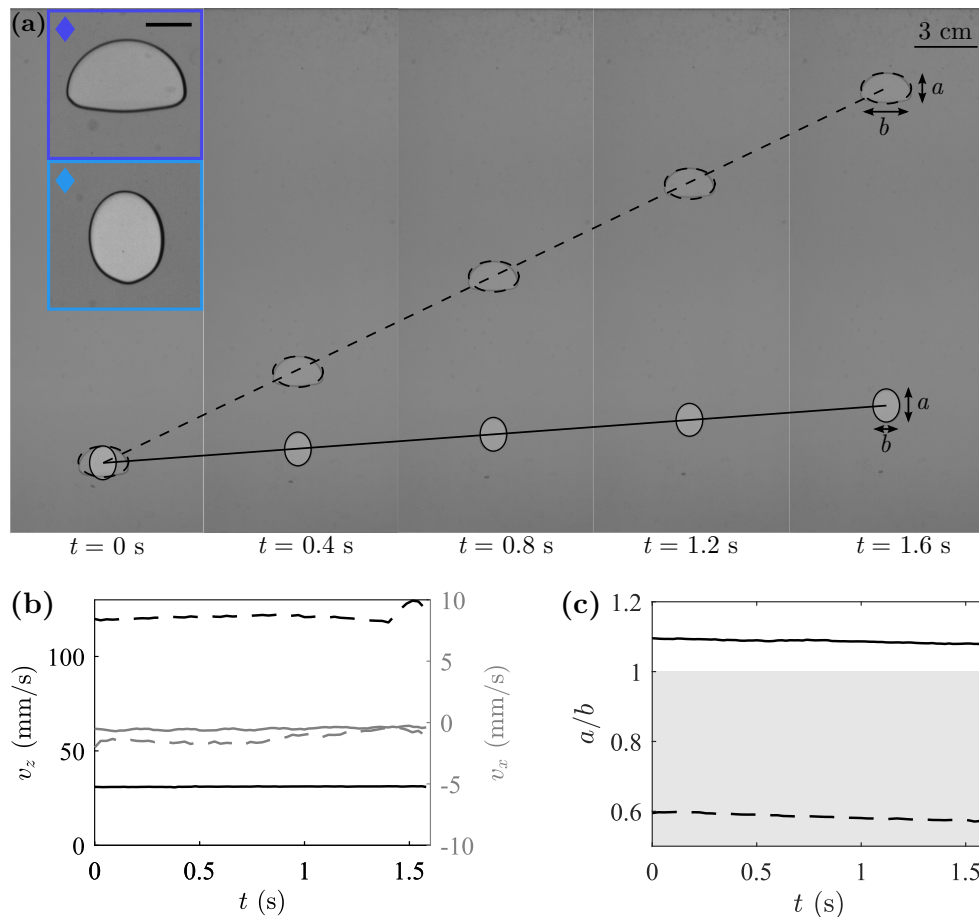


FIGURE 2.2.1 – (a) Chronophotographie de deux bulles uniques ( $h = 2.3$  mm), chacune remontant dans un mélange eau/UCON différent, donnant lieu à un bulle plus lente et allongée dans le sens de sa remontée ( $\eta = 140$  mPa.s,  $Re_{2h} = 7.2 \cdot 10^{-2}$ ) et l'autre plus rapide, aplatie perpendiculairement au sens de remontée ( $\eta = 17$  mPa.s,  $Re_{2h} = 2$ ). Insert : zoom sur chaque bulle. La ligne noire correspond à 1 cm. Évolution de (b) la vitesse horizontale  $v_x$  (en gris) et verticale  $v_z$  (en noir) et (c) du rapport d'aspect en fonction du temps. La zone grise correspond à  $a/b < 1$ .

### Résumé de la partie 2.2

- Les bulles remontent avec une vitesse et une forme constantes. La vitesse est majoritairement dans le sens inverse de la gravité et contrôlée par la flottabilité.
- Un milieu plus visqueux implique une vitesse de remontée plus faible.
- La forme des bulles varie avec la viscosité et on peut observer des rapports d'aspect  $\chi > 1$  et  $\chi < 1$ .

## 2.3 Vitesse des bulles en régime visqueux

Comme montré dans la partie 1.3.1, on s'attend à ce que la vitesse d'une bulle très grande devant le gap ( $d_2 \gg h$ ) en régime visqueux ( $Re_{2h} \ll 1$ , défini partie 1.3.1) et en verticale ( $\theta = 0^\circ$ ) soit donnée par la formule

$$v_b = v_M = v_M^* \frac{a}{b} = \frac{\rho g h^2}{12\eta} \frac{a}{b}. \quad (2.3.1)$$

Le but de cette partie sera de voir si cette vitesse théorique est atteinte et si oui, à partir de quel moment la limite  $d_2 \gg h$  est respectée. Nous nous limiterons donc dans cette partie à l'étude des bulles en régime visqueux uniquement.

### 2.3.1 Vérification du modèle de Taylor-Maxworthy

Concentrons-nous d'abord sur un type de mélange donné dans une seule cellule : nous considérerons des mélanges eau/UCON dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm. Ainsi, la tension de surface et le gap restent approximativement les mêmes pour tout ce que nous allons dire dans cette sous-partie. La figure 2.3.1(a) montre la vitesse moyenne des bulles  $v_b$  en fonction de  $d_2/h$  pour quatre viscosités différentes (voir tableau 2.2), où  $d_2 = 4A/\pi$ , avec  $A$  l'aire occupée par la bulle dans le plan  $xz$ . Pour une viscosité donnée, on remarque que  $v_b$  augmente avec  $d_2/h$  et que cette augmentation est de plus en plus faible, sans pour autant donner l'impression d'atteindre un plateau. On remarque aussi que la vitesse diminue lorsque  $\eta$  augmente. En faisant fi de la forme de la bulle et en ne normalisant  $v_b$  que par  $v_M^*$  (qui est la vitesse théorique d'une bulle parfaitement circulaire dans le plan de la cellule), on remarque sur la figure 2.3.1(b) que les points des différents mélanges se confondent. Autrement dit, cela montre que pour une taille  $d_2/h$  de bulle donnée, la vitesse normalisée  $v_b/v_M^*$  est indépendante de la viscosité, ce qui amène que  $v_b \propto 1/\eta$ . On peut aussi souligner le fait que la valeur  $v_b/v_M^*$  ne semble pas atteindre de plateau et dépasse la valeur de 1, tout particulièrement pour les bulles les plus grosses. Afin de prendre en compte la forme de la bulle, on introduit

$$\tilde{v}_b = \left\langle \frac{v_z(t)}{v_M(t)} \right\rangle_t = \left\langle \frac{12\eta v_z(t)}{\rho g h^2 \chi(t)} \right\rangle_t = \frac{1}{v_M^*} \left\langle \frac{v_z(t)}{\chi(t)} \right\rangle_t, \quad v_M^* = \frac{\rho g h^2}{12\eta}. \quad (2.3.2)$$

La figure 2.3.1(c) montre l'évolution de  $\tilde{v}_b$  en fonction de  $d_2/h$ . Encore une fois, les points se superposent pour toutes les viscosités. En plus de cela, on remarque qu'un plateau est atteint, d'une valeur proche de 1, à partir de  $d_2/h \approx 8$ . Nous avons vu (équation 1.3.32) que dans sa thèse, Madec (2021) suggère empiriquement une courbe maîtresse de la forme

$$\frac{v_b}{v_M} = \mu_1 \left( 1 - e^{-\mu_2 d_2/h} \right), \quad (2.3.3)$$

avec dans notre cas  $\mu_1 = 1.05 \pm 0.5$  et  $\mu_2 = 0.35 \pm 0.03$  (obtenues par ajustement des points expérimentaux), valeurs qui sont cohérentes avec celles trouvées dans la thèse de Madec (2021), à savoir  $\mu_1 = 1.02 \pm 0.03$  et  $\mu_2 = 0.37 \pm 0.04$ .  $\mu_1$  représente la valeur plateau atteinte dans la limite des "grosses" bulles tandis que  $\mu_2$  quantifie à quel point il faut que les bulles soient grosses afin d'atteindre ce maximum. Cette courbe maîtresse est représentée en violet

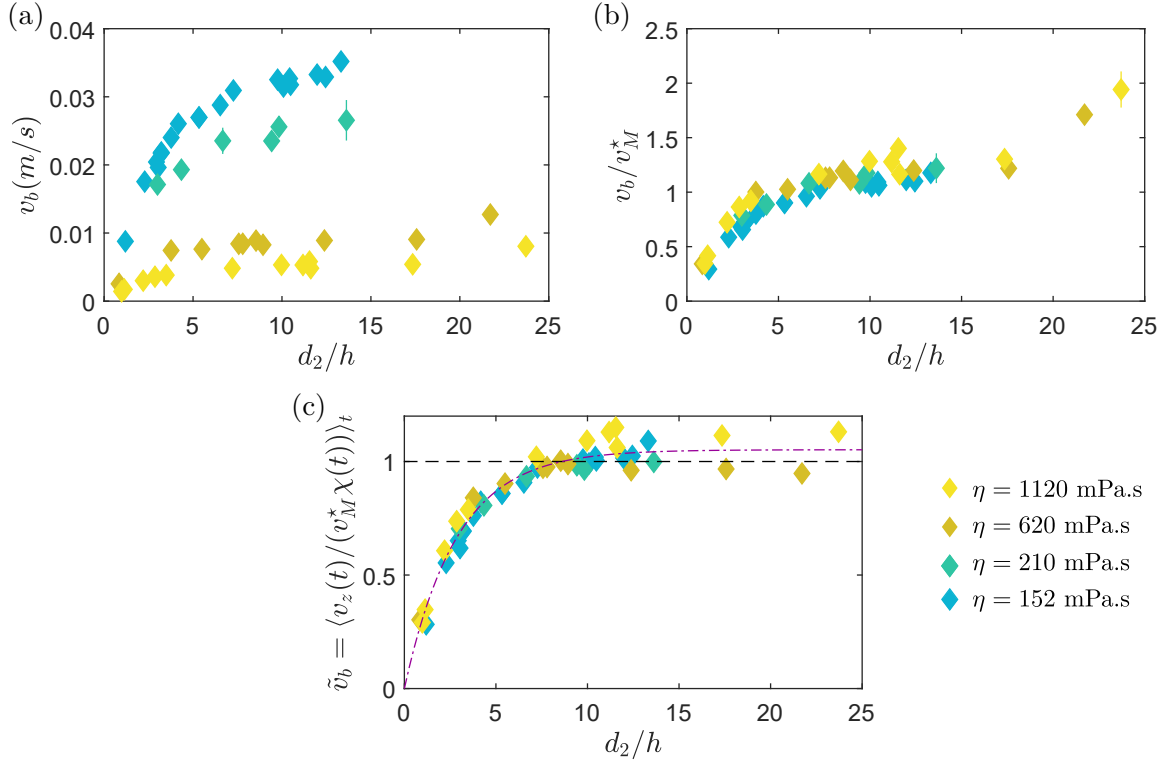


FIGURE 2.3.1 – Étude de la vitesse de remontée des bulles pour des mélanges eau/UCON dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm. Chaque couleur correspond à une viscosité, conformément au tableau 2.2. **(a)** Vitesse moyenne de remontée des bulles  $v_b$  en fonction de leur diamètre renormalisé  $d_2/h$ , où  $d_2 = \sqrt{ab}$ . **(b)** Vitesse des bulles normalisée par  $v_M^*$  (voir équation 2.3.2) en fonction de  $d_2/h$ . **(c)**  $\tilde{v}_b = \langle v_z(t)/(v_M^* \chi(t)) \rangle_t$  en fonction de  $d_2/h$ . La ligne en pointillés noirs correspond à  $\tilde{v}_b = 1$ . La ligne tiretée violette correspond à l'équation 2.3.3 avec  $\mu_1 = 1.05 \pm 0.5$  et  $\mu_2 = 0.35 \pm 0.03$ .

tireté et passe relativement bien à travers tous les points expérimentaux. Malheureusement, il n'existe pas de modèle théorique permettant d'expliquer cette tendance formée par les points expérimentaux. Nous pouvons tout de même essayer d'obtenir des informations sur cette dernière.

## 2.3.2 Étude du modèle empirique

La courbe maîtresse donnée par l'équation 2.3.3 n'est vérifiée pour l'instant que dans le cadre d'une cellule donnée avec une tension de surface donnée. Elle est qualifiée de "maîtresse" car, dans ce cadre, elle est en accord avec tous les points expérimentaux peu importe la viscosité du mélange choisi. L'objectif de cette sous-partie est de faire varier d'autres paramètres que la viscosité pour voir si cette courbe maîtresse s'en retrouve modifiée ou non.

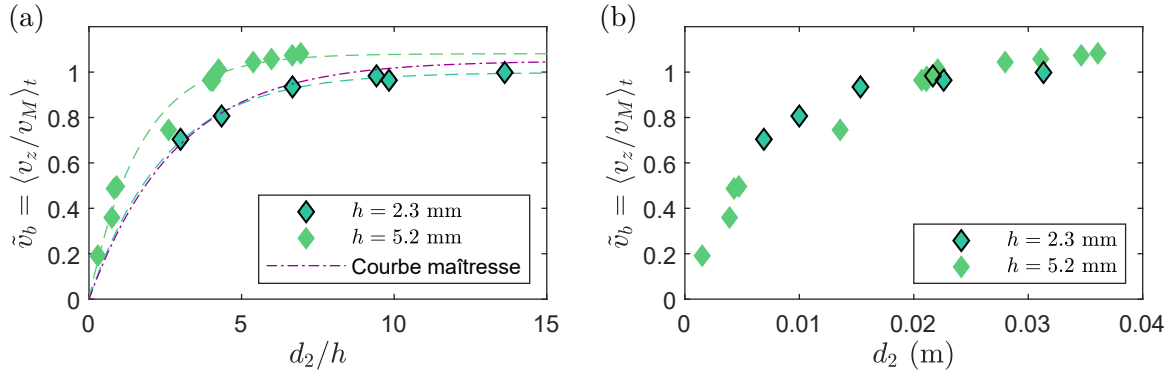


FIGURE 2.3.2 – Vitesse normalisée  $\tilde{v}_b$  en fonction de (a)  $d_2/h$  et (b)  $d_2$  pour deux cellules de gap différents ( $h = 2.3$  mm, contours noirs et  $h = 5.2$  mm, contours blancs). Les courbes tiretées correspondent à un ajustement de la forme de l'équation 2.3.3 des données expérimentales de la même couleur. La courbe tiretées violette correspond à l'équation 2.3.3 avec  $\mu_1 = 1.05$  et  $\mu_2 = 0.35$  (voir partie 2.3.1).

### Influence du gap de la cellule

Sur la figure 2.3.2(a) est représentée l'évolution de  $\tilde{v}_b$  en fonction du diamètre normalisé de la bulle  $d_2/h$  pour deux jeux de données, chacun dans une cellule différente ( $\blacklozenge$  avec un contour noir :  $h = 2.3$  mm et  $\blacklozenge$  avec un contour blanc :  $h = 5.2$  mm). La courbe tiretée violette correspond à la courbe maîtresse déterminée dans la partie précédente. Chaque courbe pointillée correspond à un ajustement de l'équation 2.3.3 pour le jeu de données de même couleur. On remarque dans un premier temps que le jeu de données correspondant à la cellule de gap  $h = 2.3$  mm s'aligne bien sur la courbe maîtresse. Ceci n'est pas étonnant étant donné que c'est un résultat qui a déjà été observé dans la partie précédente. Les points obtenus dans la cellule de gap  $h = 5.2$  mm ne semblent, quant à eux, pas passer sur cette courbe maîtresse. D'ailleurs, si on effectue un ajustement de la forme donnée par l'équation 2.3.3 des points au contour blanc, on se rend bien compte qu'il ne coïncide pas avec celui obtenu pour l'autre cellule. Pour s'en convaincre, on peut comparer les valeurs trouvées pour les paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  qui sont de  $\mu_1 = 1.05 \pm 0.5$  et  $\mu_2 = 0.35 \pm 0.03$  pour  $h = 2.3$  mm et  $\mu_1 = 1.08 \pm 0.6$  et  $\mu_2 = 0.59 \pm 0.1$  pour  $h = 5.2$  mm. Tout d'abord, le fait que l'on trouve  $\mu_1 \approx 1$  dans les deux cas montre que la dépendance en  $h$  de la vitesse des bulles vérifiant  $d_2 \gg h$  est bien capturée par la formule de Taylor-Maxworthy ( $v_M$ , équation 2.3.1). Ensuite, on remarque que les valeurs de  $\mu_2$  ne coïncident pas d'une cellule à l'autre. Autrement dit, regarder la valeur de  $d_2/h$  ne semble pas pertinent pour savoir quand la vitesse limite théorique de Taylor-Maxworthy est valable, ce qui est surprenant étant donné que la condition de validité théorique de ce résultat porte précisément sur la valeur de  $d_2/h$  (qui doit être grand devant 1)!

Ces observations nous ont donc poussés à regarder l'évolution de  $\tilde{v}_b$  en fonction du diamètre des bulles  $d_2$  (figure 2.3.2(b)). On remarque alors que les points s'alignent étonnement bien pour les deux cellules. La vitesse semble atteindre un plateau pour les deux courbes à partir de  $d_2 \approx 0.02$  m. Cela semble donc indiquer que le critère de validité de la vitesse de Taylor-Maxworthy porte sur la comparaison du diamètre des bulles avec une autre grandeur caractéristique que  $h$ . Une des autres grandeurs pouvant venir à l'esprit est la longueur

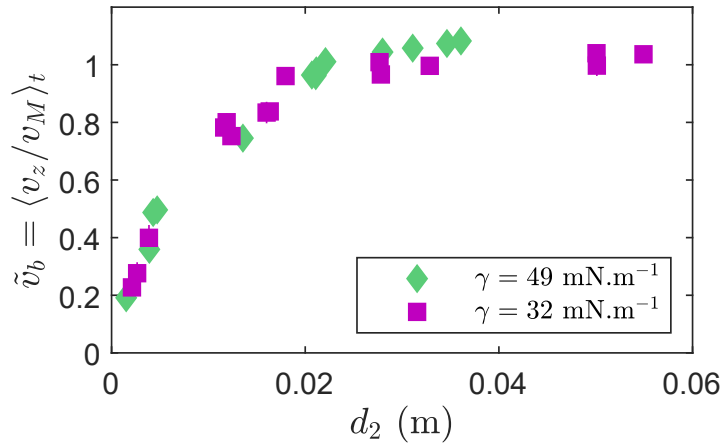


FIGURE 2.3.3 – Vitesse normalisée  $\tilde{v}_b$  en fonction de  $d_2$  pour deux mélanges visqueux de tension de surface différentes.

capillaire et c'est pour cela que la suite porte sur l'influence de la tension de surface.

### Influence de la tension de surface

La figure 2.3.3 montre la dépendance de  $\tilde{v}_b$  avec  $d_2$  pour deux tensions de surface différentes ( $\gamma = 32 \text{ mN/m}$  ■ et  $\gamma = 49 \text{ mN/m}$  ◆). On remarque que la vitesse normalisée atteint un plateau proche de 1 pour les bulles les plus grosses, et ce indépendamment de la tension de surface. On voit en plus de cela que les points des deux expériences se confondent. Il semble donc que la transition vers la vitesse limite  $v_b = v_M$  ne dépende pas non plus de la tension de surface. Il faut cependant garder en tête que ce résultat n'est établi ici que pour deux tensions de surface qui ne différencient que d'un facteur 1.5. Il faudrait répéter les expériences avec des tensions de surface beaucoup plus élevées ou beaucoup plus faibles pour espérer pouvoir conclure.

### Résumé de la partie 2.3

Dans cette partie, nous avons étudié expérimentalement dans la limite  $Re_{2h} \ll 1$ , en vertical ( $\theta = 0^\circ$ ), la validité de la vitesse théorique des bulles vérifiant  $d_2/h \gg 1$  donnée par

$$v_b = v_M = v_M^* \frac{a}{b} = \frac{\rho g h^2 a}{12\eta b}.$$

Pour ce faire, la courbe  $v_b/v_M = f(d_2/h)$  a été modélisée par une courbe maîtresse de la forme

$$\frac{v_b}{v_M} = \mu_1 \left(1 - e^{-\mu_2 d_2/h}\right),$$

qui est en bonne adéquation avec les données expérimentales. Nous avons alors remarqué que

- quelle que soit la viscosité ou la tension de surface du fluide et quel que soit le gap de la cellule considérée, nous trouvons toujours  $\mu_1 \approx 1$  pour les plus grosses bulles, validant ainsi la formule de Taylor-Maxworthy.
- le facteur  $\mu_2$  est dépendant du gap de la cellule et indépendant de la tension de surface  $\gamma$ . Cela signifie que la comparaison entre  $d_2$  et  $h$  ou entre  $d_2$  et la longueur capillaire n'est pas pertinente pour caractériser la transition vers  $v_b = v_M$ .

La forme de la loi reste une question ouverte et celle proposée dans cette partie se base sur des observations empiriques.

## 2.4 Vitesse de remontée des bulles pour toutes viscosités

Jusqu'ici, nous nous sommes limités au régime visqueux  $Re_{2h} \ll 1$ . Le but de cette partie est d'étendre les résultats connus sur la vitesse des bulles à tout nombre de Reynolds.

La figure 2.4.1 montre l'évolution de  $\tilde{v}_b = \langle v_b/v_M \rangle_t$  pour les différents mélanges eau/UCON dans une même cellule de gap  $h = 2.3$  mm. Sans surprise, les expériences en régime visqueux ( $Re_{2h} < 1$ ) vérifient les résultats de la partie précédente. Néanmoins, dès que  $Re_{2h} > 1$ , on voit que  $\tilde{v}_b$  n'atteint plus le plateau  $\tilde{v}_b = 1$ . Plus le nombre de Reynolds est élevé et plus les bulles vont plus lentement que prévu par la théorie en régime visqueux. Cela vient du fait que les termes inertiels deviennent importants et ajoutent de la dissipation dans le milieu lorsque la vitesse des bulles augmente. Afin de prendre cela en compte, nous souhaitons compléter le modèle en régime visqueux présenté dans la partie 1.3.1, qui équilibre la puissance injectée par la poussée d'Archimède  $\mathcal{P}_b = \rho g(\pi abh)v_b/4$  avec la dissipation visqueuse  $\mathcal{P}_V = 3\eta v_b^2 \pi b^2/h$ . Pour cela, nous rajoutons à ce bilan de puissance un terme de dissipation liée à l'inertie du fluide. On considère que ce nouveau terme est proportionnel à l'énergie nécessaire pour que la bulle mette en mouvement le fluide qu'elle déplace. L'énergie transmise au fluide vaut donc

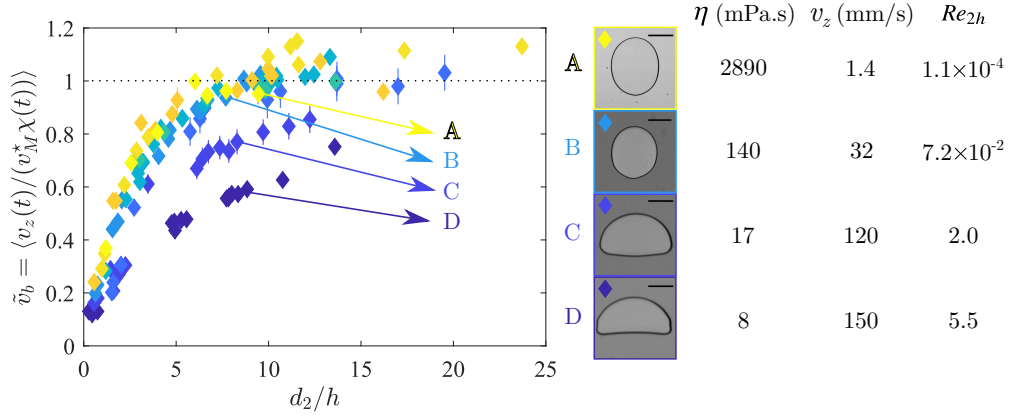


FIGURE 2.4.1 – Vitesse normalisée  $\tilde{v}_b$  en fonction de  $d_2/h$  ( $h = 2.3$  mm) pour des mélanges eau/UCON de différentes viscosités. La ligne noire sur les images correspond à 1 cm. Les images correspondent à des bulles de tailles équivalentes ( $d_2/h \approx 10$ ) pour quatre viscosités différentes.

$\rho v_b^2(\pi abh)/2$ . Afin d'obtenir une puissance, cette énergie doit être multipliée par un temps caractéristique. Sachant que la mise en mouvement du fluide se fait dans tout le volume autour de la bulle, nous prenons le diamètre équivalent volumique  $d_3 = (6V/\pi)^{1/3}$  (où  $V$  correspond au volume de la bulle) comme longueur caractéristique, à partir de laquelle nous obtenons  $d_3/v_b$  comme temps caractéristique. Le bilan de puissance donne donc

$$\rho g(\pi abh)v_b = \frac{12\pi\eta v_b^2 b^2}{h} + \frac{1}{2}\rho v_b^2(\pi abh) \left( \beta \frac{v_b}{d_3} \right), \quad (2.4.1)$$

avec  $\beta$  une constante à déterminer. En comparant la dissipation inertielle et la dissipation visqueuse, on trouve

$$\frac{\beta \rho v_b^3(\pi abh)}{2} \frac{h}{d_3} \frac{1}{12\pi\eta v_b^2 b^2} = \frac{\beta \rho v_b a h^2}{24 b d_3} = \frac{\beta}{24} \chi Re_{3h}, \quad (2.4.2)$$

avec  $Re_{3h} = (\rho v_b d_3/\eta)(h/d_3)^2 = Re_{2h}(d_2/d_3)$ . Dans la limite  $Re_{3h} \ll 1$ , on retrouve donc le résultat  $v_b = v_M$  et dans la limite  $Re_{3h} \gg 1$ , en ne prenant en compte que la dissipation inertielle, on trouve  $v_b = \sqrt{2/\beta} \sqrt{gd_3}$ , qui ne dépend que du volume de la bulle. Dans le cas général, en résolvant l'équation 2.4.1, on obtient

$$v_b = \frac{2v_M}{1 + \sqrt{1 + 2\beta \left( \frac{v_M}{\sqrt{gd_3}} \right)^2}}, \quad (2.4.3)$$

où la dépendance en rapport d'aspect est dissimulée dans  $v_M = v_M^* \chi$ . On peut remarquer qu'au dénominateur, on peut réécrire

$$2\beta \left( \frac{v_M}{\sqrt{gd_3}} \right)^2 = 4 \frac{v_M^2}{\left( \sqrt{\frac{2}{\beta}} \sqrt{gd_3} \right)^2} = 4 \left( \frac{\lim_{Re_{3h} \ll 1} v_b}{\lim_{Re_{3h} \gg 1} v_b} \right)^2. \quad (2.4.4)$$

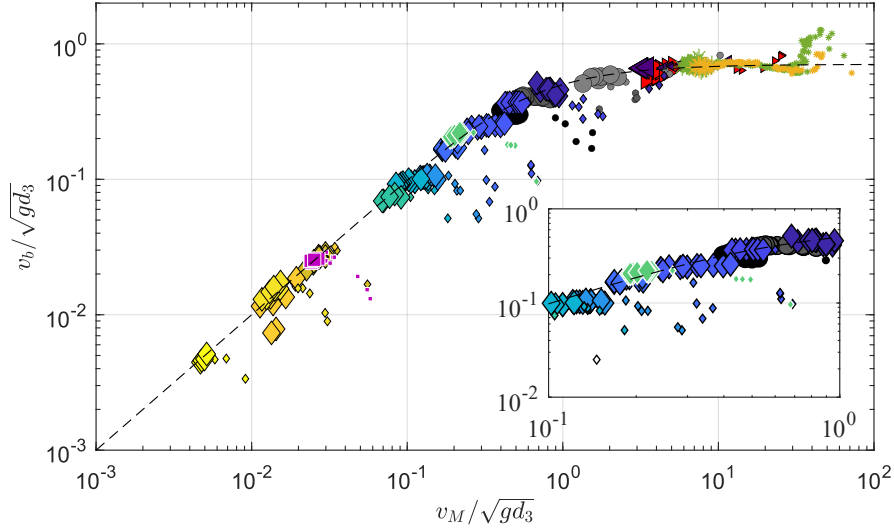


FIGURE 2.4.2 –  $v_b/\sqrt{gd_3}$  en fonction de  $v_M/\sqrt{gd_3}$  pour toutes les expériences définies dans le tableau 2.2 auxquelles viennent s’ajouter les données expérimentales de Filella et al. (2015) (\*) et Pavlov et al. (2021b) (\*) dont le gap est différent ( $h = 3.1$  mm). Les grands (resp. petits) symboles correspondent aux bulles vérifiant  $d_2/h > 4$  (resp.  $d_2/h < 4$ ). Les symboles avec un contour noir correspondent à la cellule de gap  $h = 2.3$  mm et ceux dont le contour est blanc à la cellule de gap  $h = 5.2$  mm. La ligne en pointillés noirs correspond à l’équation 2.4.3 avec  $\beta = 3.9 \pm 0.1$ . Les incertitudes sont plus petites que la taille des points.

Autement dit, on peut caractériser la transition du régime visqueux au régime inertiel soit en regardant le nombre de Reynolds  $Re_{3h}$  qui compare les puissances dissipées par inertie et par viscosité, soit en regardant le rapport des deux vitesses limites  $\lim_{Re_{3h} \ll 1} v_b$  et  $\lim_{Re_{3h} \gg 1} v_b$ .

Afin de vérifier la formule nouvellement trouvée (eq. 2.4.3), nous traçons sur la figure 2.4.2  $v_b/\sqrt{gd_3}$  en fonction de  $v_M/\sqrt{gd_3}$ . Les points expérimentaux sont ceux présents dans le tableau 2.2 auxquels viennent s’ajouter les données expérimentales de Filella et al. (2015) (\*) et Pavlov et al. (2021b)<sup>1</sup> (\*) dont le gap est différent ( $h = 3.1$  mm). Les gros symboles correspondent aux bulles vérifiant  $d_2/h > 4$  (appelées "grosses bulles" dans la suite) et les petits symboles aux autres bulles. Les symboles avec un contour noir correspondent à la cellule de gap  $h = 2.3$  mm et ceux dont le contour est blanc à la cellule de gap  $h = 5.2$  mm. La ligne en pointillés noirs correspond à l’équation 2.4.3 avec  $\beta = 3.9 \pm 0.1$ , obtenu par ajustement sur les points expérimentaux vérifiant  $d_2/h > 4$ . On remarque que, pour les grosses bulles, le modèle passe remarquablement bien par les données expérimentales et ce peu importe la viscosité ou la tension de surface du liquide. Les plus petites bulles ( $d_2/h < 4$ ) ont quant à elles une vitesse plus faible que celle prédite pour  $v_M/\sqrt{gd_3} < 10$ . Cela vient probablement du fait que le terme de dissipation visqueuse utilisé soit établi uniquement dans le cas de bulles infiniment grosses ( $d_2 \gg h$ ). Cette dissipation serait sous-estimée pour les bulles plus petites.

1. Merci beaucoup aux chercheuses et aux chercheurs de l’IMFT (Toulouse) d’avoir partagé leurs données avec nous.



## Résumé de la partie 2.4

En ajoutant un terme de dissipation inertielle au bilan de puissance déjà établi dans le régime visqueux, nous avons proposé une nouvelle formule pour la vitesse de remontée d'une bulle en cellule de Hele-Shaw, donnée par

$$v_b = \frac{2v_M}{1 + \sqrt{1 + 2\beta \left(\frac{v_M}{\sqrt{gd_3}}\right)^2}}.$$

Cette expression est validée expérimentalement pour des viscosités allant de celle de l'eau à trois mille fois celle de l'eau, pour plusieurs cellules de gap différents et pour diverses tensions de surface. Néanmoins, elle ne fonctionne bien que pour les bulles assez grosses (la limite observée ici étant  $d_2/h > 4$ ) et surestime la vitesse des plus petites bulles.

## 2.5 Forme des bulles

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici à la vitesse des bulles uniquement. Nous avons pu voir que la forme des bulles, étant caractérisée par leur rapport d'aspect, est à prendre en compte afin de pouvoir correctement prédire leur vitesse. Intéressons-nous maintenant plus en détails au rapport d'aspect des bulles et comment celui-ci évolue avec les différents paramètres expérimentaux.

La figure 2.5.1(a) montre l'évolution du rapport d'aspect  $\chi = \langle a/b \rangle_t$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_{3h} = \rho v_b d_3 / \eta (h/d_3)^2$ . Les symboles sont les mêmes que dans la partie précédente. On voit que dans le domaine visqueux, le rapport d'aspect des bulles est toujours supérieur à 1, contrairement au domaine inertiel où il est systématiquement inférieur à 1. Autrement dit, une bulle allongée dans le sens de son mouvement est en régime visqueux tandis qu'une bulle aplatie perpendiculairement à son mouvement est en régime inertiel (voir figure 2.2.1 où l'on voit une bulle dans chaque cas).

Sur la figure 2.5.1(b) est représentée  $\chi = f(d_2/h)$  pour le régime visqueux. Le trait en pointillés gris est un guide visuel. Le rapport d'aspect de toutes les bulles semble être le même, autour de  $\chi = 1.1$ , jusqu'à une certaine taille de bulle  $d_2/h = 15$ , au-delà de laquelle on observe des valeurs de  $\chi$  plus élevées. Cette tendance a été plus précisément observée par Madec (2021). Le rapport d'aspect semble donc uniquement dépendre de la taille des bulles et on voit que la valeur du gap  $h$ , la viscosité ou la tension de surface  $\gamma$  n'ont pas d'influence sur lui pour  $Re_{3h} < 1$ . Pour les viscosités les plus faibles, le rapport d'aspect des grosses bulles semble suivre une loi de la forme  $\chi \propto Re_{3h}^{-1/4}$  pour  $1 < Re_{3h} < 100$ . Malheureusement, il n'y a actuellement aucune explication théorique pour corroborer cette loi de puissance. La figure 2.5.1(c) montre l'évolution de  $\chi$  avec  $d_2/h$  en régime inertiel où

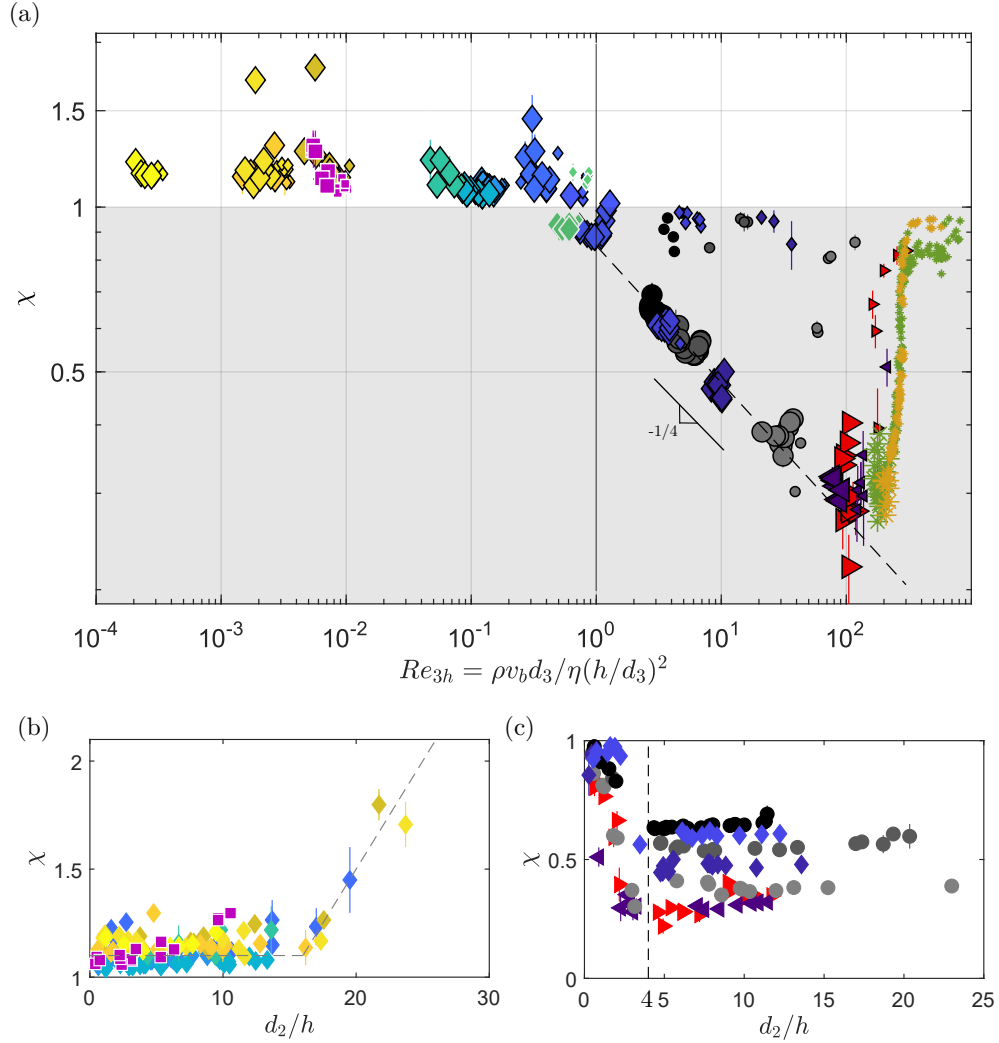


FIGURE 2.5.1 – (a) Évolution du rapport d'aspect  $\chi = \langle a/b \rangle_t$  avec  $Re_{3h}$ . Les grands (resp. petits) symboles indiquent les bulles vérifiant  $d_2/h > 4$  (resp.  $d_2/h < 4$ ). Les symboles avec un contour noir correspondent à la cellule de gap  $h = 2.3$  mm et ceux dont le contour est blanc à la cellule de gap  $h = 5.2$  mm. La zone grise montre la zone  $\chi < 1$ . Les pointillés noirs sont un guide visuel indiquant une pente de  $-1/4$ . Évolution du rapport d'aspect  $\chi = \langle a/b \rangle_t$  avec  $d_2/h$  pour les bulles (b) dans le domaine visqueux (les pointillés gris sont un guide visuel) et (c) dans le domaine inertiel. La ligne en pointillés noirs représente la limite des "grosses bulles"  $d_2 = 4h$ .

la limite  $d_2/h = 4$  est mise en avant par des pointillés noirs. On voit que les bulles les plus petites sont plus rondes et que  $\chi$  atteint effectivement une valeur limite pour  $d_2 > 4h$ . Le rapport d'aspect dépend donc toujours de la taille des bulles mais aussi de la viscosité pour  $1 < Re_{3h} < 100$ . La tension de surface n'a toujours pas l'air d'avoir d'influence sur  $\chi$ .

Pour des nombres de Reynolds plus élevés ( $Re_{3h} > 100$ , ce qui correspond aux expériences dans l'eau et dans l'éthanol dans notre cas), il faut garder en tête que le temps de remontée d'une bulle  $T_b$  est environ égal au temps qu'elle met à atteindre un état stationnaire  $\tau$ , ce qui

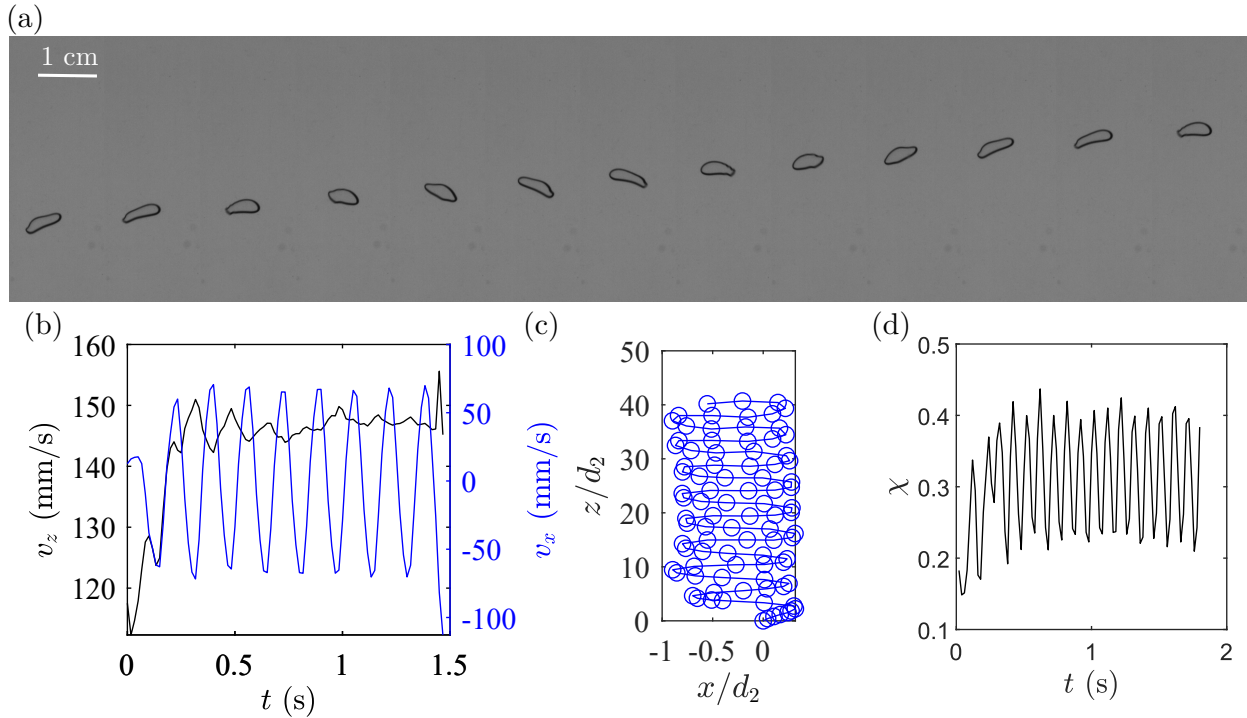


FIGURE 2.5.2 – (a) Chronophotographie d’une bulle remontant dans de l’éthanol. Toutes les images sont à la même échelle et sont séparées de  $1/60$  s. L’extrait choisi va de  $t = 617$  ms à  $t = 817$  ms. (b) Évolution de la vitesse verticale et horizontale au cours du temps. (c) Reconstruction de la trajectoire de la bulle. Le déplacement est adimensionné par le diamètre  $d_2$  de la bulle. (d) Évolution du rapport d’aspect au cours du temps.

signifie que nous sommes à la limite de la validité de l’hypothèse de stationnarité. En plus de cela, des instabilités de tous types apparaissent, ces dernières ayant été particulièrement étudiées par Pavlov et al. (2021b). La figure 2.5.2(a) montre une chronophotographie d’une bulle de diamètre  $d_2 = 5$  mm remontant dans de l’éthanol dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm. Les images sont séparées de  $1/60$  s et sont toutes à la même échelle. On y voit la bulle osciller de gauche à droite tout en se déformant. Ce mouvement est en fait périodique. Nous pouvons voir sur les figures 2.5.2(b) l’évolution des vitesses horizontales et verticales en fonction du temps, (c) la trajectoire de la bulle et (d) l’évolution de son rapport d’aspect au cours du temps. On voit très nettement des oscillations apparaître dans la vitesse horizontale, qui se retranscrivent bien par une trajectoire en forme de serpent. Le rapport d’aspect oscille lui aussi de manière très nette. Cet exemple met en lumière les différentes oscillations que l’on peut observer : oscillation de forme et de vitesse. Parfois l’un peut survenir sans l’autre et vice-versa. Lorsque les deux sont présents, la période des différentes oscillations est reliée : le rapport d’aspect et la vitesse verticale oscillent à la même pulsation, qui est deux fois supérieure à celle de la vitesse horizontale (Filella et al., 2015). L’étude détaillée de ces oscillations a été faite dans de récents travaux réalisés par Filella et al. (2015); Pavlov et al. (2021b).

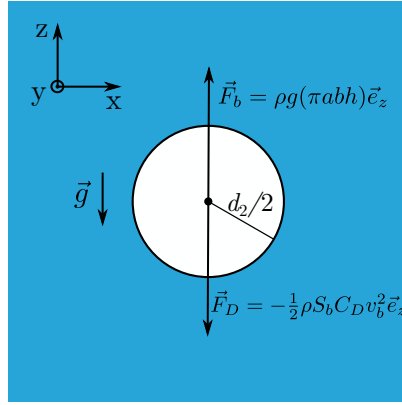


FIGURE 2.6.1 – Schéma d’une bulle et des forces qui s’appliquent sur elle (flottabilité et frottements).

### Résumé de la partie 2.5

Selon le régime considéré, le rapport d’aspect des bulles n’évolue pas du tout de la même manière lorsque la viscosité ou la taille des bulles est modifiée.

- Dans le régime visqueux ( $Re_{3h} < 1$ ), les bulles sont toutes allongées dans la direction de leur remontée ( $\chi > 1$ ). De plus, le rapport d’aspect est approximativement le même ( $\chi \approx 1.1$ ) tant que  $d_2 < 15h$  puis augmente avec le diamètre des bulles. Aucune dépendance en viscosité ou tension de surface n’a été observée.
- Dans le régime inertiel ( $Re_{3h} > 1$ ), les bulles sont toutes aplaties perpendiculairement à leur direction de remontée. Le rapport d’aspect augmente avec la taille de la bulle jusqu’à  $d_2/h = 4$  avant d’atteindre un plateau qui semble suivre une loi de la forme  $\chi \propto Re_{3h}^{-1/4}$ .

## 2.6 Coefficient de traînée

Si on s’attarde maintenant à la remontée de bulles d’un point de vue dynamique, il est intéressant de regarder son coefficient de frottement. L’équilibre des forces (voir figure 2.6.1) permet de déterminer le coefficient de frottement qui vaut

$$C_D = \frac{F_b}{\frac{1}{2}\rho v_b^2 S_b}, \quad (2.6.1)$$

où  $F_b$  correspond à la flottabilité et  $S_b$  est une surface prise en générale comme étant égale à la surface qui s’oppose au fluide, c’est à dire  $S_b = bh$  dans notre cas. Les valeurs du coefficient

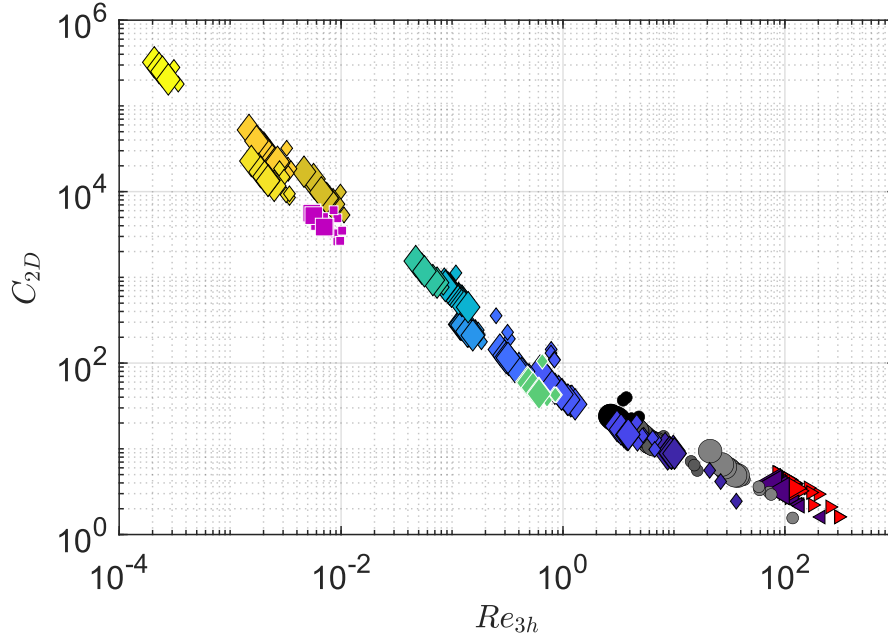


FIGURE 2.6.2 – Coefficient de frottement  $C_{2D}$  en fonction de  $Re_{3h}$ . Les grands (resp. petits) symboles correspondent aux bulles vérifiant  $d_2/h > 4$  (resp.  $d_2/h < 4$ ). Les symboles avec un contour noir correspondent à la cellule de gap  $h = 2.3$  mm et ceux dont le contour est blanc à la cellule de gap  $h = 5.2$  mm.

de frottement obtenues ainsi, appelées  $C_{2D}$ , sont affichées sur la figure 2.6.2 en fonction du nombre de Reynolds  $Re_{3h}$ . On remarque que les points ne s'alignent pas le long d'une tendance unique, avec par exemple les points pour les expériences dans la cellule  $h = 5.2$  mm (contour blanc) qui sont légèrement en dessous des autres.

Suite à cela, nous avons considéré une surface  $S_b$  valant  $S_b = \pi d_3^2/4$ , c'est-à-dire la surface de la sphère de même volume. Cela donne donc

$$C_D = \frac{\rho g(\pi abh)}{\frac{1}{2}\rho v_b^2 \pi \frac{d_3^2}{4}}. \quad (2.6.2)$$

Si on divise le bilan de puissance correspondant à l'équation 2.4.1 par  $\rho v_b^3 \pi d_3^2/8$  on obtient

$$\frac{\rho g(\pi abh)}{\frac{1}{2}\rho v_b^2 \pi \frac{d_3^2}{4}} = \frac{12\pi\eta v_b^2 b^2}{h} \frac{8}{v_b \pi d_3^2} + \beta \frac{1}{2}\rho v_b^2 \frac{\pi abh v_b}{d_3} \frac{8}{\rho v_b^3 \pi d_3^2} \quad (2.6.3)$$

On reconnaît que le terme de gauche correspond à  $C_D$ . Ensuite, le premier terme du membre

de droite vaut

$$\begin{aligned}
\frac{12\pi\eta v_b^2 b^2}{h} \frac{8}{\rho v_b^3 \pi d_3^2} &= 96 \frac{\eta}{\rho v_b d_3} \frac{b^2}{h d_3}, \\
&= 96 \left( \frac{\eta}{\rho v_b d_3} \frac{d_3^2}{h^2} \right) \frac{h b^2}{d_3^3}, \\
&\stackrel{\pi abh = \pi d_3^3 / 6}{=} \frac{96}{Re_{3h}} \frac{1}{\chi} \frac{1}{6}, \\
&= \frac{16}{Re_{3h}} \frac{1}{\chi}.
\end{aligned}$$

Calculons maintenant le second terme du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\beta \frac{1}{2} \rho v_b^2 \frac{\pi abh v_b}{d_3} \frac{4}{\rho v_b^3 \pi d_3^2} &= 4\beta \frac{\pi abh}{\pi d_3^3}, \\
&\stackrel{\pi abh = \pi d_3^3 / 6}{=} 4\beta \frac{1}{6}, \\
&= \frac{2\beta}{3}.
\end{aligned}$$

Finalement, cela nous permet de déduire une formule pour le coefficient de frottement

$$C_D = \frac{2\beta}{3} + \frac{16}{Re_{3h}} \frac{1}{\chi}. \quad (2.6.4)$$

avec  $\beta = 3.9 \pm 0.1$ . Il est intéressant de remarquer la similarité de cette formule avec l'expression du coefficient de traînée d'une bulle sphérique en 3D pour des nombres de Reynolds faibles uniquement (Magnaudet et Eames, 2000). Afin d'obtenir une expression de  $C_D$  qui ne dépendrait plus que d'un nombre adimensionné (à savoir  $Re_{3h}$ ), on peut se baser sur les résultats de la partie précédente pour considérer que le rapport d'aspect évolue selon la formule

$$\chi = \begin{cases} 1 & Re_{3h} < 1 \\ 0.85 Re_{3h}^{-1/4} & Re_{3h} > 1 \end{cases} \quad (2.6.5)$$

ce qui donne finalement

$$C_D = \begin{cases} \frac{2\beta}{3} + \frac{16}{Re_{3h}} & Re_{3h} < 1, \\ \frac{2\beta}{3} + \frac{16}{0.85 Re_{3h}^{3/4}} & Re_{3h} > 1. \end{cases} \quad (2.6.6)$$

La figure 2.6.3 compare l'expression donnée par l'équation 2.6.6 (pointillés noirs) avec les données expérimentales. On remarque que l'estimation est bonne pour les grosses bulles, peu importe le gap de la cellule  $h$  ou la tension de surface  $\gamma$  du mélange. Pour les petites bulles, le coefficient de frottement est sous-estimé, ce qui vient probablement de la modélisation inadéquate de la dissipation.

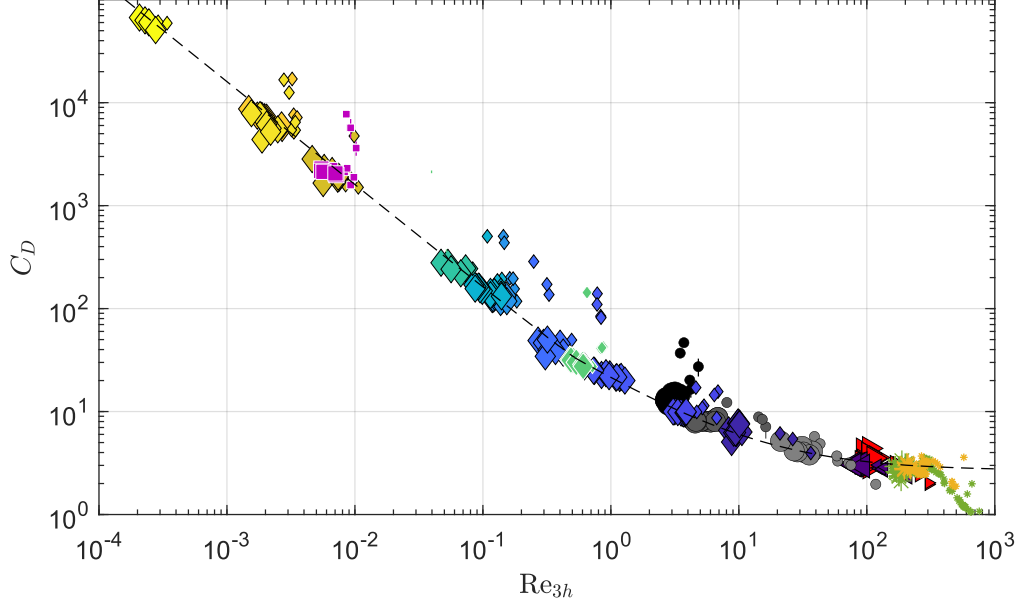


FIGURE 2.6.3 – Coefficient de frottement  $C_D$  en fonction de  $Re_{3h}$ . Les grands (resp. petits) symboles correspondent aux bulles vérifiant  $d_2/h > 4$  (resp.  $d_2/h < 4$ ). Les symboles avec un contour noir correspondent à la cellule de gap  $h = 2.3$  mm et ceux dont le contour est blanc à la cellule de gap  $h = 5.2$  mm. La ligne en pointillés noirs correspond à l'équation 2.6.6 avec  $\beta = 3.9 \pm 0.1$ .

## 2.7 Hydrodynamique du liquide

Jusqu'à présent, nous avons regardé les caractéristiques des bulles, tout particulièrement leur vitesse et leur forme en fonction du nombre de Reynolds  $Re_{3h}$ . Le but de cette partie est de regarder maintenant ce qu'il se passe dans le liquide : on souhaite caractériser le champ de vitesse qui se forme dans la cellule de Hele-Shaw lors du passage d'une bulle. Pour une bulle circulaire (nous appellerons "bulle circulaire" une bulle dont la forme dans le plan de la cellule de Hele-Shaw est un disque, ce qui correspond à  $\chi = 1$ ) dans le domaine visqueux, on a pu voir dans la partie 1.3.1 que le champ de vitesse vaut

$$\vec{v} = \frac{v_b}{4} \left( \frac{d_b}{r} \right)^2 (\sin \Phi \vec{e}_r - \cos \Phi \vec{e}_\Phi) \times \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h/2} \right)^2 \right] \quad (2.7.1)$$

et que le champ de vitesse moyenné dans l'épaisseur  $\vec{v} = 1/h \int_{-h/2}^{h/2} \vec{v} dy$  donne

$$\vec{v} = \frac{v_b}{4} \left( \frac{d_b}{r} \right)^2 (\sin \Phi \vec{e}_r - \cos \Phi \vec{e}_\Phi). \quad (2.7.2)$$

Ce dernier a été vérifié expérimentalement par Madec (2021) lors de sa thèse. Des mesures expérimentales de PIV (*Particle Image Velocimetry*) 2D (Filella et al., 2015) et 3D (Pavlov et al., 2021a) ont été réalisées avec des bulles inertielles dont la vitesse et la forme oscillent (voir figure 2.5.2). Dans ce cas, des relâchés de vortex ont été mis en évidence. Le champ de vitesse moyen est alors notablement différent du champ dipolaire suggéré par l'équation 2.7.2.

Nous nous limiterons dans cette étude au cadre où les caractéristiques des bulles sont stationnaires ( $Re_{3h} < 100$ ). Le champ de vitesse généré par une bulle circulaire en régime visqueux est, comme on vient de le voir, bien connu. Malheureusement, comme nous avons pu le constater dans les parties précédentes, les bulles ont tendance à être plutôt elliptiques et le rapport d'aspect évolue lorsque l'on passe du domaine visqueux au domaine inertiel. On peut alors se demander s'il est possible de prédire le champ de vitesse produit par une bulle non circulaire dans le régime visqueux. Si c'est le cas, on pourrait alors le comparer au champ de vitesse expérimental au fur et à mesure que le nombre de Reynolds  $Re_{3h}$  augmente afin de voir à partir de quel moment la théorie visqueuse n'est plus valable. Dans ce but, les objectifs de cette partie sont de

- mesurer expérimentalement le champ de vitesse moyenné du liquide.
- déterminer le champ de vitesse moyenné théoriquement attendu, peu importe la forme de la bulle, en supposant que l'on est en régime visqueux et donc que le champ donné par l'équation 2.7.1, qui dérive d'un potentiel, est valable pour une bulle circulaire.
- comparer les mesures expérimentales aux résultats théoriques afin de comprendre comment le champ de vitesse est modifié par les non-linéarités lorsque le nombre de Reynolds  $Re_{3h}$  augmente et dépasse l'unité.

### 2.7.1 Mesure expérimentale du champ de vitesse par PIV

Nous utilisons la PIV<sup>2</sup> (*Particle Image Velocimetry*) afin d'obtenir des informations sur le champ de vitesse du fluide. Pour cela, on rajoute au mélange des particules sphériques dont la masse volumique est proche de celle du liquide afin que la vitesse de sédimentation soit négligeable devant la vitesse des bulles. Les particules se comportent alors comme des traceurs passifs. On veille aussi à ne pas trop en ajouter (fraction volumique inférieure à 1 %) afin que les grains ne modifient pas la viscosité du mélange. Il faut aussi vérifier qu'ils soient petits devant la taille des bulles afin d'avoir une bonne résolution. Nous avons donc utilisé des particules de polystyrène de diamètre  $d_p = 80 \mu\text{m}$ , dont la masse volumique vaut  $1060 \text{ kg/m}^3$ . Du sel est ajouté dans les mélanges eau/UCON utilisés afin de s'assurer que les masses volumiques du liquide et des particules soient similaires. On rappelle que la cellule est filmée en étant rétro-éclairée par un panneau LED. Ainsi, les particules de polystyrène apparaissent comme des points noirs sur les images (car les particules obstruent l'éclairage). Cependant, on ne peut pas savoir, pour une particule donnée, où elle se trouve dans le gap. Or, la vitesse du liquide n'est pas la même proche ou loin d'une paroi comme le montre l'équation 2.7.1. La question du champ de vitesse ainsi mesuré peut donc se poser. En moyenne, les particules filmées sont aléatoirement réparties dans le gap donc nous supposons que le champ de vitesse déterminé par PIV correspond au champ moyenné sur l'épaisseur  $\vec{v}$  (équation 2.7.2). Le traitement des données est effectué avec PIVlab, une extension de MATLAB<sup>®</sup>.

On voit sur la figure 2.7.1(a) une bulle de diamètre  $d_2 = 10.6 \text{ mm}$  remontant dans un mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 250 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  ( $Re_{2h} = 0.04 \ll 1$ ) dans la cellule de gap  $h = 2.3 \text{ mm}$ . On distingue tout autour de la bulle des points gris qui correspondent

---

2. Les explications techniques sont disponibles sur le site <https://github.com/Shrediquette/PIVlab/wiki>.



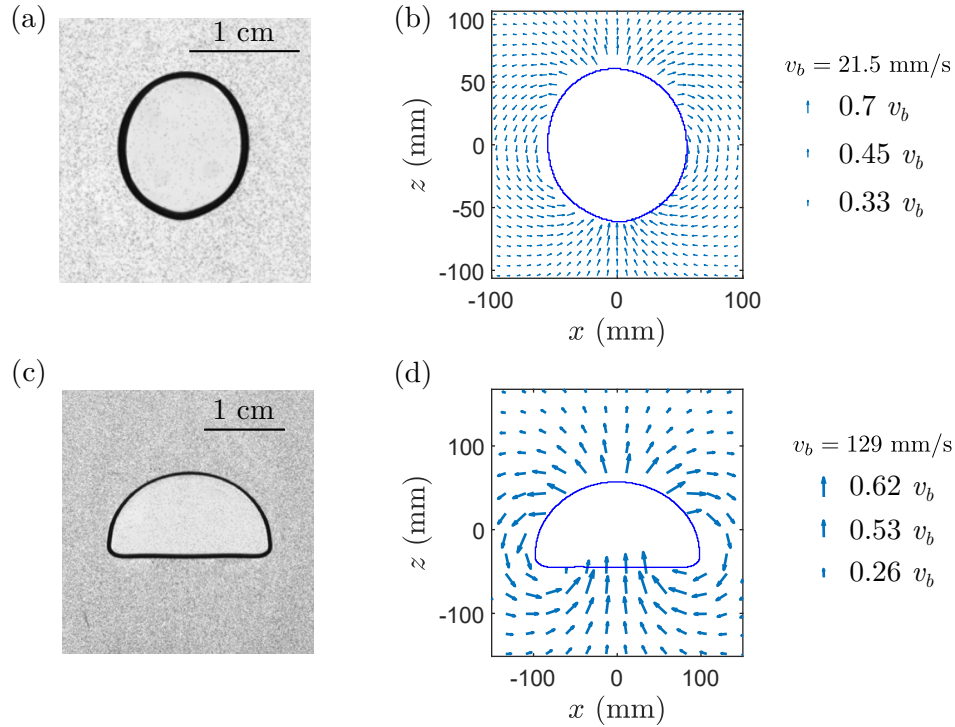


FIGURE 2.7.1 – Exemple de deux expériences de PIV. **(a)** Photographie d’une bulle de diamètre  $d_2 = 10$  mm remontant dans un mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 250$  mPa.s ( $Re_{2h} = 0.04 \ll 1$ ) dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm. Les points gris correspondent aux particules de polystyrène. **(b)** Champ de vitesse obtenu par PIV pour la bulle sur la photographie (a). La ligne bleue représente le contour détecté de la bulle. **(c)** Photographie d’une bulle de diamètre  $d_2 = 18.5$  mm remontant dans un mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 14.8$  mPa.s dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm ( $Re_{3h} = 5$ ). **(d)** Champ de vitesse obtenu par PIV pour la bulle sur la photographie (c). La ligne bleue représente le contour détecté de la bulle.

aux particules de polystyrène qui ont été ajoutées. La figure 2.7.1(b) présente le champ de vitesse obtenu par PIV. La ligne bleue symbolise le contour détecté de la bulle et les flèches bleues le champ de vitesse. On remarque que ce dernier a une forme qui s’apparente à celle d’un dipôle, ce qui est attendu en régime visqueux. La figure 2.7.1(c) montre une bulle de diamètre  $d_2 = 18.5$  mm remontant dans un mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 14.8$  mPa.s dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm ( $Re_{3h} = 5$ ). Le résultat obtenu par PIV sur cette bulle inertielle est présenté figure 2.7.1(d). La ligne bleue représente le contour détecté de la bulle. On remarque cette fois une dissymétrie dans le champ de vitesse entre l’avant et l’arrière de la bulle ainsi que des recirculations autour des points anguleux à l’arrière de la bulle.

## 2.7.2 Champ de vitesse théorique

### Introduction à la transformée de Joukowski

On rappelle que l'on s'intéresse au champ de vitesse moyenné dans le gap  $\vec{v}$ . Autrement dit, on considère un problème bi-dimensionnel, où  $\vec{v}$  ne dépend que de  $x$  et  $z$ . De plus, on a vu dans la partie 1.3.1 que le potentiel  $\Xi$  du champ de vitesse défini par  $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Xi$  vérifie  $\Delta\Xi = 0$  où le laplacien est bidimensionnel (dans le plan de la bulle).  $\Xi$  est donc ce que l'on appelle une fonction harmonique. Les mathématiques complexes nous disent que si l'on connaît  $\Xi$  pour un espace 2D donné, par exemple  $\Xi(\sigma, \xi)$ , alors on peut déduire que le potentiel dans un autre système de coordonnées  $(x(\sigma, \xi), z(\sigma, \xi))$ , qui vaut  $\Xi(x, z)$  si la transformation  $\mathcal{Z} = f(\zeta) = x + iz$  avec  $\zeta = \sigma + i\xi$  est une transformation conforme. Il suffit pour cela de remplacer  $\sigma$  et  $\xi$  par leur expression en fonction de  $x$  et  $z$  (ou utiliser l'expression de  $\zeta$  en fonction de  $\mathcal{Z}$ ). Pour que cette méthode fonctionne, il faut vérifier que  $f'(\zeta) \neq 0$  sur le domaine d'étude.

Prenons immédiatement l'exemple qui nous intéresse, qui est la transformée de Joukowski, qui permet de transformer un cercle en diverses formes 2D, dont les ellipses. Cette dernière est définie par

$$\mathcal{Z} = \zeta - \frac{aR^2}{\zeta}, \quad (2.7.3)$$

qui vérifie  $f'(\zeta) \neq 0$  si  $\zeta \neq R$ . Si nous partons d'un cercle de rayon  $R$  dans les coordonnées  $(\sigma, \xi)$ , à savoir  $\zeta = Re^{i\theta}$ , la condition  $f'(\mathcal{Z}) \neq 0$  est vérifiée pour  $|\zeta| > R$ , donc pour tout le domaine en dehors du cercle. On obtient dans les coordonnées  $\mathcal{Z}$ , avec la transformée de Joukowski, une ellipse de petit axe  $R(1-a)$  et de grand axe  $R(1+a)$ . Un exemple est donné figure 2.7.2(a) avec  $R = 1$  et  $a = 0.2$ . On voit en bleu le cercle de rayon unité de départ et en rouge l'ellipse obtenue par transformation conforme. Connaissant le potentiel complexe pour une bulle circulaire, qui vaut

$$\Xi(\zeta) = \frac{v_b R^2}{\zeta}, \quad (2.7.4)$$

on peut alors en déduire le potentiel de la bulle elliptique, qui vaut  $\Xi(\mathcal{Z}) = v_b R^2 / \zeta(\mathcal{Z})$ . Pour cela, il nous faut donc l'expression de  $\zeta$  en fonction de  $\mathcal{Z}$ , que l'on peut obtenir en inversant l'équation 2.7.3

$$\zeta(\mathcal{Z}) = \frac{\mathcal{Z} \pm \sqrt{\mathcal{Z}^2 - 4aR}}{2}. \quad (2.7.5)$$

On en déduit donc que, dans le système de coordonnées  $\mathcal{Z}$  de la bulle elliptique, le potentiel complexe vaut

$$\Xi(\mathcal{Z}) = \frac{2v_b R^2}{\mathcal{Z} \pm \sqrt{\mathcal{Z}^2 - 4aR}}, \quad (2.7.6)$$

duquel on peut ensuite déduire le champ de vitesse correspondant en utilisant  $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Re(\Xi)$ .

Néanmoins, si l'on regarde attentivement la forme des bulles dans le domaine inertiel (un exemple est donné figure 2.7.2(b) avec une bulle à  $Re_{2h} = 2$ ), on se rend compte que modéliser cette dernière par une ellipse risque de créer des inexactitudes importantes du champ de vitesse dans le voisinage de la bulle. En effet, le dessous de la bulle est aplati alors que l'avant est courbé. Afin de mieux correspondre à la forme réelle des bulles, il faut

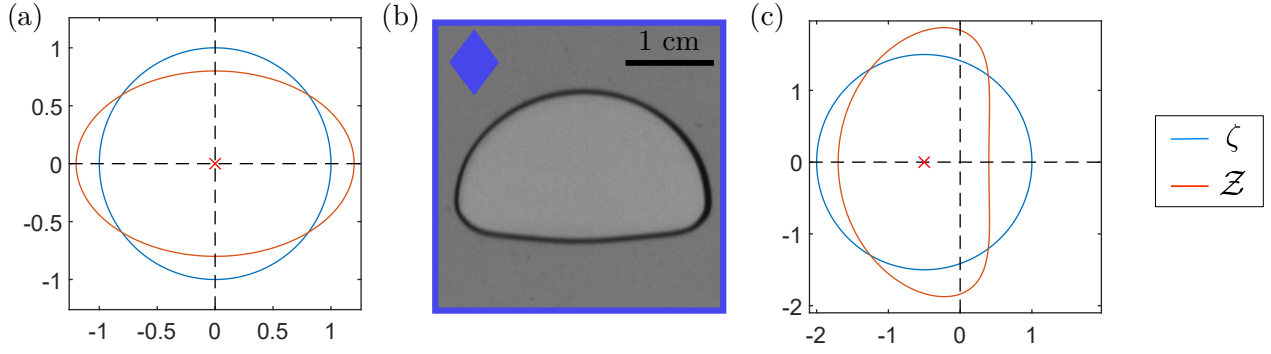


FIGURE 2.7.2 – **(a)** En bleu, un cercle de rayon unité et en rouge le résultat de la transformée de Joukowski définie par l'équation 2.7.3 avec  $a = 0.2$ . On obtient une ellipse de petit axe  $R(1 - a) = 0.8$  et de grand axe  $R(1 + a) = 1.2$ . **(b)** Image d'une bulle en régime inertiel ( $Re_{2h} = 2$ ). On voit que la bulle n'est pas elliptique mais plutôt aplatie à l'arrière et courbée à l'avant. **(c)** En bleu est représenté un cercle déterminé par  $\zeta = -\lambda + (R + \lambda)e^{i\Phi}$  avec  $R = 1$  et  $\lambda = 0.5$ . La ligne rouge correspond à la transformée de Joukowski de cette forme avec  $a = -0.6$ . On voit que la forme obtenue est semblable à celle de la photo **(b)**, tournée de  $90^\circ$ .

donc complexifier la modélisation. Pour cela, on introduit un nouveau paramètre  $\lambda$  tel que  $\zeta = -\lambda + (R + \lambda)e^{i\Phi}$ . Autrement dit,  $\zeta$  est un cercle de rayon  $R + \lambda$  décalé de  $-\lambda$  le long de l'axe des réels. Un tel cercle, avec  $R = 1$  et  $\lambda = 0.5$  est représenté sur la figure 2.7.2(c). La forme obtenue par transformée de Joukowski avec  $a = -0.6$  est représentée en rouge. On voit que cette dernière, tournée de  $90^\circ$ , est assez semblable à la bulle sur la photo figure 2.7.2(b).

En résumé, nous sommes maintenant capables à partir d'un cercle centré en l'origine ou non, de transformer ce dernier en une forme qui soit fidèle à celle d'une bulle obtenue expérimentalement. Étant donné que l'on connaît le potentiel d'une bulle circulaire, on peut alors en déduire la forme du potentiel pour la forme de bulle qui nous intéresse. Cependant, lors d'une expérience, nous n'avons accès qu'à la forme expérimentale de la bulle. Se pose alors la question de comment obtenir les valeurs des paramètres  $a$ ,  $R$  et  $\lambda$ , qui caractérisent la transformée de Joukowski. Si cela est possible, nous pourrions déduire le champ de vitesse théorique avec la démarche suivante :

- À partir du contour de la bulle déterminé par les images expérimentales, on déduit les différents paramètres de la transformée de Joukowski, à savoir  $a$ ,  $R$  et  $\lambda$ .
- On en déduit le cercle que nous allons utiliser pour la transformée de Joukowski, donné par  $\zeta = -\lambda + (R + \lambda)e^{i\Phi}$ . On connaît le potentiel d'une bulle circulaire donc on connaît  $\Xi(\zeta)$ .
- Finalement, on en déduit le potentiel de la bulle que l'on étudie qui vaut  $\Xi(\zeta(\mathcal{Z}))$ , duquel on déduit le champ de vitesse. Pour cela, on utilisera la formule

$$\zeta(\mathcal{Z}) = \frac{\mathcal{Z} \pm \sqrt{\mathcal{Z}^2 - 4aR}}{2}, \quad (2.7.7)$$

qui découle directement de l'équation 2.7.3.

## Détermination expérimentale des paramètres de la transformée de Joukowski

Nous avons trois inconnues à déterminer :  $a$ ,  $R$  et  $\lambda$ . Il nous faut donc trois équations indépendantes portant sur ces paramètres. Expérimentalement, une fois le contour d'une bulle détecté, on peut facilement extraire le maximum et le minimum de  $x_c$  et  $z_c$ , où les coordonnées  $(x_c, z_c)$  décrivent le contour de la bulle. En fait, on peut montrer à partir de l'équation 2.7.3 que le maximum de  $x_c$  respecte la relation

$$\max(x_c) = \mathcal{Z}(\Phi = 0) = R(1 + a) \quad (2.7.8)$$

et que le minimum vérifie

$$\min(x_c) = \mathcal{Z}(\Phi = \pi) = -(R + 2\lambda) - \frac{R^2}{R + 2\lambda}a. \quad (2.7.9)$$

Malheureusement, il n'existe pas de formule simple pour connaître le maximum ou le minimum de  $z_c$  (l'un valant l'opposé de l'autre par symétrie). Nous utiliserons la formule

$$\max(z_c) \approx \left( R + \lambda - C_1 \frac{R^2}{R + 2\lambda} a \right) \left( 1 - C_2 \frac{a}{\lambda} \right), \quad (2.7.10)$$

trouvée empiriquement, où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes à déterminer. Pour ce faire, nous utilisons des cas tests, c'est-à-dire des transformées de Joukowski dont nous connaissons les paramètres. On extrait la valeur de  $\max(z_c)$  pour différents jeux de paramètres et on détermine les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  qui marchent le mieux. Les figures 2.7.3(a) et (b) illustrent respectivement sur des transformées connues que les formules proposées pour le maximum et le minimum de  $x_c$  sont valables, les points correspondant à la valeur numérique et les traits aux équations correspondantes. La figure 2.7.3(c) compare l'équation proposée pour le maximum de  $z_c$  où  $C_1 = 1.05$  et  $C_2 = 0.068$  avec des valeurs numériques. On en déduit que le jeu d'équations proposées (équations 2.7.8, 2.7.9 et 2.7.10) fonctionne bien. En inversant numériquement le système, on peut en déduire  $a$ ,  $R$  et  $\lambda$ .

## Validité de la méthode

Afin de nous assurer que la méthode est valide, on cherche à comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux dans un cadre bien connu : la remontée de bulles en régime visqueux. On s'intéresse donc à une bulle de diamètre  $d_b = 10.6$  mm remontant dans un mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 250$  mPa.s dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm (voir figure 2.7.4(a), qui est la même bulle que dans la figure 2.7.1). On détecte son contour et on en extrait les valeurs  $\lambda = 4.9$  mm,  $R = 53$  mm et  $a = 0.055$  en utilisant la méthode présentée précédemment. Le contour détecté expérimentalement et celui déduit par transformée de Joukowski avec ces paramètres sont tracés sur la figure 2.7.4(b) en bleu et rouge respectivement. Les flèches rouges correspondent au champ de vitesse déterminé numériquement. La ligne en pointillés gris correspond à la droite  $x = 0$  et la définition de  $r$  et de  $\Phi$  sont rappelés pour la suite. On remarque que les deux contours (expérimental et numérique) correspondent très bien, l'écart entre les deux étant de l'ordre du pixel en un point donné. On remarque par ailleurs que le champ de vitesse obtenu par cette méthode est conforme à ce que l'on attend

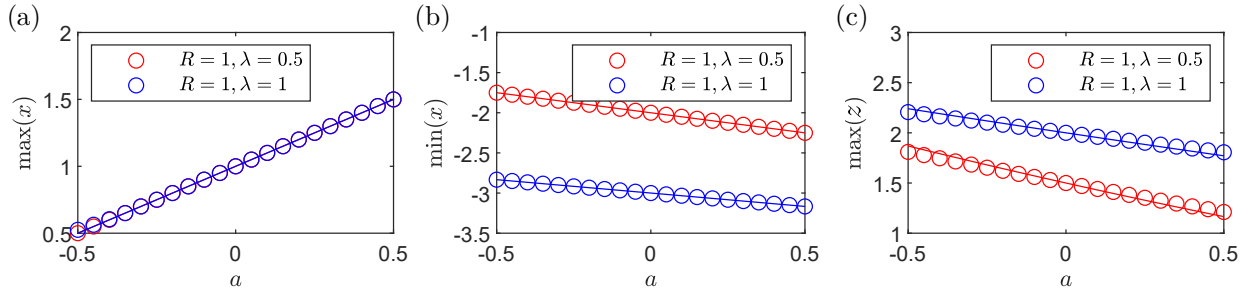


FIGURE 2.7.3 – Vérification de la validité des relations entre les paramètres de la transformée de Joukowski  $a$ ,  $R$  et  $\lambda$  et les grandeurs mesurables à partir des données expérimentales comme (a)  $\max(x)$  (équation 2.7.8), (b)  $\min(x)$  (équation 2.7.9) et (c)  $\max(z)$  (équation 2.7.10). Les points rouges (resp. bleus) correspondent à  $R = 1$  et  $-0.5 < a < 0.5$  pour  $\lambda = 0.5$  (resp.  $\lambda = 1$ ). Les traits pleins représentent les équations correspondant à chaque grandeur, pour les deux jeux de paramètres.

étant donné qu'il a la forme typique d'un champ généré par un dipôle. On peut d'ailleurs le comparer visuellement au résultat obtenu par PIV sur la figure 2.7.4(c) (qui est la même figure que 2.7.1(b)). Les deux champs ont l'air effectivement similaires.

Pour aller plus en détails et valider concrètement le protocole, nous souhaitons comparer quantitativement le champ de vitesse obtenu par PIV à celui obtenu numériquement. La figure 2.7.5 présente diverses comparaisons des deux champs de vitesse obtenus, avec en bleu (•) les données expérimentales et en rouge (•) les données numériques obtenues par transformée de Joukowski. Les pointillés noirs représentent le champ de vitesse attendu pour une bulle sphérique, donné par l'équation 2.7.2. Sur la figure 2.7.5(a) est représentée la vitesse selon  $z$  le long de l'axe  $z$  passant par  $x = 0$ . Les points à  $|z/d_2| \lesssim 0.5$  ne sont pas physiques car ils correspondent à l'intérieur de la bulle. On remarque que les données expérimentales et numériques sont en très bon accord à toutes distances de la bulle. Le champ de vitesse obtenu décroît de manière similaire au cas d'une bulle circulaire, ce qui n'est pas étonnant vu que la bulle étudiée est presque circulaire. La vitesse radiale normalisée par  $v_b$  en fonction de  $\Phi$  pour deux valeurs de  $r$  différentes est présentée figure 2.7.5(b) ( $r/d_2 = 0.7$ ) et (c) ( $r/d_2 = 1.5$ ). On observe toujours une bonne concordance entre les données expérimentales et numériques. De plus, on remarque que ces dernières s'écartent légèrement du modèle prédit pour une bulle circulaire. On voit apparaître en  $\Phi = -\pi/2$  et  $\Phi = \pi/2$  le fait que la bulle est plus large qu'une bulle circulaire de même diamètre  $d_2$ , qui se traduit par le fait que la norme des vitesses obtenues pour la bulle elliptique est supérieure. La même chose peut être remarquée sur la figure 2.7.5(c), confirmant ainsi ces observations. La vitesse tangentielle  $v_\Phi$  normalisée par  $v_b$  en fonction de  $\Phi$  pour deux valeurs de  $r$  différentes est présentée figure 2.7.5(d) ( $r/d_2 = 0.7$ ) et (e) ( $r/d_2 = 1.5$ ). On voit cette fois que les valeurs expérimentales ne sont qu'en accord partiel avec les données numériques, et ce tout particulièrement proche de la bulle ( $r/d_2 = 0.7$ , figure 2.7.5(d)). Il semble qu'autour de  $\Phi = 0$  et  $\Phi = \pi$ , le modèle numérique ait du mal à retranscrire le fait que la bulle soit moins large dans cet axe que la bulle circulaire de diamètre  $d_2$  équivalent. Cet effet s'estompe lorsque l'on s'éloigne et les données se superposent alors de nouveau, comme nous pouvons le voir figure 2.7.5(e). On observe par ailleurs un point rouge aberrant, provenant du raccord entre  $z < 0$  et  $z > 0$  qui n'est pas défini en  $z = 0$ , dû au fait

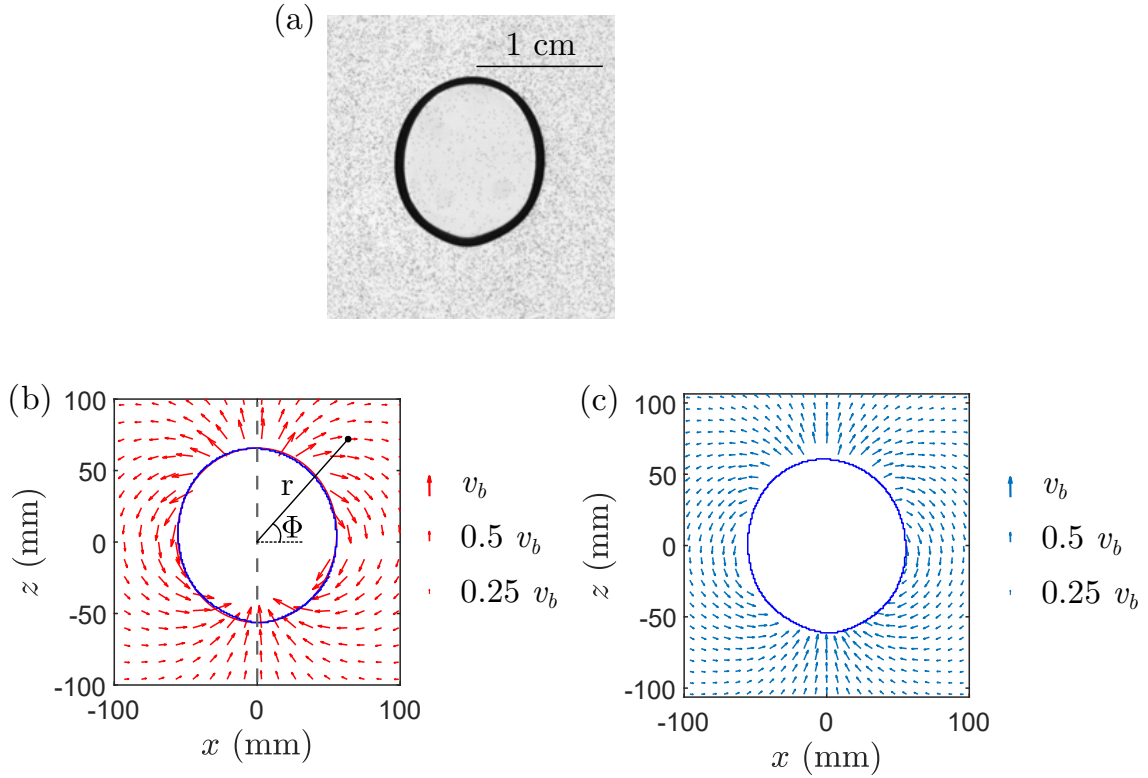


FIGURE 2.7.4 – (a) Photographie d’une bulle de diamètre  $d_b = 10.6$  mm remontant dans un mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 250$  mPa.s dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm à la vitesse  $v_b = 21.5$  mm/s. (b) Champ de vitesse obtenu numériquement par transformée de Joukowski de paramètres  $\lambda = 4.9$  mm,  $R = 53$  mm et  $a = 0.055$ . La ligne bleue correspond au contour obtenu par détection numérique et la ligne rouge à celui obtenu par transformée de Joukowski. Noter qu’elles sont quasiment superposées. (c) Champ de vitesse expérimental obtenu par PIV.

que la transformée de Joukowski soit bivaluée (équation 2.7.7).

Pour résumer, nous avons vu que nous pouvons calculer numériquement le champ de vitesse attendu pour n’importe quelle forme de bulle en supposant que cette dernière remonte en régime visqueux. Pour cela, nous utilisons une transformation conforme, appelée transformée de Joukowski, qui permet de passer d’une cercle à une forme fidèle à celle observée expérimentalement pour une bulle donnée, ce qui permet de déduire le champ de vitesse de cette dernière. Nous avons vérifié sur une bulle en régime visqueux que cette méthode est fonctionnelle et que les calculs numériques permettent de retrouver le champ de vitesse mesuré expérimentalement, à quelques erreurs près.

### 2.7.3 Transition laminaire/inertiel : comparaison des champs de vitesse théoriques et expérimentaux

Le but de cette sous-partie est de voir si le champ de vitesse change à cause des non-linéarités lorsque l’on passe du domaine visqueux au domaine inertiel. Pour cela, nous allons

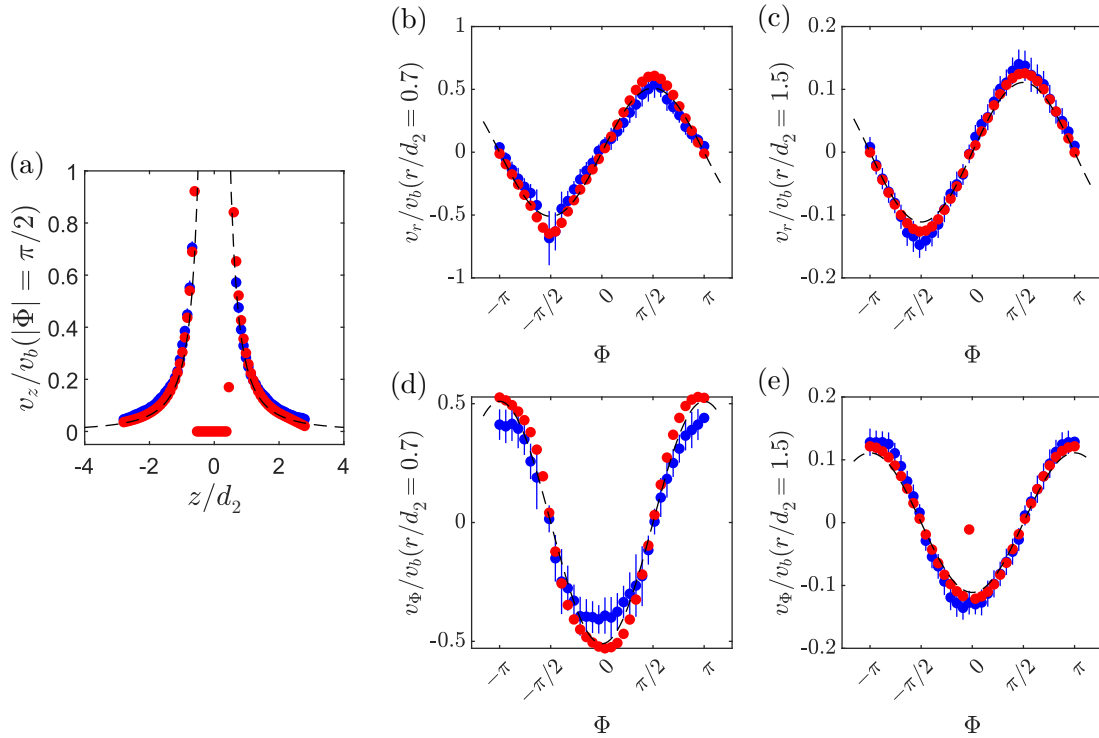


FIGURE 2.7.5 – Comparaison des champs de vitesse obtenus par PIV (●) et par calcul numérique par transformée de Joukowski (●). Les pointillés noirs représentent le champ de vitesse attendu pour une bulle circulaire, donné par l'équation 2.7.2. (a) Vitesse selon l'axe  $z$  le long de la ligne  $x = 0$  en fonction de  $z/d_2$ . (b) Vitesse radiale normalisée par  $v_b$  en fonction de  $\Phi$  pour  $r/d_2 = 0.7$  et (c)  $r/d_2 = 1.5$ . (d) Vitesse tangentielle normalisée par  $v_b$  en fonction de  $\Phi$  pour  $r/d_2 = 0.7$  et (e)  $r/d_2 = 1.5$ .

comparer le champ de vitesse expérimental (en inertiel) au champ de vitesse théorique (qui ne prend en compte que les termes visqueux) afin de voir si des différences apparaissent entre les deux et si oui lesquelles. Nous étudions dans ce but une bulle de diamètre  $d_2 = 18.5$  mm remontant dans un fluide de viscosité  $\eta = 14.8$  mPa.s dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm ( $Re_{3h} = 5 > 1$ ) dont une photo est présentée figure 2.7.6(a). Le trait bleu correspond au contour détecté numériquement et les pointillés rouges au contour théorique obtenu par transformée de Joukowski avec  $R = 48$  mm,  $\lambda = 17$  mm et  $a = -0.77$ , les deux se superposant relativement bien. La transformée de Joukowski est donc fonctionnelle pour les bulles en régime visqueux et inertiel. Les figures 2.7.6(b) et (c) montrent le champ de vitesse obtenu par PIV (b) et théoriquement (c). On remarque que les deux champs ont l'air en accord l'un avec l'autre.

Afin d'étudier cela dans les détails, les figures 2.7.6(d) et (e) représentent la vitesse radiale  $v_r$  normalisée par  $v_b$  pour  $r/d_2 = 1$  et  $r/d_2 = 1.7$ . Les points rouges proviennent du modèle numériques, les points bleus sont les points expérimentaux et les pointillés noirs représentent l'équation 2.7.2. On remarque que les deux jeux de données sont cohérents entre eux et s'éloignent du modèle de la bulle circulaire, avec des variations de vitesse plus importante en  $\Phi = 0$  et  $\Phi = \pi$  et à l'inverse des plateaux pour  $\Phi = \pm\pi/2$ . Lorsque l'on regarde plus



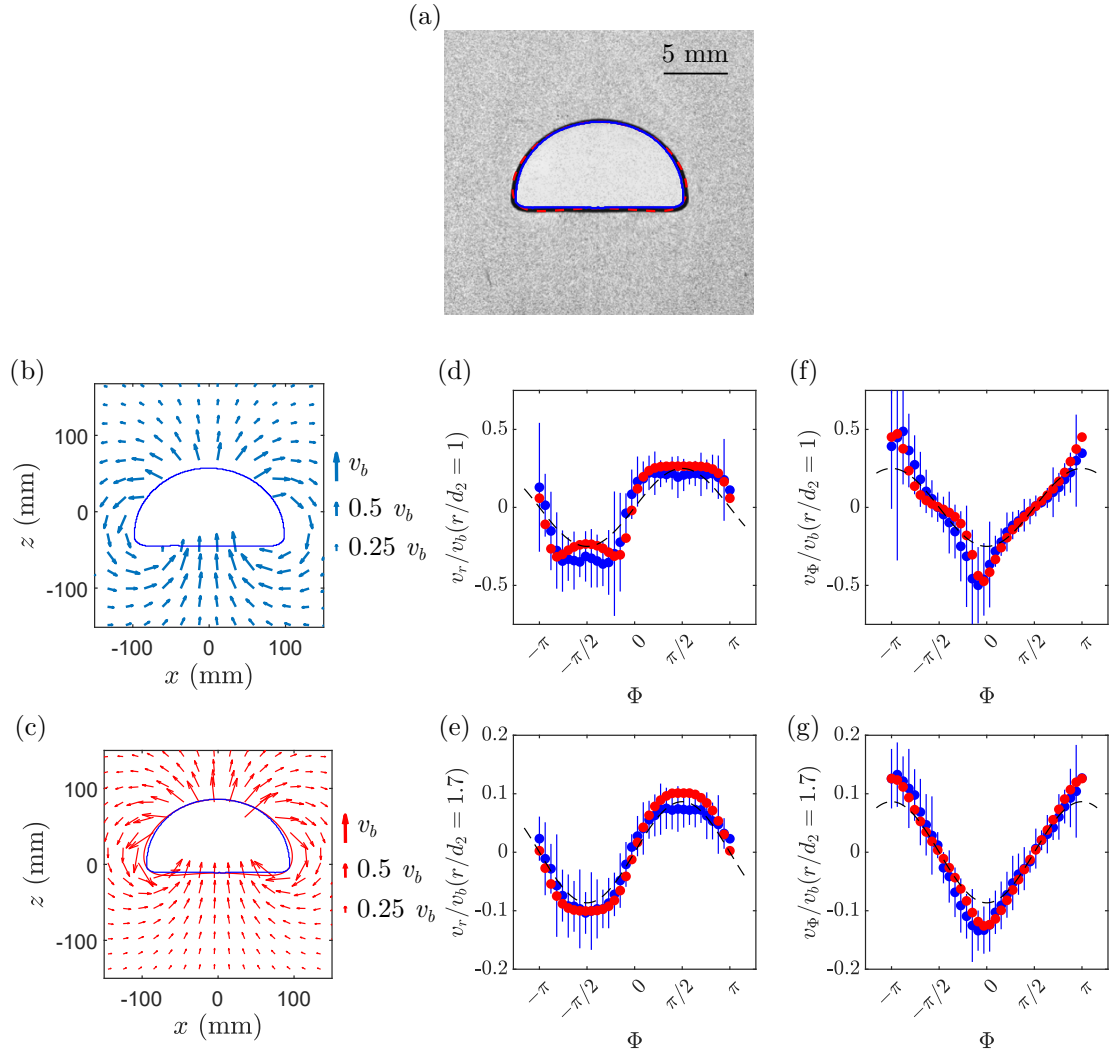


FIGURE 2.7.6 – (a) Photographie d’une bulle de diamètre  $d_2 = 18.5$  mm remontant dans un fluide de viscosité  $\eta = 14.8$  mPa.s dans la cellule de gap  $h = 2.3$  mm ( $Re_3h = 5 > 1$ ). Sur tous les graphes, les points rouges ( $\bullet$ ) correspondent aux données déterminées numériquement par transformée de Joukowski et les points bleus aux données expérimentales obtenues par PIV ( $\bullet$ ). Les pointillés noirs représentent le champ théorique attendu pour une bulle circulaire (équation 2.7.2). (b) Champ de vitesse obtenu par PIV. (c) Champ de vitesse obtenu théoriquement à l’aide d’une transformée de Joukowski de paramètres  $R = 48$  mm,  $\lambda = 17$  mm et  $a = -0.77$ . (d) Vitesse radiale  $v_r$  normalisée par  $v_b$  pour  $r/d_2 = 1$  et (e)  $r/d_2 = 1.7$ . (f) Vitesse tangentielle  $v_\phi$  normalisée par  $v_b$  pour  $r/d_2 = 1$  et (g)  $r/d_2 = 1.7$ .

loin de la bulle, les données numériques et expérimentales se rapprochent des pointillés noirs, signifiant que tout se passe au loin comme si la bulle était circulaire. Les figures 2.7.6(f) et (g) représentent la vitesse radiale  $v_\phi$  normalisée par  $v_b$  pour  $r/d_2 = 1$  et  $r/d_2 = 1.7$ . Encore une fois, les données expérimentales et les données numériques sont en très bon accord. On voit proche de la bulle une réelle différence avec le cas d’une bulle circulaire, tout particulièrement en  $\Phi = 0$  et  $\Phi = \pi$ . Ces différences se tarissent lorsque l’on s’éloigne de la bulle.



Étant donné que le modèle numérique permet de retrouver les résultats expérimentaux, on en conclut que nulle trace de non-linéarité n'est observable dans cette expérience et la théorie établie en régime visqueux marche toujours bien pour déterminer le champ de vitesse moyen du fluide, même si elle prédit mal la vitesse de la bulle. Il est possible qu'il faille donc regarder dans le gap de la cellule afin de déceler les éléments qui permettraient de comprendre comment le champ de vitesse varie. Nous n'avons pas poussé plus loin l'étude car nous rentrons dans la limite du montage expérimental utilisé ici : le temps de remontée de la bulle s'approche du temps nécessaire pour atteindre un état stationnaire. De plus, si le nombre de Reynolds augmente trop ( $Re_{3h} \approx 100$ ), la vitesse et la forme des bulles ne sont plus constantes car des oscillations apparaissent, ce qui est en dehors du cadre de cette étude, le calcul du champ de vitesse par transformée de Joukowski supposant que la bulle a une forme constante.

## Résumé du chapitre 2

Nous nous sommes intéressés à la remontée de bulles uniques en cellule de Hele-Shaw verticale. Nous avons d'abord observé que la vitesse et la forme des bulles restent constantes tout le long de la remontée, sauf pour les cas les plus inertiels ( $Re_{3h} > 100$ ). Ensuite, nous avons vu que dans le régime visqueux, la vitesse des bulles peut se modéliser par la relation

$$\frac{v_b}{v_M} = \mu_1 \left(1 - e^{-\mu_2 d_2/h}\right), v_M = \frac{\rho g h^2 a}{12\eta b}.$$

Nous avons montré que  $\mu_1 \approx 1$ , peu importe la viscosité ou la tension de surface du liquide et peu importe le gap de la cellule. Cependant, en étudiant la transition de la vitesse vers  $v_b = v_M$ , nous avons vu que la grandeur  $d_2/h$  n'est pas le rapport pertinent à considérer car  $\mu_2$  dépend de  $h$ . Nous avons aussi pu voir que la tension de surface n'impacte pas la valeur de  $\mu_2$ .

Ensuite, en écrivant un bilan de puissance, nous avons trouvé une expression pour la vitesse des "grosses" bulles ( $d_2/h > 4$ ) valables pour toutes nos expériences

$$v_b = \frac{2v_M}{1 + \sqrt{1 + 2\beta \left(\frac{v_M}{\sqrt{gd_3}}\right)^2}}.$$

Nous avons aussi étudié la forme des bulles, montrant que dans le régime visqueux, le rapport d'aspect est constant et égale à  $\chi \approx 1.1$  jusqu'à  $d_2/h = 15$  avant de croître avec la taille des bulles. Dans le régime inertiel nous avons vu que le rapport d'aspect augmente avec la taille des bulles jusqu'à  $d_2/h = 4$  avant d'atteindre un plateau proportionnel à  $Re_{3h}^{-1/4}$ . Toutes ces observations ont permis de déduire le coefficient de traînée des grosses bulles

$$C_D = \begin{cases} \frac{2\beta}{3} + \frac{16}{Re_{3h}} & Re_{3h} < 1, \\ \frac{2\beta}{3} + \frac{16}{0.85Re_{3h}^{3/4}} & Re_{3h} > 1. \end{cases}$$

Pour finir, nous avons étudié l'hydrodynamique du fluide, mettant en place une méthode permettant de prédire numériquement le champ de vitesse du fluide généré par une bulle en régime visqueux peu importe sa forme. Même avec des nombres de Reynolds supérieurs à l'unité, l'accord entre la théorie et les expériences étant bon, nulle trace de l'effet des non-linéarités sur le champ de vitesse n'a pu être observé.

# Chapitre 3

## Bulle unique en cellule de Hele-Shaw inclinée

*"- Autrement on pourrait retourner la cellule!  
-Bah... Le liquide se verserait par terre...  
-Ah oui..."*

Extrait de la réunion extrêmement productive du 06/03/2023

Dans le chapitre 2, nous nous sommes uniquement intéressés au cas où la cellule de Hele-Shaw est verticale. Le but de cette partie est d'étudier comment l'angle d'inclinaison  $\theta$  que fait la cellule avec la gravité change les résultats observés en vertical ( $\theta = 0^\circ$ ). Nous étudierons uniquement le régime visqueux ( $Re_{2h} \ll 1$ ). Tout comme dans le chapitre 2, nous regarderons tout particulièrement la vitesse et la forme de la bulle. La vitesse théorique calculée par Taylor et Saffman (1959) et Maxworthy (1986) des bulles vérifiant  $d_2 \gg h$  est donnée par l'équation 1.3.31 (voir partie 1.3.1), que l'on rappelle ici :

$$v_M = \frac{\rho g \cos \theta h^2}{12\eta} = v_M(\theta = 0^\circ) \cos \theta,$$

où le terme  $g \cos \theta$  est en rouge afin de souligner la différence entre ce chapitre et le précédent (chapitre 2) qui se plaçait dans le cadre spécifique  $\theta = 0^\circ$ . Nous vérifierons tout d'abord si cette vitesse théorique est valable expérimentalement et si elle retranscrit bien la dépendance en  $\theta$  de la vitesse des grosses bulles. Ensuite, nous parlerons en deux temps de la forme de la bulle. Dans un premier temps, nous étudierons le plan de la cellule, dans lequel la forme de la bulle est caractérisée par le rapport d'aspect. Dans un second temps, nous nous intéresserons à la direction perpendiculaire au plan de la cellule, c'est-à-dire la direction du gap, où nous discuterons des films de lubrification.

Ce chapitre a fait l'objet d'un manuscrit actuellement en revue (B. Monnet et al., Bubble dynamics in a thin gap between inclined rigid walls, en revue à PRF, 2024).

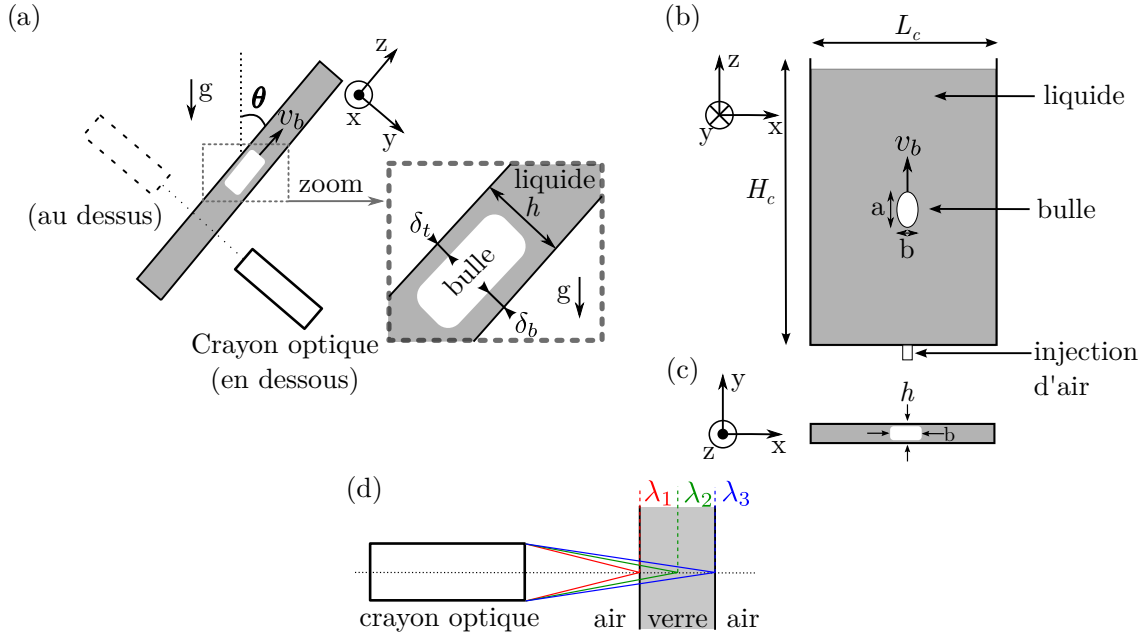


FIGURE 3.1.1 – Schéma du dispositif expérimental où l’on voit une bulle unique remonter dans une cellule de Hele-Shaw faisant un angle  $\theta$  avec la verticale. La bulle est caractérisée par sa vitesse  $v_b$ , la taille de son axe le long du mouvement  $a$  et celle de son axe perpendiculaire au mouvement  $b$  dans le plan  $xz$ . Les schémas ne sont pas à l’échelle. **(a)** Projection dans le plan  $yz$ . Un crayon optique est disposé au-dessus (ou en dessous) de la cellule afin de mesurer la couche de lubrification supérieure  $\delta_t$  (ou inférieure  $\delta_b$ ). **(b)** Projection dans le plan  $xz$  et **(c)** dans le plan  $xy$ . **(d)** Schéma du fonctionnement du crayon optique avec un exemple sur la mesure de l’épaisseur d’une lame de verre.

## 3.1 Méthodologie

### 3.1.1 Dispositif expérimental

La figure 3.1.1 présente le dispositif expérimental utilisé dans ce chapitre. Une cellule de Hele-Shaw (hauteur  $H_c$  et largeur  $L_c$  grandes devant le gap  $h$ ) est inclinée d’un angle  $\theta$  par rapport à la verticale. Les différentes cellules et les différents liquides utilisés sont présentés dans la sous-partie 3.1.2. Un crayon optique (STIL) CCS (Chromatic Confocal Sensing) est disposé au-dessus (ou en dessous) de la cellule afin de mesurer la couche de lubrification supérieure  $\delta_t$  (ou inférieure  $\delta_b$ ) (figure 3.1.1, zoom). Le crayon optique fonctionne en envoyant des signaux de différentes longueurs d’onde, chacune focalisée à une distance spécifique. Il mesure ensuite lesquelles sont réfléchies, synonyme de la présence d’une interface aux distances correspondant aux longueurs d’onde réfléchies. Un schéma de ce fonctionnement est présenté figure 3.1.1(d) où l’on voit le crayon optique envoyer trois longueurs d’onde différentes en direction d’une lame de verre. Étant donné la présence des interfaces air/verre, les longueurs d’onde  $\lambda_1$  (rouge) et  $\lambda_3$  (bleu) sont partiellement réfléchies en direction du crayon optique, ce qui n’est pas le cas de  $\lambda_2$  (vert).

Le reste du montage est similaire à celui du chapitre précédent. Les bulles sont générées manuellement à la base de la cellule à l’aide d’une seringue de 50 mL. Les cellules de Hele-

Cellule	$H_c$ (cm)	$L_c$ (cm)	$h_0$ (mm)	$e_g$ (mm)	$\eta$ (mPa.s)	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\theta$ (°)	$\alpha_0$	Symbole
1	28.5	23.5	2.19	3.9	{145, 219}	{1048, 1055}	[0-75]	{1.19, 1.05}	◦
2	30	20	2.29	5	145	1048	[0-80]	0.98	▷
3	30	20	5.21	5	580	1068	[0-80]	1.26	◊

TABLE 3.1 – Propriétés des cellules et des liquides utilisés. Tous les liquides sont des mélanges eau/UCON. Nous avons utilisé trois cellules de Hele-Shaw différentes (hauteur  $H_c$ , largeur  $L_c$ , épaisseur de verre  $e_g$  et gap  $h_0 = h(\theta = 0^\circ)$ ) pour réaliser les travaux présentés dans ce chapitre. La viscosité et la masse volumique des différents mélanges sont indiquées. La tension de surface vaut  $\gamma = 51 \pm 1$  mN.m<sup>-1</sup> pour les mélanges des cellules 1 et 2 et  $\gamma = 47 \pm 1$  mN.m<sup>-1</sup> pour celui de la la cellule 3. La plage des angles d’inclinaison explorée est aussi indiquée. La valeur de  $\alpha_0$  correspond à l’équation 3.3.1 pour  $\theta = 0^\circ$ . L’incertitude typique sur  $\alpha_0$  est de 3%. Le nombre de Reynolds le plus haut atteint pour chaque cellule est de l’ordre de  $Re_{2h} = 0.1$ .

Shaw sont rétroéclairées par un panneau LED disposé ~20 cm derrière elles et allumé à l’aide d’une alimentation stabilisée. Les remontées de bulles sont filmées à l’aide d’une caméra Basler, 2048x1024 pixels, dont le nombre d’images par seconde est adapté à la vitesse de la bulle étudiée, allant de 5 à 30 images par seconde. Seule la région centrale de la cellule est étudiée pour s’assurer que nous pouvons négliger les effets de bord.

### 3.1.2 Liquides et cellules utilisés

Les différentes cellules et les liquides utilisés pour chacune d’entre elles sont présentés dans le tableau 3.1. Les liquides choisis pour ces expériences sont tous des mélanges eau/UCON dont la viscosité a été choisie afin de vérifier  $Re_{2h} \ll 1$  dans toutes les expériences (en pratique  $Re_{2h} \lesssim 0.1$ ). Les tensions de surface valent  $\gamma = 51 \pm 1$  mN.m<sup>-1</sup> pour les mélanges des cellules 1 et 2 et  $\gamma = 47 \pm 1$  mN.m<sup>-1</sup> pour celui de la cellule 3. Les méthodes utilisées pour déterminer les caractéristiques des liquides sont présentées en annexe A. Deux cellules (1 et 2) ont des gaps relativement identiques ( $h_0 = 2.19$  mm pour la cellule 1 contre  $h_0 = 2.29$  mm pour la cellule 2) mais ne sont pas conçues de la même manière : l’arrivée d’air ainsi que l’épaisseur des plaques de verre et la structure qui les supporte ne sont pas les mêmes (les plaques de verre de la cellule 2 sont accrochées par leurs quatre faces à la structure qui les soutient alors que celles de la cellule 1 ne le sont que par trois des faces, le bord supérieur n’étant pas attaché à la structure). Enfin, les cellules 2 et 3 sont identiques en tous points sauf pour leur gap, qui varie de plus d’un facteur 2 (ce sont les mêmes cellules que celles utilisées dans le chapitre 2). L’analyse des images est exactement la même que celle présentée dans la partie 2.1.3. Chaque cellule sera représentée par un symbole donné qui est propre à ce chapitre (voir tableau 3.1).

Pour une cellule donnée et un angle d’inclinaison donné, nous avons vérifié que le gap est à peu près uniforme sur toute la cellule. Cependant, il est possible que le fait d’incliner la cellule modifie la valeur du gap. Il est important de connaître sa valeur étant donné que la vitesse évolue en  $h^2$  (équation 1.3.31). Afin de déterminer précisément le gap des différentes cellules

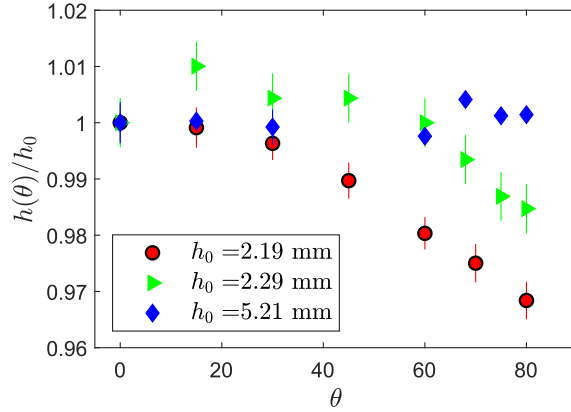


FIGURE 3.1.2 – Évolution du gap  $h(\theta)$  normalisé par  $h_0 = h(\theta = 0)$  en fonction de  $\theta$ . Les points avec un contour noir indiquent que le gap n'a pas été mesuré de la même manière pour la cellule 1.

en fonction de  $\theta$ , nous utilisons le crayon optique CCS évoqué plus tôt (partie 3.1.1). Cela permet de mesurer localement  $h(\theta)$  pour les cellules 2 et 3. Les mesures ont été effectuées le long de l'axe de remontée des bulles. Malheureusement, cette méthode n'est pas applicable à la cellule 1 à cause de la plage de mesure du crayon optique. En effet, afin de déterminer le gap d'une cellule, nous devons mesurer dans un premier temps l'épaisseur de verre  $e_g$  et dans un second temps, en rapprochant le crayon optique, cette même épaisseur à laquelle se rajoute le gap  $e_g + h$ . L'épaisseur du verre de la cellule 1 est trop faible pour le crayon optique, qui n'arrive pas à la mesurer seule (voir tableau 3.1). Nous avons donc utilisé une autre démarche, qui consiste à rajouter un volume d'eau bien connu dans la cellule afin d'en déduire le gap. La figure 3.1.2 montre l'évolution du gap  $h$  des différentes cellules avec l'angle d'inclinaison  $\theta$ . Les points pour la cellule 1 ont un contour noir pour indiquer que la méthode de mesure est différente. On se rend compte que pour les deux cellules avec les plus petits gaps (cellule 1,  $h_0 = h(\theta = 0) = 2.19$  mm et cellule 2,  $h_0 = 2.29$  mm),  $h$  décroît avec  $\theta$  tandis que le gap reste approximativement constant pour la cellule 3, dont le gap  $h_0 = 5.21$  mm est plus grand. Ce phénomène pourrait être dû à la masse de la plaque de verre supérieure qui, sous l'effet de la gravité, change les contraintes appliquées sur la structure qui la maintient. Plus l'angle d'inclinaison est élevé, plus cette modification est importante. Cette effet est notable pour les cellules dont les gaps sont plus petits (cellules 1 et 2) alors que la variation semble être dans les barres d'erreur de la mesure pour le gap le plus grand (cellule 3). En somme, la variation du gap avec l'angle d'inclinaison dépend de beaucoup de paramètres et est donc mesurée pour chaque cellule afin de proprement en tenir compte.

## 3.2 Observations générales

La figure 3.2.1 montre quatre chronophotographies de bulles uniques, dont le diamètre vaut  $d_2 = 22 \pm 1$  mm, remontant dans le mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 140$  mPa.s dans la cellule 1. Chaque chronophotographie correspond à un angle d'inclinaison  $\theta$  différent. Les traits en pointillés représentent la trajectoire du centre de masse de chaque bulle. On

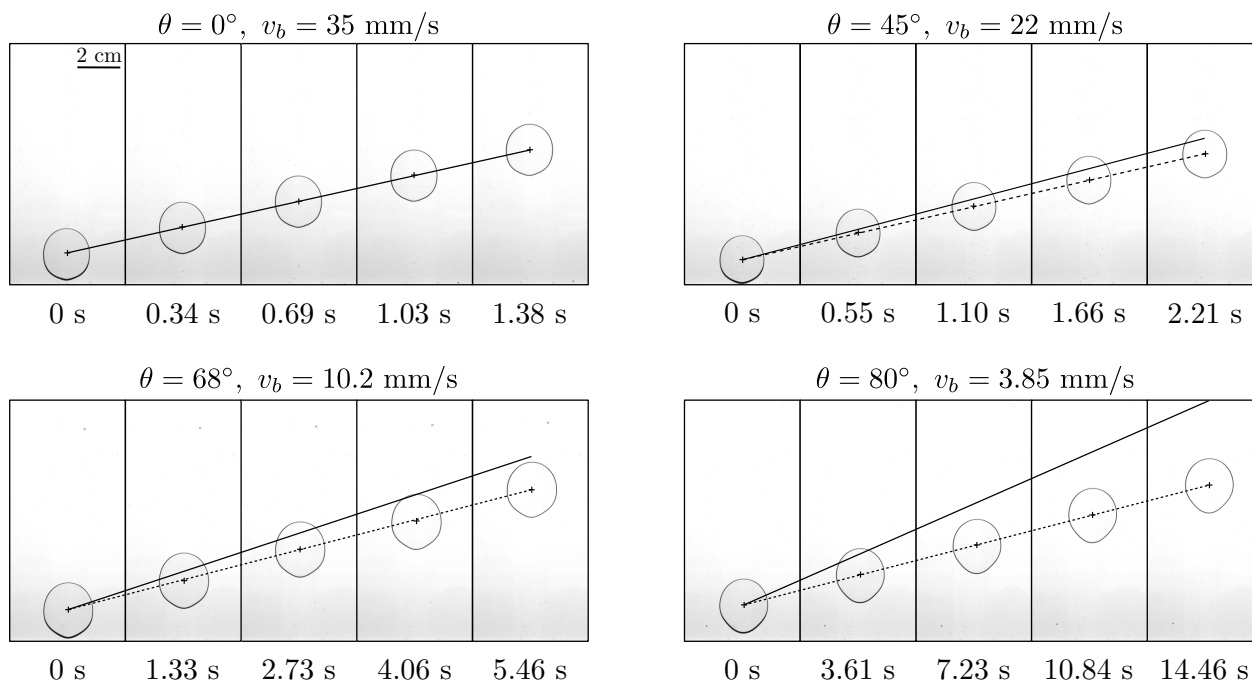


FIGURE 3.2.1 – Chronophotographies de quatre bulles uniques de diamètre  $d_2 = 22 \pm 1$  mm remontant dans la cellule 1 ( $h_0 = 2.19$  mm,  $\eta = 145$  mPa.s). Les pointillés noirs représentent la trajectoire du centre de masse, permettant de calculer la vitesse de la bulle  $v_b$  indiquée au-dessus de chaque panel. Les traits noirs représentent la vitesse de la configuration verticale (donc  $v_b = 35$  mm/s) corrigée par un facteur  $\cos \theta$ , correspondant à un changement de gravité  $g \rightarrow g \cos \theta$ .

remarque que, comme pour la remontée de bulles en configuration verticale, la vitesse et la forme des bulles restent constantes (la condition  $T_b \gg \tau$  est toujours vérifiée,  $\tau \approx 1$  ms, où  $T_b$  est le temps de remontée de la bulle et  $\tau$  le temps théorique nécessaire pour atteindre l'état stationnaire). Le trait plein représente la trajectoire estimée pour la bulle en modifiant la vitesse expérimentale en configuration verticale par un facteur  $\cos \theta$ , correspondant à un changement de gravité  $g \rightarrow g \cos \theta$ . La vitesse des bulles diminue lorsque  $\theta$  augmente, passant de 35 mm/s dans le cas verticale à 3.85 mm/s à  $\theta = 80^\circ$ , diminuant d'un facteur proche de 10. On remarque que cette diminution est beaucoup plus importante que celle prévue par l'équation 1.3.31 car les traits noirs surestiment la vitesse réelle des bulles pour  $\theta \neq 0$ . Ce phénomène est d'autant plus important que l'angle  $\theta$  est important.

### 3.3 Vitesse des bulles

#### 3.3.1 Résultats expérimentaux

La figure 3.3.1(a) montre l'évolution de  $\tilde{v}_b = \langle v_z(t)/v_M(t) \rangle_t$  en fonction de  $d_2/h$  pour différents angles  $\theta$  (cellule 1,  $\eta = 145$  mPa.s). La couleur des symboles indiquent l'angle d'inclinaison et les pointillés noirs verticaux correspondent à  $d_2/h(\theta) = 13$ . Pour un angle donné, on remarque que la vitesse augmente jusqu'à atteindre un palier, que l'on notera

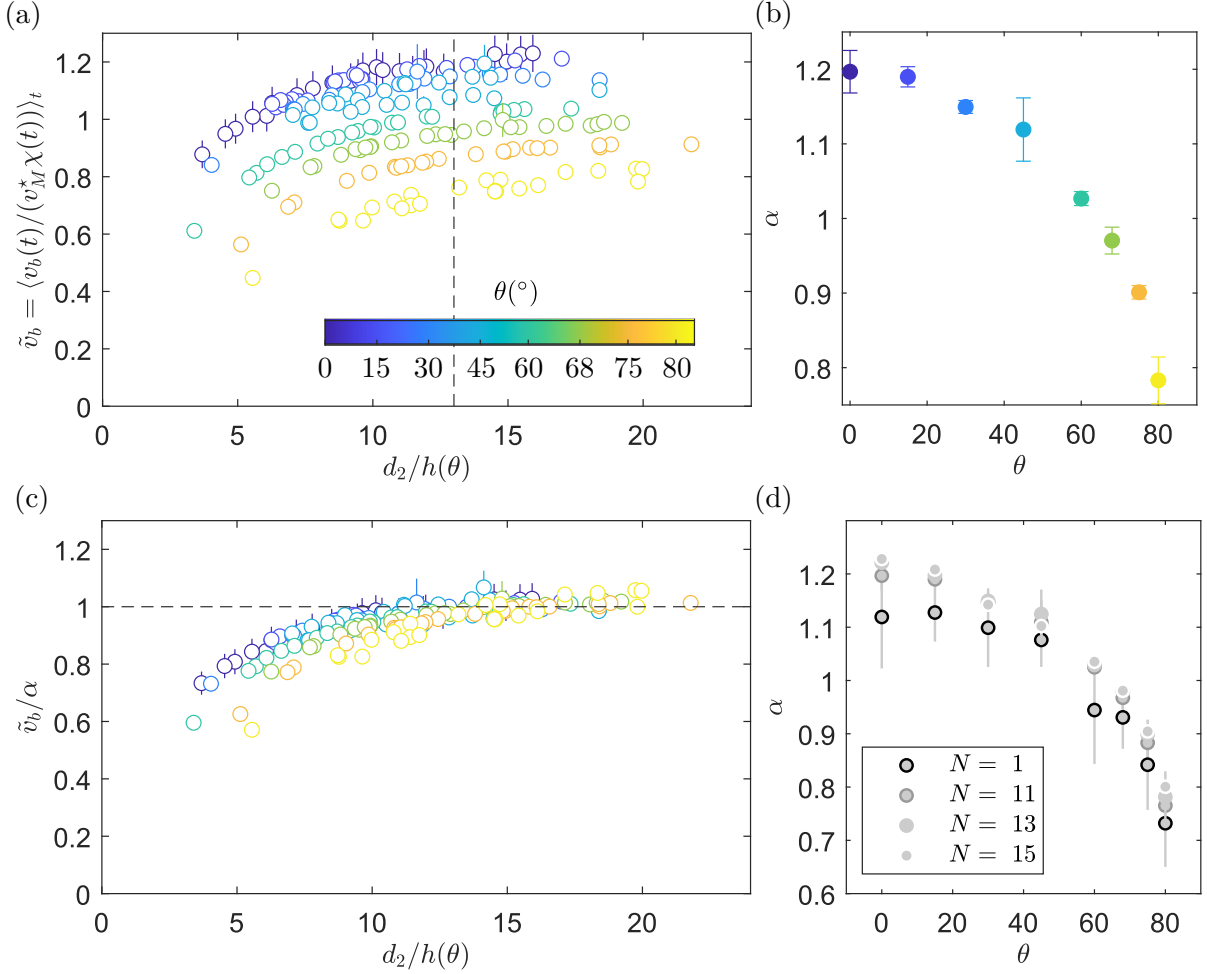


FIGURE 3.3.1 – (a) Évolution de la vitesse normalisée  $\tilde{v}_b = \langle v_z(t)/v_M(t) \rangle_t$  en fonction de  $d_2/h(\theta)$  pour différents angles  $\theta$  (cellule 1,  $h_0 = 2.19$  mm et  $\eta = 145$  mPa.s). La ligne verticale en pointillés noirs indique la valeur  $d_2/h(\theta) = N = 13$ . La couleur d'un point correspond à l'angle d'inclinaison de la cellule avec lequel il a été réalisé. Cette échelle de couleur est aussi utilisée pour (b) et (c). (b) Vitesse normalisée  $\tilde{v}_b$  limite atteinte par les grosses bulles ( $d_2/h(\theta) > N = 13$ ), nommée  $\alpha$  (équation 3.3.1), en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$ . Les barres d'erreur représentent l'écart type des valeurs utilisées pour déterminer  $\alpha$ . (c) Vitesse normalisée  $\tilde{v}_b/\alpha$  en fonction de  $d_2/h(\theta)$  pour différentes angles  $\theta$  (cellule 1,  $h_0 = 2.19$  mm et  $\eta = 145$  mPa.s). La légende est la même que pour la figure (a). (d)  $\alpha$  en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs de  $N$  (voir équation 3.3.1). Les petits points à contour noir correspondent au cas  $N = 1$ . Le contour des points passe du noir, au gris puis au blanc lorsque  $N$  augmente. Les cas  $N = 11, 13$  et  $15$  se superposent aux incertitudes près.

$\alpha(\theta)$ . On définit expérimentalement la valeur du plateau comme étant la moyenne des bulles vérifiant  $d_2/h(\theta) > N$ ,

$$\alpha(\theta) = \langle \tilde{v}_b \rangle_{d_2/h(\theta) > N}, \quad (3.3.1)$$

où, sauf mention contraire,  $N = 13$  est choisi pour tous les angles. L'évolution de la valeur du plateau  $\alpha$  en fonction de  $\theta$  est tracée sur la figure 3.3.1(b) (l'échelle de couleurs est la même



que pour la figure 3.3.1(a)). On voit que  $\alpha$  décroît avec  $\theta$ , induisant une variation de 30 % entre le cas vertical  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 80^\circ$ . La formule de Taylor-Maxworthy (équation 1.3.31), qui implique pour les bulles vérifiant  $d_2/h(\theta) \gg 1$  que  $v_b(\theta) = v_b(\theta = 0) \cos \theta$ , ne capture donc pas correctement l'influence de l'inclinaison de la cellule sur la vitesse limite des bulles les plus grosses (auquel cas  $\alpha$  serait indépendant de  $\theta$ ). On peut aussi noter que l'on ne mesure pas  $\alpha(\theta = 0) = 1$  comme prévu et observé dans le chapitre 2. Cela peut être dû à la mesure particulièrement précise du gap de la cellule et de la viscosité, dont la dépendance en température est mieux prise en compte ici. Sur la figure 3.3.1(c) est tracée  $\tilde{v}_b/\alpha$  en fonction de  $d_2/h$ . Pour chaque angle, la courbe  $\tilde{v}_b/\alpha$  tend vers 1, ce qui signifie que  $\alpha$  correspond bien à la valeur plateau de  $\tilde{v}_b$ . De plus, on remarque que pour  $d_2/h < N = 13$ , les courbes ne se superposent pas. Il apparaît qu'à  $d_2/h$  donné, la valeur de  $\tilde{v}_b/\alpha$  est plus faible lorsque  $\theta$  augmente. Cela signifie que la transition de  $\tilde{v}_b$  vers sa valeur maximale semble plus lente pour les angles  $\theta$  élevés. Malheureusement, une étude quantitative de ce phénomène n'est pas possible car la quantité de données expérimentales pour  $d_2/h < N$  n'est pas suffisante. Afin de vérifier que la figure 3.3.1(b) ne dépend pas de la valeur de  $N$  choisie, nous traçons sur la figure 3.3.1(d)  $\alpha$  en fonction de  $\theta$  pour  $N = 1$  (contour noir),  $N = 11$  (contour gris foncé),  $N = 13$  (contour gris clair) et  $N = 15$  (contour blanc). Sans surprise, en plus d'avoir des barres d'erreur grandes, nous remarquons que pour le cas  $N = 1$ , nous avons des valeurs inférieures aux cas  $N = 11, 13$  et  $15$  qui se superposent relativement bien. On en déduit que la valeur obtenue de  $\alpha$  est bien indépendante de  $N$  tant que celui-ci est assez grand et la valeur  $N = 13$  est retenue dans cette étude.

Afin de mieux comprendre les paramètres influençant la décroissance de  $\alpha$  avec  $\theta$ , nous avons fait des expériences avec plusieurs viscosités et plusieurs cellules. Cependant, nous avons remarqué que la valeur de  $\alpha_0 = \alpha(\theta = 0)$  dépend des expériences (voir tableau 3.1), sans pour autant en comprendre la raison. Afin de s'abstraire de ce problème, une série d'expériences donnée (c'est-à-dire la variation de l'angle  $\theta$  pour une cellule et un liquide donné) est réalisée en une seule journée et sans interagir avec le montage expérimental. Dans la suite, nous regarderons donc le rapport  $\alpha/\alpha_0$  plutôt que  $\alpha$  afin que les différentes séries d'expériences soient comparables. La figure 3.3.2(a) montre l'évolution de  $\alpha/\alpha_0$  avec  $\theta$  dans la cellule 1 ( $h_0 = 2.19$  mm) pour deux viscosités différentes. On voit que les points se superposent pour les deux viscosités, suggérant ainsi que la variation de la vitesse limite des grosses bulles avec l'angle d'inclinaison  $\theta$  est indépendante de la viscosité. Il faut néanmoins garder en tête que seules deux viscosités sont étudiées dans ce manuscrit. La figure 3.3.2(b) compare la courbe  $\alpha(\theta)/\alpha_0$  pour les trois cellules utilisées dans cette étude. On remarque cette fois-ci une forte dépendance par rapport au gap. Plus le gap est élevé, plus la décroissance de  $\alpha$  avec  $\theta$  est faible.

### 3.3.2 Modèle phénoménologique

La vitesse théorique de Taylor-Maxworthy (équation 1.3.31) sous-estime l'impact de l'angle d'inclinaison  $\theta$  sur la vitesse des bulles. Il manque donc un (ou des) terme(s) de dissipation dans le bilan égalant la puissance injectée par la poussée d'Archimède  $\mathcal{P}_b = \rho g \cos \theta (\pi a b h) v_b / 4$  et la puissance dissipée par les frottements visqueux dans la cellule  $\mathcal{P}_V = 3\eta v_b^2 \pi b^2 / h$  qui permet d'établir ce résultat (voir partie 1.3.1). À noter que dans le chapitre précédent (partie 2.4), nous avons utilisé une approche similaire pour prendre en compte les

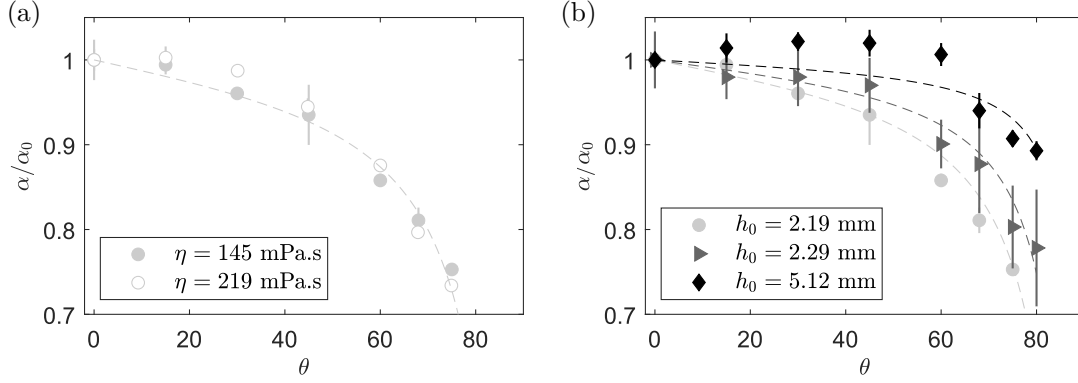


FIGURE 3.3.2 – Évolution de la valeur plateau  $\alpha$  normalisée par  $\alpha(\theta = 0) = \alpha_0$  en fonction de  $\theta$  (a) pour deux viscosités différentes dans la cellule 1 ( $h_0 = 2.19$  mm) et (b) pour trois cellules de gaps différents. Les pointillés représentent la relation  $1 - \kappa \tan \theta$  (voir équation 3.3.3) où  $\kappa$  est obtenu en effectuant un ajustement sur les points expérimentaux. On obtient  $\kappa = (6.5 \pm 0.5) \times 10^{-3}$ ,  $(4.5 \pm 1.5) \times 10^{-3}$  et  $(1.9 \pm 0.4) \times 10^{-3}$  pour les cellules 1, 2 et 3 respectivement, suggérant une décroissance de  $\kappa$  avec  $h$ .

effets inertiels (qui sont négligeables ici étant donné que nous sommes dans le régime visqueux). Afin d'essayer de trouver la source de la dissipation supplémentaire due à l'inclinaison de la cellule, on s'appuie sur une analogie entre la remontée d'une bulle et la descente d'un bloc le long d'un plan (voir figure 3.3.3). La puissance dissipée par frottement  $\mathcal{P}_f$  s'écrit alors comme étant proportionnelle à la vitesse de la bulle  $v_b$  et la force perpendiculaire aux plaques, ce qui donne  $\mathcal{P}_f = \kappa(\rho g \sin \theta \pi a b h) v_b / 4$  où  $\kappa$  est une constante sans dimension pouvant être interprétée comme un coefficient de frottement solide. En ajoutant ce terme, on obtient donc

$$\rho g \cos \theta (\pi a b h) v_b = \frac{12 \eta v_b^2 \pi b^2}{h} + \kappa \rho g \sin \theta (\pi a b h) v_b, \quad (3.3.2)$$

ce qui amène à

$$v_b = v_M (1 - \kappa \tan \theta) \Leftrightarrow \alpha(\theta) = 1 - \kappa \tan \theta. \quad (3.3.3)$$

Ce modèle est en bon accord avec les données expérimentales (voir figure 3.3.2(b), où les pointillés correspondent au meilleur ajustement de cette formule pour chaque courbe). On trouve  $\kappa = (6.5 \pm 0.5) \times 10^{-3}$ ,  $(4.5 \pm 1.5) \times 10^{-3}$  et  $(1.9 \pm 0.4) \times 10^{-3}$  pour les cellules 1, 2 et 3 respectivement, suggérant une décroissance de  $\kappa$  avec  $h$ . Il est intéressant de noter que ce modèle implique l'existence d'un angle critique  $\theta_c = \arctan(1/\kappa)$  à partir duquel une bulle ne remonte plus. Malheureusement, l'angle limite étant proche de  $90^\circ$  pour les trois cellules ( $\theta_c > 89^\circ$ ), ce résultat n'est pas vérifiable expérimentalement.

### 3.3.3 Discussion autour de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible s'écrit

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad (3.3.4)$$

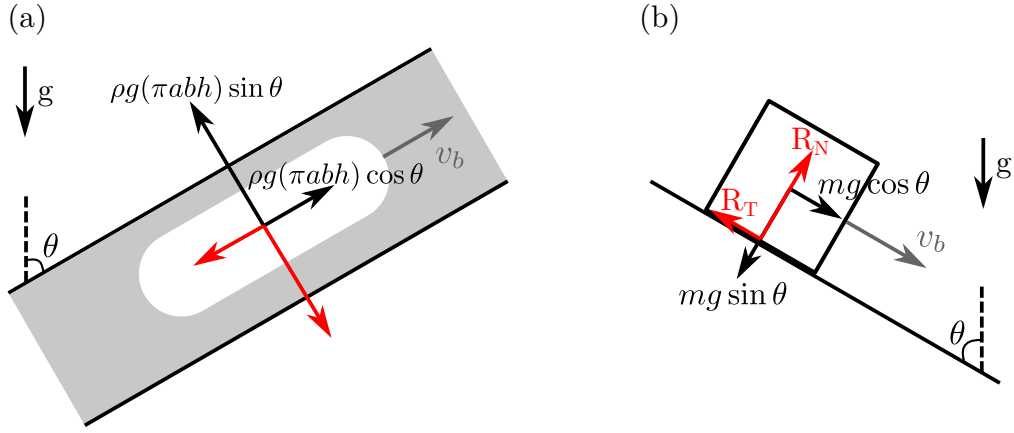


FIGURE 3.3.3 – Schéma de l’analogie entre (a) la remontée d’une bulle et (b) la descente d’un bloc solide le long d’une pente. Les flèches noires représentent la force de flottabilité sur la figure (a) et de gravité sur la figure (b). Les flèches rouges correspondent aux forces appliquées par l’environnement et les flèches grises à la vitesse du système étudiée (bulle (a) et bloc solide (b)).

où  $\vec{v}$  est la vitesse du fluide et  $P$  la pression. En se basant sur la figure 3.3.4(a), on introduit  $\Pi(r, \Phi, y) = P(r, \phi, y) + \rho g r \cos \theta \sin \Phi + \rho g y \sin \theta$  le champ de pression prenant en compte la pression hydrostatique. L’équation de Navier-Stokes en régime visqueux ( $Re_{2h} \ll 1$ ) se réécrit donc

$$\vec{\nabla} \Pi = \eta \nabla^2 \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Pi = \eta \vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{v}, \quad (3.3.5)$$

ce qui correspond à un bilan de puissance entre celle qui est injectée par le poussée d’Archimède  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Pi$  et celle qui est dissipée par frottements visqueux  $\eta \vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{v}$ . On normalise l’axe  $r$  par  $d_2$ , l’axe  $y$  par  $h$ , la vitesse radiale  $\tilde{v}_r$  par  $v_b$  et la vitesse  $v_y$  par  $v_b h / d_2$  (voir partie 1.3). On note  $\vec{\tilde{v}} = \tilde{v}_r \vec{e}_r + \tilde{v}_\Phi \vec{e}_\Phi + (h/d_2) \tilde{v}_y \vec{e}_y$  la vitesse adimensionnée définie par  $\vec{v} = v_b \vec{\tilde{v}}$  et  $\tilde{\Pi} = (\eta v_b d_2 / h^2) \Pi$  la pression adimensionnée. Les grandeurs adimensionnées sont notées avec un tilde ( $\sim$ ). L’équation de Navier-Stokes mène à

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}(\Pi \vec{v}) = \frac{\eta v_b^2}{h^2} \left( \frac{\partial(\tilde{\Pi} \tilde{v}_r)}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{\Pi} \tilde{v}_\Phi)}{\partial \Phi} + \frac{\partial(\tilde{\Pi} \tilde{v}_y)}{\partial \tilde{y}} \right), \\ \eta \vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{v} = \frac{\eta v_b^2}{h^2} \tilde{v}_r \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{y}^2} + \left( \frac{h}{d_2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \Phi^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}_\Phi}{\partial \Phi} - \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}^2} \right) \right) \\ \quad + \frac{\eta v_b^2}{h^2} \tilde{v}_\Phi \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\Phi}{\partial \tilde{y}^2} + \left( \frac{h}{d_2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\Phi}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\Phi}{\partial \Phi^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}_\Phi}{\partial \tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \Phi} - \frac{\tilde{v}_\Phi}{\tilde{r}^2} \right) \right) \\ \quad + \frac{\eta v_b^2}{h^2} \tilde{v}_y \left( \left( \frac{h}{d_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}^2} + \left( \frac{h}{d_2} \right)^4 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \Phi^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{r}} \right) \right). \end{array} \right. \quad (3.3.6)$$

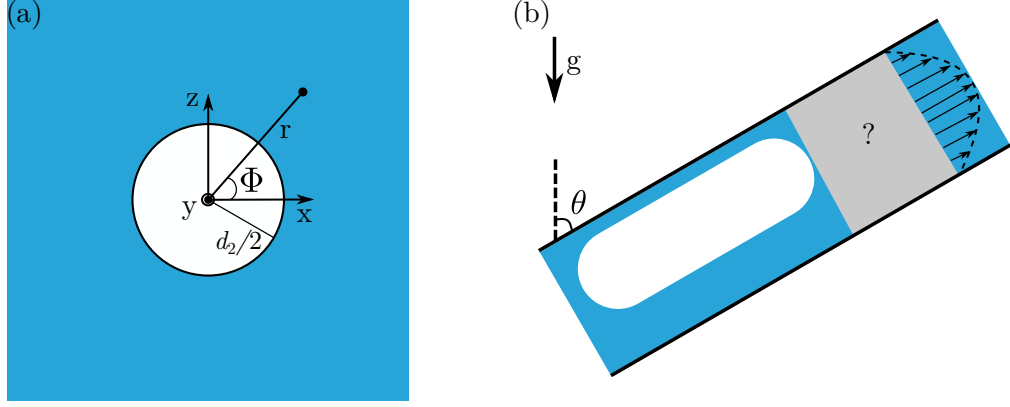


FIGURE 3.3.4 – (a) Schéma d'une bulle unique dans le plan  $xz$ . (b) Schéma d'une bulle unique dans le plan  $yz$ . Les flèches noires représentent le champ de vitesse loin de la bulle. La zone grise symbolise le fait qu'on ne connait pas l'écoulement entre la bulle qui est décentrée et le liquide loin de celle-ci.

On se place dans la limite des bulles infiniment grosses  $d_2 \gg h$  et on intègre l'équation de Navier-Stokes sur le volume  $\mathcal{V}$  de liquide en dehors de la bulle :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial(\tilde{\Pi}\tilde{v}_r)}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{\Pi}\tilde{v}_\Phi)}{\partial\Phi} + \frac{\partial(\tilde{\Pi}\tilde{v}_y)}{\partial\tilde{y}} \right) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \left( \tilde{v}_r \frac{\partial^2\tilde{v}_r}{\partial\tilde{y}^2} + \tilde{v}_\Phi \frac{\partial^2\tilde{v}_\Phi}{\partial\tilde{y}^2} \right) d\mathcal{V} + \mathcal{O}\left(\frac{h}{d_2}\right)^2, \quad (3.3.7)$$

qui peut être réécrit en introduisant  $\vec{v}^i = \tilde{v}_r\vec{e}_r + \tilde{v}_\Phi\vec{e}_\Phi + \tilde{v}_y\vec{e}_y$ ,

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \left[ \left( \tilde{P} + \frac{\rho gh^2}{\eta v_b} \tilde{r} \cos\theta \sin\Phi \right) \vec{v}^i \right] + \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\rho gh^2}{\eta v_b} \frac{h}{d_2} \tilde{y} \sin\theta \vec{v}^i \right) d\mathcal{V} \\ = \iiint_{\mathcal{V}} \left( \tilde{v}_r \frac{\partial^2\tilde{v}_r}{\partial\tilde{y}^2} + \tilde{v}_\Phi \frac{\partial^2\tilde{v}_\Phi}{\partial\tilde{y}^2} \right) d\mathcal{V} + \mathcal{O}\left(\frac{h}{d_2}\right)^2, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

où l'on a explicité  $\tilde{\Pi}$ . On applique ensuite le théorème de Green-Ostrogradski sur le premier terme de gauche et on intègre par partie le terme de droite en utilisant le fait que  $\vec{v}^i \rightarrow 0$  pour  $r \rightarrow +\infty$ , ce qui amène à

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}_b} \tilde{P}_0 \vec{v}^i \cdot d\vec{\mathcal{S}}_b + \frac{\rho gh^2}{\eta v_b} \cos\theta \left( \iint_{\mathcal{S}_b} \tilde{r} \sin\Phi \vec{v}^i \cdot d\vec{\mathcal{S}}_b + \frac{h}{d_2} \tan\theta \iint_{\mathcal{S}_b} (\tilde{y} \vec{v}^i) \cdot d\vec{\mathcal{S}}_b \right) \\ = \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \left( \frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial\tilde{y}} \right)^2 + \left( \frac{\partial\tilde{v}_\Phi}{\partial\tilde{y}} \right)^2 \right] d\mathcal{V} + \mathcal{O}\left(\frac{h}{d_2}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

où le premier terme correspond au travail de la pression de la bulle, le second terme au travail dû à la portance et le terme de droite à la dissipation visqueuse du champ de vitesse généré par le mouvement de la bulle.

Dans le cas  $\theta = 0$ , on a vu dans la partie 1.3.1 que le champ de vitesse était donné par l'équation 1.3.21. En la ré-injectant dans l'équation 3.3.9, on retombe sur

$$v_b = \frac{\rho gh^2}{12\eta}.$$

Dans le cas  $\theta \neq 0$ , un terme supplémentaire se rajoute sous la forme  $\iint_{S_b} (\tilde{y}\tilde{v}^i) \cdot d\vec{S}_b$  qui est nul si jamais l'écoulement est symétrique par rapport à  $y$ . L'écoulement loin de la bulle est effectivement symétrique car le champ de vitesse donné par l'équation 1.3.21 est aussi valable dans le cas d'une cellule inclinée. En effet, nous n'avons pas eu besoin de supposer la forme du champ de pression pour établir l'équation 1.3.21. Néanmoins, nous verrons (partie 3.5) que la bulle n'est pas disposée au centre de la cellule mais légèrement vers le haut, ce qui implique qu'il y a forcément une zone proche de la bulle où l'écoulement n'est pas symétrique (voir figure 3.3.4(b)), ce qui amène  $\iint_{S_b} (\tilde{y}\tilde{v}^i) \cdot d\vec{S}_b \neq 0$ . Le terme de dissipation supplémentaire viendrait donc d'un raccordement entre un écoulement non symétrique au niveau de la frontière de la bulle et un écoulement symétrique loin de celle-ci.

### Résumé de la partie

Nous nous sommes concentrés dans cette partie sur la vitesse de remontée des bulles dans une cellule de Hele-Shaw inclinée. Théoriquement, Taylor et Saffman (1959) et Maxworthy (1986) ont établi que les bulles infiniment grosses ( $d_2 \gg h$ ) remontent à la vitesse

$$v_b = v_M = \frac{\rho g h^2 a}{12\eta b} \cos \theta = v(\theta = 0) \cos \theta.$$

Nous avons donc regardé l'évolution de la vitesse des bulles normalisée par cette vitesse théorique  $\tilde{v}_b = \langle v_z / v_M \rangle_t$  avec l'angle d'inclinaison  $\theta$ , ce qui nous a permis de découvrir que la valeur du plateau atteint par  $\tilde{v}_b$  pour  $d_2 \gg h$ , nommée  $\alpha$ , est une fonction décroissante de  $\theta$ . Ce phénomène est indépendant de la viscosité du fluide mais dépend du gap de la cellule. La formule de Taylor-Maxworthy ne capture donc pas correctement l'impact de l'angle d'inclinaison de la cellule sur la vitesse de remontée des bulles. À l'aide d'une analogie entre la remontée d'une bulle et la descente d'un bloc le long d'une pente, nous avons établi un modèle qui amène à

$$\alpha(\theta) = 1 - \kappa \tan \theta$$

qui ajuste bien les données expérimentales. Nous avons pu voir que  $\kappa$  ne dépend pas de la viscosité du fluide  $\eta$  mais dépend fortement du gap de la cellule  $h$ . Autrement dit, la vitesse de remontée d'une bulle en régime visqueux dans une cellule de Hele-Shaw inclinée s'écrit

$$\begin{aligned} v_b &= \frac{\rho g h^2 a}{12\eta b} \cos \theta (1 - \kappa(h) \tan \theta) \\ &= v(\theta = 0) \cos \theta (1 - \kappa(h) \tan \theta). \end{aligned}$$

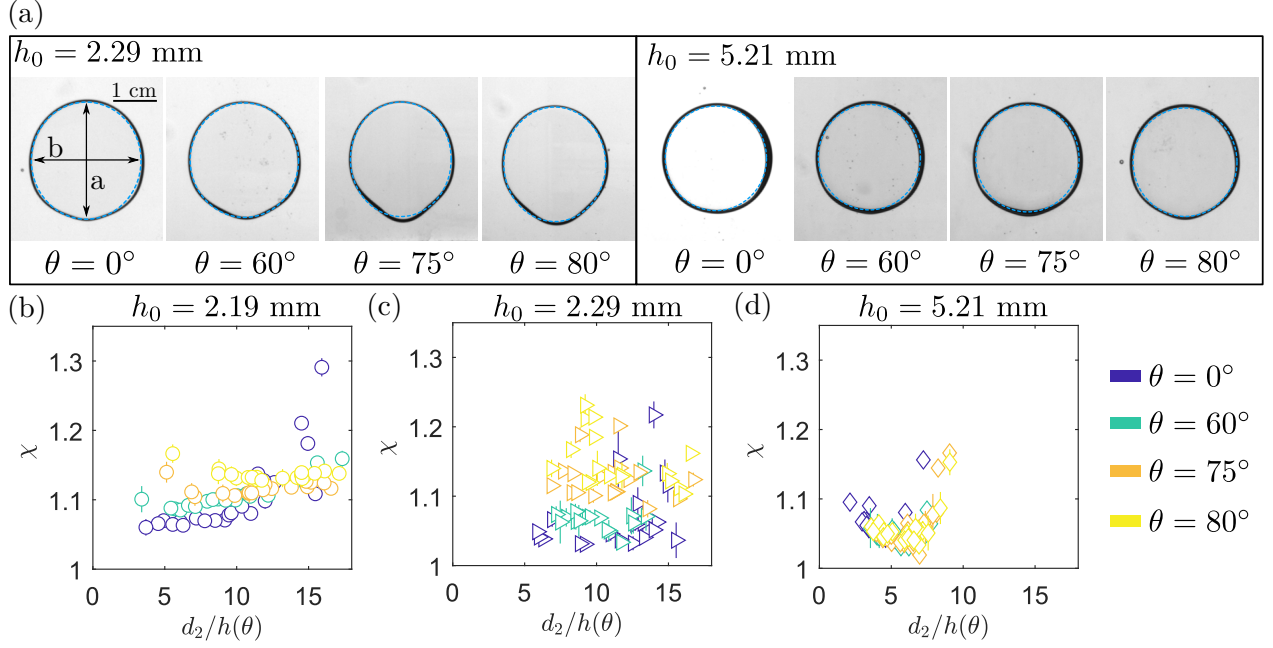


FIGURE 3.4.1 – (a) Photographies de bulles de diamètre  $d_2/h(\theta) = 25 \pm 1$  mm pour les angles  $\theta = \{0, 60, 75, 80\}^\circ$  dans les cellules 2 ( $h_0 = 2.29$  mm,  $\eta = 145$  mPa.s) et 3 ( $h_0 = 5.21$  mm,  $\eta = 580$  mPa.s). (b-d) Évolution du rapport d’aspect  $\chi = \langle a/b \rangle_t$  en fonction du diamètre normalisé  $d_2/h(\theta)$  pour  $\theta = \{0, 60, 75, 80\}^\circ$  dans les cellules 1 (b), 2 (c) et 3 (d).

### 3.4 Rapport d’aspect des bulles

On s’intéresse dans cette partie à la forme des bulles dans le plan de la cellule ( $xz$ , voir figure 3.1.1), tout comme nous nous y sommes intéressés dans le chapitre précédent. La figure 3.4.1(a) montre des images de bulles de diamètre  $d_2 = 25 \pm 1$  mm dans les cellules 1 et 3 pour les angles d’inclinaison  $\theta = \{0, 60, 75, 80\}^\circ$ . Toutes les images sont à la même échelle. La ligne en pointillés bleus représente l’ellipse équivalente obtenue par détection numérique du contour de la bulle. On remarque que pour la cellule de plus petit gap, une déformation de l’arrière de la bulle semblable à un bourrelet apparaît lorsque l’angle augmente, éloignant la forme de celle-ci de celle d’une ellipse. La modélisation par une ellipse reste cependant très bonne comme on peut le voir sur les images, les pointillés bleus suivant de près le contour réel de la bulle. Pour la cellule 3, dont le gap est plus élevé, on ne voit pas de déformation notable de la bulle lorsque l’angle d’inclinaison  $\theta$  varie. Les figures 3.4.1(b-d) montre l’évolution du rapport d’aspect  $\chi = \langle a/b \rangle_t$  en fonction du diamètre normalisé des bulles  $d_2/h(\theta)$  pour les trois cellules à  $\theta = \{0, 60, 75, 80\}^\circ$ . Pour toutes les cellules, à un angle donné, le rapport d’aspect est approximativement constant avec la taille de la bulle tant que  $d_2/h(\theta) < 15$ , prolongeant ainsi les résultats observés dans le cas  $\theta = 0^\circ$  à tous les angles. On voit aussi que, pour les deux cellules avec les plus petits gaps (figure 3.4.1(b), cellule 1,  $h_0 = 2.19$  mm et figure 3.4.1(c), cellule 2,  $h_0 = 2.29$  mm), le rapport d’aspect est plus élevé lorsque l’angle est plus élevé, augmentant de  $\chi \approx 1.05$  pour  $\theta = 0^\circ$  à  $\chi \approx 1.15$  pour  $\theta = 80^\circ$ . Pour la cellule 3, dont le gap est plus grand ( $h_0 = 5.21$  mm), on voit sur la figure 3.4.1(d) que le rapport d’aspect ne change pas avec l’angle d’inclinaison  $\theta$ . L’augmentation du rapport

d'aspect pour les cellules de plus petit gap retranscrit l'apparition du bourrelet à l'arrière de la bulle. Outre ce phénomène, nous remarquons que l'angle d'inclinaison  $\theta$  n'influence pas de manière significative la forme des bulles dans le plan de la cellule ( $xz$ ).

### Résumé de la partie

La forme des bulles dans le plan de la cellule de Hele-Shaw varie très légèrement pour les gaps les plus petits ( $h_0 = 2.19$  mm et  $h_0 = 2.29$  mm) avec l'apparition d'un bourrelet à l'arrière de la bulle, dont la taille augmente avec l'angle. Cela implique une augmentation du rapport d'aspect avec  $\theta$ , qui est approximativement constant à  $\theta$  fixé. Pour la cellule 3, dont le gap est plus grand ( $h_0 = 5.21$  mm), le rapport d'aspect est inchangé lorsque l'on varie l'inclinaison de la cellule.

## 3.5 Étude dans le plan du gap

### 3.5.1 Couches de lubrification

Jusqu'ici, nous avons uniquement regardé la forme des bulles dans le plan de la cellule ( $xz$ ). Le but de cette partie est de compléter la caractérisation de la forme des bulles en s'intéressant cette fois-ci au plan du gap ( $yz$ ), qui est perpendiculaire à celui de la cellule. Pour cela, nous mesurons les couches de lubrification à l'aide d'un crayon optique Chromatic Confocal Sensing (CCS) placé en-dessous ou au-dessus de la cellule (voir figure 3.1.1(a) et partie 3.1.1). Le crayon optique étant immobile dans le référentiel du laboratoire, il est donc en translation rectiligne uniforme dans le référentiel de la bulle. Il mesure à un instant  $t_0$  uniquement l'épaisseur du verre de la cellule puis à un instant  $t_1 > t_0$ , il mesure l'épaisseur du verre et de la couche de lubrification (voir figure 3.5.1(a)). Afin d'obtenir uniquement l'épaisseur de la couche de lubrification, on soustrait l'épaisseur du verre à l'épaisseur totale mesurée. Un exemple des signaux ainsi obtenus pour des bulles de diamètre  $d_2 = 22 \pm 1$  mm dans la cellule 2 avec  $\theta = 80^\circ$  est donné figure 3.5.1(b) en fonction du temps  $t$  et de  $z - z_b$ , où  $z_b$  correspond à la coordonnée  $z$  du centre de masse de la bulle. La ligne noire (resp. rouge) correspond aux données obtenues avec le crayon optique au-dessus (resp. en dessous) de la bulle. Au niveau des bords de la bulle ( $|z - z_b| \approx 11$  mm =  $d_2/2$ ), le signal devient bruité à cause de la courbure de l'interface air-liquide. En dehors de ces régions, le signal du crayon est approximativement constant à un bruit électronique près. Nous pouvons donc mesurer séparément (car nous ne disposons que d'un seul crayon optique) les couches de lubrification supérieure et inférieure en fonction des différents paramètres expérimentaux. Comme la valeur de la couche de lubrification est constante tout du long de la bulle, nous notons  $\delta_t$  (resp.  $\delta_b$ ) la valeur moyenne de la couche de lubrification supérieure (resp. inférieure) sur tout le long de la bulle sans prendre en compte le signal près du bord qui est bruité (par exemple pour  $|z - z_b| < 6$  mm pour la figure 3.5.1(b)).

Dans la partie 1.3.3, nous avons vu que Park et Homsy (1984) ont établi qu'en théorie, les couches de lubrification suivent la loi  $\delta_b/h(\theta) = \delta_t/h(\theta) = 1.337 \text{ Ca}^{2/3}$  pour  $\text{Ca} = v_b \eta / \gamma \ll 1$



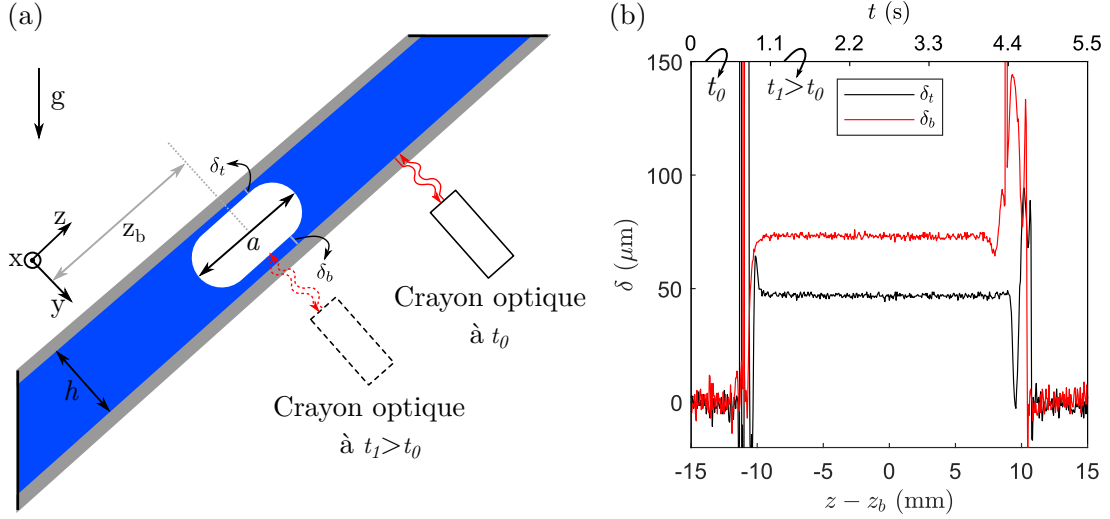


FIGURE 3.5.1 – **(a)** Schéma dans le référentiel de la bulle dans le plan  $yz$ . Le crayon optique (ici représenté en dessous de la cellule), fixe dans le référentiel du laboratoire, mesure dans un premier temps  $t_0$  l'épaisseur du verre et dans un second temps  $t_1 > t_0$ , lorsqu'il fait face à la bulle, l'épaisseur du verre et de la couche de lubrification.  $\delta_t$  et  $\delta_b$  représentent respectivement les couches de lubrification moyenne supérieure et inférieure. **(b)** Exemples de signaux obtenus avec le crayon optique pour  $\delta_b$  et  $\delta_t$  en fonction du temps  $t$  et de  $z - z_b$  où  $z_b$  est la coordonnée  $z$  du centre de masse de la bulle. Les signaux présentés ici sont obtenus pour deux bulles de diamètre identique  $d_2 = 22 \pm 1$  mm dans la cellule 2 avec  $\theta = 80^\circ$  en soustrayant la valeur de l'épaisseur de verre.

dans le cas où un écoulement est imposé dans une cellule de Hele-Shaw horizontale. Ce résultat a été étendu empiriquement par Gaillard et al. (2021) à tout nombre capillaire sous la forme

$$\frac{\delta_t}{h(\theta)} = \frac{\delta_b}{h(\theta)} = \frac{c_1 \text{Ca}^{2/3}}{1 + c_1 c_2 \text{Ca}^{2/3}},$$

où les constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont déterminées à l'aide de données expérimentales (on retrouve  $\delta_b/h(\theta) = \delta_t/h(\theta) = 1.337 \text{Ca}^{2/3}$  pour  $\text{Ca} \ll 1$  et  $c_1 = 1.337$ ). Malgré le fait que nous ne sommes pas dans un cadre où un écoulement est imposé dans la cellule de Hele-Shaw, au vu de ces résultats, nous représentons sur les figures 3.5.2(a-c) l'évolution de  $\delta_t/h(\theta)$  en fonction du nombre capillaire  $\text{Ca} = v_b \eta / \gamma$  pour les cellules 1, 2 et 3. Pour chaque cellule, on remarque que la couche de lubrification supérieure normalisée  $\delta_t/h(\theta)$  semble être proportionnelle à  $\text{Ca}^{2/3}$ . Cependant, les valeurs de  $\delta_t/h(\theta)$  ne sont pas comparables d'une cellule à l'autre, ce qui signifie que le préfacteur devant  $\text{Ca}^{2/3}$  est très dépendant de la cellule. Cela se remarque tout particulièrement entre la cellule 1 ( $h_0 = 2.19$  mm) et la cellule 2 ( $h_0 = 2.29$  mm) qui ont des gaps très proches et une plage de  $\text{Ca}$  similaire ( $10^{-2} < \text{Ca} < 10^{-1}$ ) mais des valeurs de  $\delta_t/h(\theta)$  qui diffèrent d'un facteur plus de 2. Cette différence peut provenir de la différence de conception entre les deux cellules (voir partie 3.1.2). Le tableau 3.2 présente les différentes valeurs de  $c_1$  obtenues par ajustement des points expérimentaux, où  $c_1$  est défini par  $\delta_t/h(\theta) = c_1 \text{Ca}^{2/3}$ . On rappelle que les travaux de cette thèse sont effectués avec des bulles remontant dans un liquide initialement au repos, contrairement à la théorie proposée



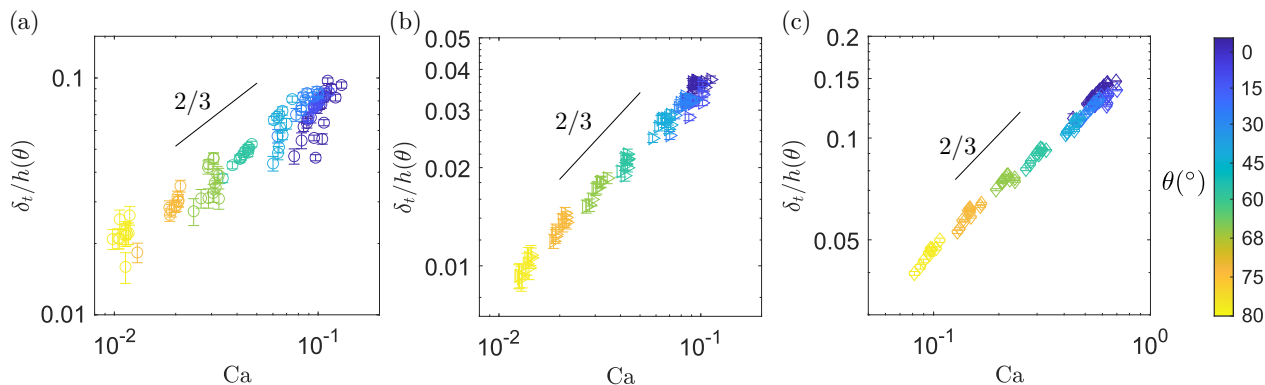


FIGURE 3.5.2 – Évolution de la couche de lubrification supérieure normalisée  $\delta_t/h(\theta)$  en fonction du nombre capillaire  $Ca = v_b\eta/\gamma$  pour différents angles d’inclinaison  $\theta$  pour (a) la cellule 1 ( $h_0 = 2.19$  mm), (b) la cellule 2 ( $h_0 = 2.29$  mm) et (c) la cellule 3 ( $h_0 = 5.21$  mm). L’échelle de couleur représente l’angle d’inclinaison  $\theta$  de la cellule.

par [Park et Homsy \(1984\)](#) et aux expériences réalisées par [Gaillard et al. \(2021\)](#) qui se déroulent avec un écoulement imposé. Cela peut expliquer la différence d’ordre de grandeur entre les résultats de la littérature et ceux de cette thèse. On remarque de plus que les valeurs de  $c_1$  pour les cellules 2 et 3, qui sont conçues de la même manière en dehors de la valeur du gap (voir partie 3.1.1), sont proches. Cependant, il y a un facteur 2 avec la valeur de  $c_1$  pour la cellule 1. Au vue de ces résultats, on ne peut donc pas conclure un résultat général de la forme  $\delta_t/h(\theta) = c_1Ca^{2/3}$  où  $c_1$  serait une constante universelle convenant à toutes les configurations expérimentales.

Pas d’écoulement imposé			Écoulement imposé	
Cette étude			Travaux précédents	
cellule 1	cellule 2	cellule 3	<a href="#">Park et Homsy (1984)</a>	<a href="#">Gaillard et al. (2021)</a>
$0.38 \pm 0.02$	$0.16 \pm 0.01$	$0.19 \pm 0.01$	1.337 (théorique)	1.29 (expérimental)

TABLE 3.2 – Les différentes valeurs de  $c_1$  obtenues pour l’ajustement  $\delta_t/h(\theta) = c_1Ca^{2/3}$  dans une cellule de Hele-Shaw. Les travaux de cette thèse sont effectués avec des bulles remontant dans un liquide initialement au repos, contrairement à la théorie proposée par [Park et Homsy \(1984\)](#) et aux expériences réalisées par [Gaillard et al. \(2021\)](#) qui se déroulent avec un écoulement imposé.

Les figures 3.5.3(a-c) représentent l’évolution de la couche de lubrification inférieure normalisée  $\delta_b/h(\theta)$  en fonction du nombre capillaire  $Ca = v_b\eta/\gamma$  pour les cellules 1, 2 et 3. Contrairement à ce que l’on vient d’observer pour la couche de lubrification supérieure, il apparaît que  $\delta_b/h(\theta)$  ne suit pas de loi d’échelle en  $Ca^{2/3}$ . Dans les cellules 1 et 3 tout particulièrement, les points ne s’alignent pas sur une tendance particulière en fonction du nombre capillaire. Il est cependant intéressant de souligner le fait que dans la cellule 3, pour chaque angle individuellement,  $\delta_b/h(\theta)$  est proportionnelle à  $Ca^{2/3}$ , le rapport de proportionnalité dépendant très fortement de l’angle. Comme il est complexe de conclure d’un quelconque lien

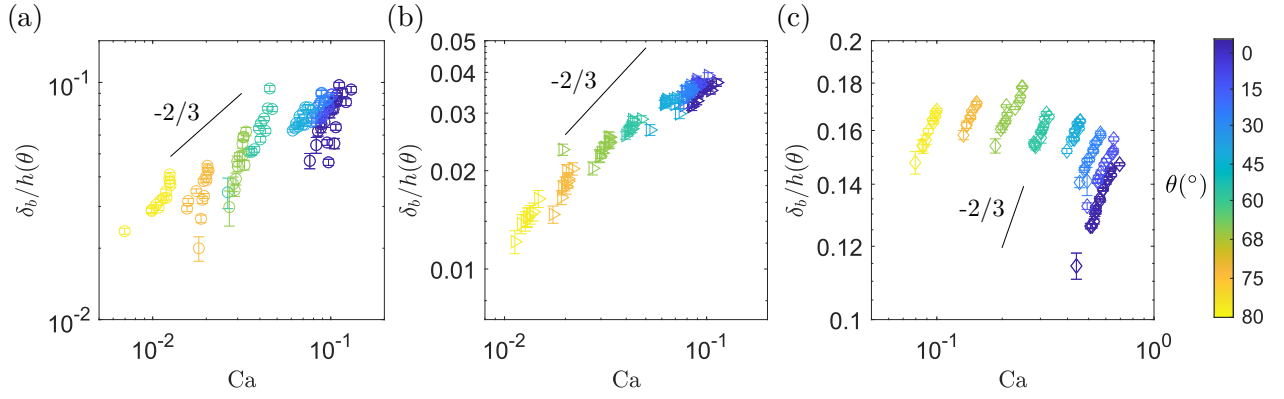


FIGURE 3.5.3 – Évolution de la couche de lubrification inférieure normalisée  $\delta_b/h(\theta)$  en fonction du nombre capillaire  $Ca = v_b\eta/\gamma$  pour différents angles d’inclinaison  $\theta$  pour (a) la cellule 1 ( $h_0 = 2.19$  mm), (b) la cellule 2 ( $h_0 = 2.29$  mm) et (c) la cellule 3 ( $h_0 = 5.21$  mm). L’échelle de couleur représente l’angle d’inclinaison  $\theta$  de la cellule.

entre la couche de la lubrification inférieure normalisée  $\delta_b/h(\theta)$  et le nombre capillaire  $Ca$ , nous nous intéressons à la comparaison entre les deux couches de lubrification normalisées  $\delta_b/h(\theta)$  et  $\delta_t/h(\theta)$  car nous avons vu que la couche supérieure normalisée  $\delta_t/h(\theta)$  est bien caractérisée par le nombre capillaire.

La figure 3.5.4(a) montre l’évolution de l’importance relative des couches de lubrification supérieure et inférieure  $\delta_{t,b}/(\delta_t + \delta_b)$  en fonction de  $\theta$  pour une bulle de diamètre  $d_2 = 22 \pm 1$  mm ( $\blacktriangleright$ ) et une autre de diamètre  $d_2 = 33 \pm 1$  mm ( $\blacktriangleright$ ) dans la cellule 2. Les symboles pleins correspondent à  $\delta_b/(\delta_t + \delta_b)$  et les symboles creux à  $\delta_t/(\delta_t + \delta_b)$ . L’importance relative de la couche inférieure (resp. supérieure) est de plus en plus (resp. moins en moins) importante au fur et à mesure que  $\theta$  augmente. Ce phénomène est indépendant de la taille de la bulle. Cependant, comme le montre la figure 3.5.4(b) où l’on voit le même graphe mais pour une taille de bulle donnée  $d_2 = 33 \pm 1$  mm dans les cellules 2 et 3, ce phénomène est plus important si le gap de la cellule est plus élevé. La contribution de la couche de lubrification inférieure  $\delta_b$  à la couche totale  $\delta_t + \delta_b$  augmente donc avec l’angle d’inclinaison  $\theta$  et le gap de la cellule  $h$  mais ne dépend pas de la taille de la bulle  $d_2$ . La figure 3.5.4(c) montre l’évolution de la couche de lubrification totale normalisée  $(\delta_t + \delta_b)/h(\theta)$  en fonction de  $\theta$  pour une bulle de diamètre  $d_2 = 22$  mm ( $\blacktriangleright$ ) et une autre de diamètre  $d_2 = 33$  mm ( $\blacktriangleright$ ). On remarque que  $(\delta_t + \delta_b)/h(\theta)$  décroît en fonction de  $\theta$  indépendamment de la taille de la bulle. La figure 3.5.4(d) montre l’évolution de la couche de lubrification totale normalisée  $(\delta_t + \delta_b)/h(\theta)$  en fonction de  $\theta$  pour deux cellules différentes pour  $d_2 = 33 \pm 1$  mm. On voit alors que plus le gap de la cellule est élevé, plus la couche de lubrification totale normalisée est grande. En somme,  $(\delta_t + \delta_b)/h(\theta)$  décroît avec  $\theta$  et cette tendance n’est pas dépendante de la taille de la bulle mais dépend fortement du gap  $h$  de la cellule.

La bulle étant poussée vers la plaque supérieure par la poussée d’Archimède, on s’attend à ce que la couche de lubrification supérieure soit moins épaisse que la couche de lubrification inférieure, comme on l’observe expérimentalement. Cet effet est de plus en plus important au fur et à mesure que l’angle  $\theta$  augmente, ce qui est en accord avec le fait que  $\delta_b/(\delta_b + \delta_t)$  augmente avec  $\theta$ . Cependant, on a vu que la couche de lubrification supérieure suit, de

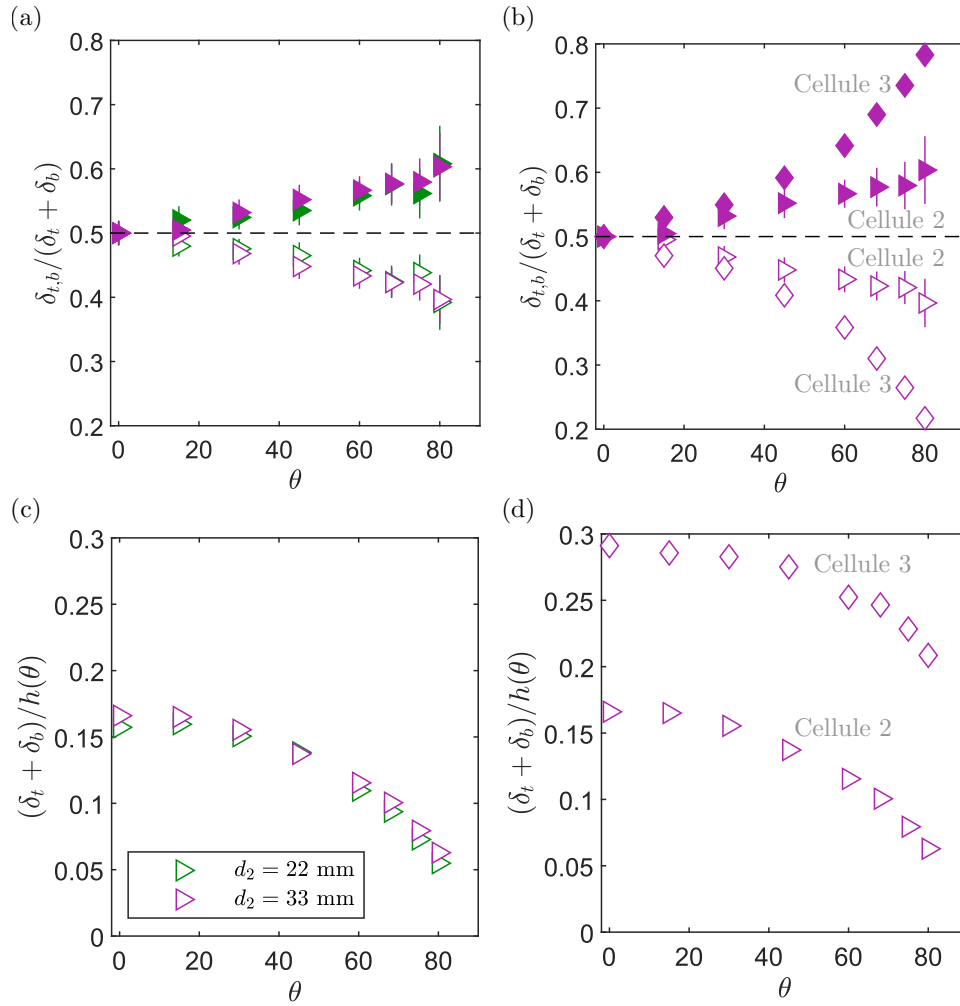


FIGURE 3.5.4 – Évolution de l'épaisseur des couches de lubrification supérieure ( $\delta_t$ , symboles creux) et inférieure ( $\delta_b$ , symboles pleins) normalisée par la couche de lubrification totale  $\delta_t + \delta_b$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  (a) dans la cellule 2 pour une bulle de diamètre  $d_2 = 22 \pm 1 \text{ mm}$  ( $\blacktriangleright$ ) et  $d_2 = 33 \pm 1 \text{ mm}$  ( $\blacktriangleright$ ) et (b) pour les cellules 2 ( $\blacktriangleright$ ) et 3 ( $\blacklozenge$ ) pour des bulles de diamètre  $d_2 = 33 \pm 1 \text{ mm}$ . (c) Évolution de la couche de lubrification totale  $\delta_t + \delta_b$  normalisée par  $h(\theta)$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour deux tailles de bulles différentes dans la cellule 2 et (d) pour une taille de bulle  $d_2 = 33 \pm 1 \text{ mm}$  dans les cellules 2 et 3.

manière identique pour tous les angles, la même loi que dans le cas  $\theta = 0^\circ$  ( $\delta_t/h(\theta) \propto \text{Ca}^{2/3}$ ). Autrement dit, il semble que les effets dus à la poussée d'Archimède perpendiculairement aux plaques de la cellule ne modifient que la couche de lubrification inférieure. Il faut cependant garder en tête que les résultats précédents suggérant la relation  $\delta_t/h(\theta) \propto \text{Ca}^{2/3}$  sont établis avec un écoulement imposé dans la cellule, ce qui n'est pas notre cas. Il est donc complexe d'en dire plus actuellement et il faudrait très certainement des expériences supplémentaires pour aller plus loin.

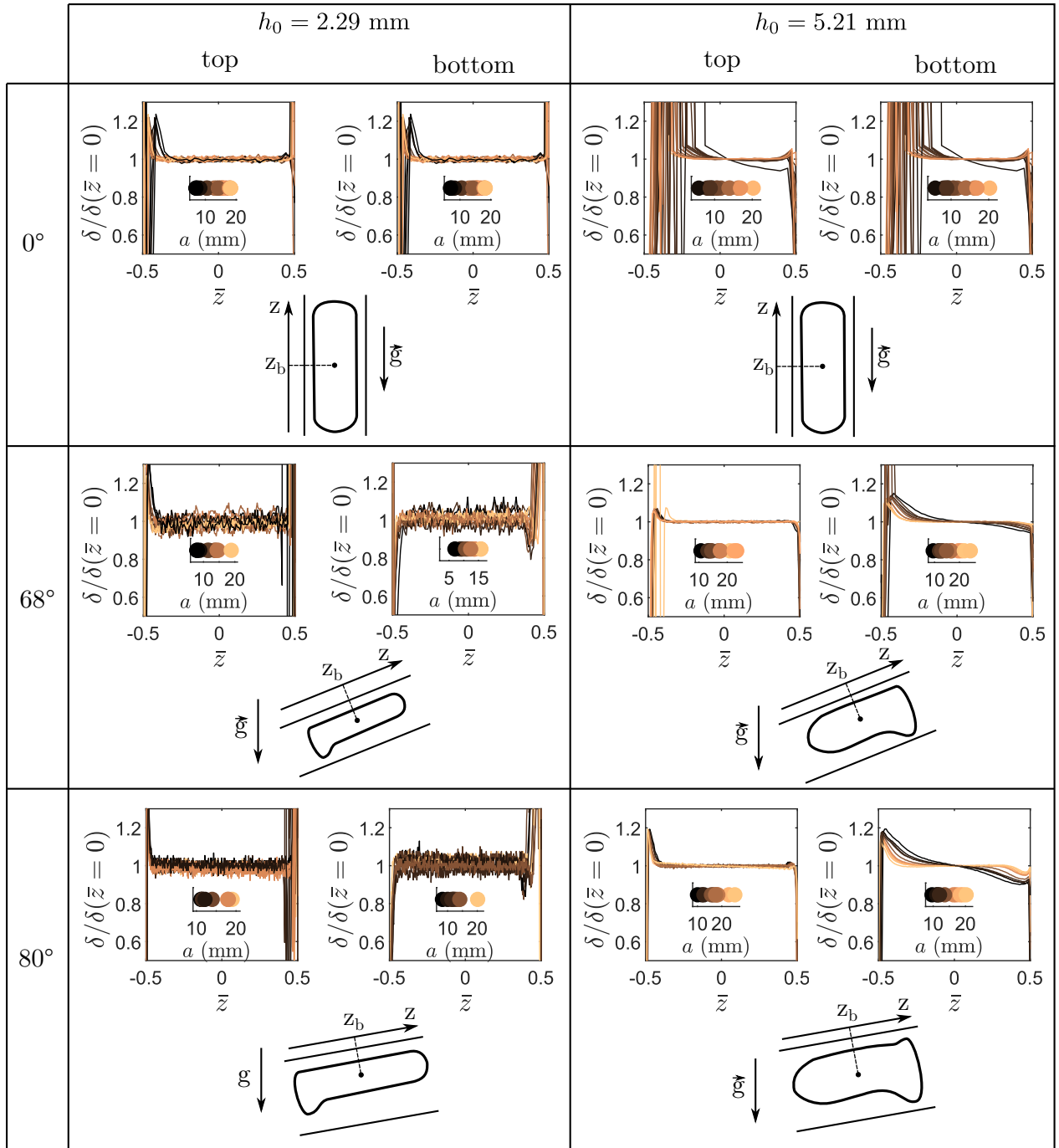


FIGURE 3.5.5 – Évolution de  $\delta/\delta(\bar{z} = 0)$  en fonction de  $\bar{z}$  pour les couches de lubrification inférieure et supérieure, où  $\bar{z} = (z - z_b)/a$  pour les cellules 2 ( $h_0 = 2.29 \text{ mm}$ ) et 3 ( $h_0 = 5.21 \text{ mm}$ ) pour  $\theta = \{0, 68, 80\}^\circ$ . Pour chaque combinaison cellule/angle d'inclinaison est proposé un schéma de la forme de la bulle dans le gap (pas à l'échelle) basé sur les signaux.

### 3.5.2 Forme des bulles dans le plan du gap

Pour le moment, nous avons regardé l'évolution de la valeur moyenne des couches de lubrification en fonction des différents paramètres expérimentaux. Regardons maintenant plus

en détail les signaux afin de voir si l'on peut en tirer des conclusions quant à la forme exacte des bulles dans le plan du gap ( $yz$ ). La figure 3.5.5 montre pour les cellules 2 ( $h_0 = 2.29$  mm) et 3 ( $h_0 = 5.21$  mm) et pour les angles  $\theta = \{0, 68, 80\}^\circ$  les signaux  $\delta/\delta(\bar{z} = 0)$  en fonction de  $\bar{z}$  pour les couches de lubrification inférieures et supérieures, où  $\bar{z} = (z - z_b)/a$  ( $\bar{z} = 0$  correspondant donc au centre de la bulle). Les signaux sont accompagnés d'un schéma qui propose une reconstitution pas à l'échelle de la forme de la bulle dans le gap. Par exemple, pour  $\theta = 0^\circ$ , on remarque pour les deux cellules que les couches de lubrification supérieure et inférieure sont approximativement constantes tout le long de la bulle mais qu'elles augmentent en bordure de la bulle, le tout de manière symétrique. Néanmoins, lorsque l'angle d'inclinaison augmente, les couches de lubrification ne sont plus symétriques. Pour la cellule 2 ( $h_0 = 2.29$  mm) et  $\theta = \{68, 80\}^\circ$ , on voit que la couche de lubrification inférieure diminue vers  $\bar{z} \approx -0.5$ , suggérant ainsi que le bas des bulles ( $\bar{z} \approx -0.5$ ) n'est pas courbé dans le même sens que le haut ( $\bar{z} \approx 0.5$ ). Pour la cellule 3 ( $h_0 = 5.21$  mm), la couche de lubrification supérieure reste constante sur toute la longueur de la bulle mais on voit que la couche de lubrification inférieure est plus épaisse à l'arrière ( $\bar{z} < 0$ ) qu'à l'avant ( $\bar{z} > 0$ ) de la bulle, avec un plateau en son centre. Plus la bulle est grosse, plus l'effet se situe sur les bords de la bulle. De plus, il est plus prononcé lorsque l'angle est plus grand. Contrairement à ce que l'on a pu voir pour la cellule 2, de plus petit gap, la bulle est donc plus grosse vers l'avant.

### Résumé de la partie

Dans cette partie, nous avons étudié :

- l'épaisseur de la couche de lubrification supérieure normalisée  $\delta_t/h(\theta)$ , qui est proportionnelle à  $Ca^{2/3}$  pour tous les angles  $\theta$  et pour toutes les cellules. Cependant, le facteur de proportionnalité est fortement dépendant de la cellule étudiée, même pour des gaps équivalents.
- la couche de lubrification inférieure, qui ne suit pas la même loi de puissance. Néanmoins, nous avons montré que la couche de lubrification inférieure  $\delta_b$  est de plus en plus épaisse relativement à la couche de lubrification supérieure  $\delta_t$  lorsque  $\theta$  augmente. Cet effet croît avec l'angle d'inclinaison  $\theta$  et avec le gap  $h$  de la cellule mais n'est pas dépendant de la taille  $d_2$  de la bulle.
- la couche de lubrification totale  $\delta_t + \delta_b$  normalisée par le gap de la cellule  $h(\theta)$ , qui diminue avec  $\theta$ , augmente avec  $h$  et est indépendante de  $d_2$ .
- la forme exacte des bulles dans le gap. Dans le cas des plus petites cellules, la couche de lubrification est constante sur toute la longueur de la bulle et il semble que l'arrière de la bulle soit plus large en dessous de la bulle au niveau de la bordure de cette dernière. Pour la cellule de gap  $h_0 = 5.21$  mm, nous avons remarqué que la bulle est plus large à l'avant qu'à l'arrière de la bulle et que la couche de lubrification n'est constante que sur une partie de la bulle dépendant de la taille de celle-ci.

### Résumé du chapitre 3

- La vitesse théorique de remontée d'une bulle unique vérifiant  $d_2 \gg h$  en cellule de Hele-Shaw inclinée d'un angle  $\theta$  est

$$v_M = \frac{\rho g \cos \theta h^2}{12\eta} = v_M(\theta = 0) \cos \theta,$$

où tout se passe comme si la gravité étant remplacée par la gravité effective le long de la remontée de la bulle  $g \rightarrow g \cos \theta$ . Nous avons pu voir que cette formule ne retranscrit pas la bonne dépendance en  $\theta$  et surestime la vitesse réelle des bulles. À l'aide d'une analogie entre un bloc solide glissant le long d'une pente et une bulle remontant dans une cellule de Hele-Shaw, nous avons établi la relation

$$v_b = \frac{\rho g \cos \theta h^2}{12\eta} (1 - \kappa(h) \cos \theta) = v_M(\theta = 0) \cos \theta (1 - \kappa(h) \cos \theta),$$

où  $\kappa(h)$  est une constante sans dimension analogue à un coefficient de frottement solide, dépendante du gap de la cellule et obtenue par ajustement sur les données expérimentales. Ce modèle est en adéquation avec les points expérimentaux pour des valeurs de  $\kappa$  dont l'ordre de grandeur est de  $10^{-3} - 10^{-2}$ , ce qui correspond à une correction de 30 % de la valeur de la vitesse pour  $80^\circ$  pour la cellule avec le plus petit gap.

- Pour les cellules de Hele-Shaw de plus petits gaps ( $h_0 = 2.19$  mm et  $h_0 = 2.29$  mm), dans le plan de la cellule, une excroissance apparaît à l'arrière de la bulle, résultant en une légère augmentation du rapport d'aspect. Pour la cellule de gap  $h_0 = 5.21$  mm, aucune variation du rapport d'aspect n'a été observée avec l'angle d'inclinaison  $\theta$ .
- La couche de lubrification supérieure suit une loi de puissance en  $\text{Ca}^{2/3}$ , où  $\text{Ca} = \eta v_b / \gamma$  est le nombre capillaire, mais le facteur de proportionnalité est fortement dépendant de la cellule étudiée (même pour deux cellules de gaps proches), mais pas de l'angle d'inclinaison. La couche de lubrification inférieure ne suit quant à elle pas la même loi de puissance mais elle est de plus en plus épaisse par rapport à la couche supérieure quand l'angle d'inclinaison augmente. Ce phénomène est plus important lorsque le gap est plus grand mais ne dépend pas de la taille des bulles. La couche de lubrification totale  $\delta_t + \delta_b$  diminue avec l'angle d'inclinaison mais augmente avec  $h$ .
- Enfin, nous avons regardé en détail la forme des bulles. Dans les cellules de gap  $h_0 = 2.19$  mm et  $h_0 = 2.29$  mm, les couches de lubrification sont constantes sur la grande majorité de la bulle et l'arrière de cette dernière est plus épais que l'avant lorsque  $\theta \neq 0$ . Dans la cellule de gap  $h_0 = 5.21$  mm, les couches de lubrification ne sont pas constantes sur toute la bulle lorsque  $\theta \neq 0$  et la bulle est plus épaisse à l'avant qu'à l'arrière.

# Chapitre 4

## Bulle unique dans une suspension

*"Il n'y a point de génie sans un grain de folie."*

Aristote

On rappelle que, dans une cellule de Hele-Shaw verticale, la vitesse d'une bulle remontant dans un fluide newtonien en régime visqueux ( $Re_{2h} \ll 1$ ) avec  $d_2 \gg h$  est donnée par l'équation 1.3.31, rappelée ici pour  $\theta = 0^\circ$  :

$$v_M = \frac{\rho g h^2}{12\eta} \chi,$$

où  $\chi = a/b$  est le rapport d'aspect,  $h$  le gap,  $g$  la gravité,  $\rho$  et  $\eta$  la masse volumique et la viscosité du fluide (voir partie 1.3.1). Dans la partie 1.4.1, nous avons vu qu'une suspension iso-dense, monodisperse, non-Brownienne et visqueuse dont les particules sont sphériques se comporte comme un liquide newtonien dont la viscosité est une fonction de la fraction volumique et de la viscosité du liquide suspendant (tant que  $\phi < 40\%$ ). On s'attend donc à ce que l'équation 1.3.1, valable pour les liquides newtoniens, soit aussi valable pour une telle suspension. Madec et al. (2020), au cours d'une thèse réalisée précédemment à l'ENS de Lyon, ont montré que ce n'était pas le cas et que la vitesse des "grandes bulles" ( $d_2 \gg h$ ) est en fait supérieure à celle attendue. Plus la fraction volumique de la suspension est élevée, plus la vitesse réelle des bulles est supérieure à la vitesse théorique donnée par l'équation 1.3.1. L'explication proposée suggère que ce phénomène proviendrait des inhomogénéités de fraction volumique induites par la migration de particules dans le gap due à l'écoulement de Poiseuille qui y règne (voir partie 1.4.3).

Ce résultat n'ayant été vérifié que pour un seul type de mélange (eau/UCON avec des particules de polystyrène), nous souhaitons le vérifier pour un autre (à savoir eau/Triton/ZnCl avec des particules de PMMA, présenté partie 4.1.2). Ensuite, nous comparerons les suspensions aux liquides newtoniens dans le régime inertiel.

Ce chapitre est une étude toujours en cours.

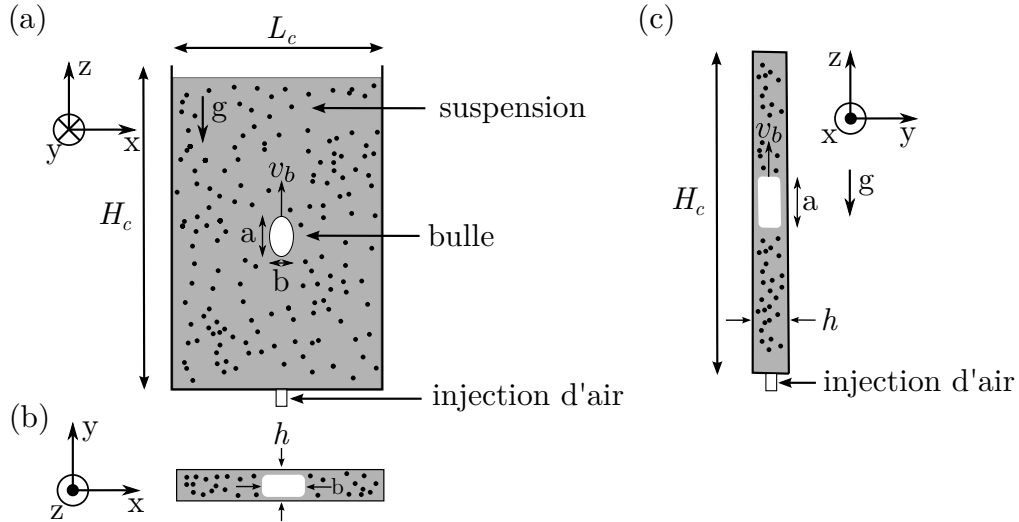


FIGURE 4.1.1 – Schéma du dispositif expérimental où l'on voit une bulle unique remonter dans une suspension remplissant une cellule de Hele-Shaw, dont la hauteur  $H_c$  (30 cm) et la largeur  $L_c$  (20 cm) sont grandes devant l'entrefer  $h = \{2.3, 5.2\}$  mm, aussi appelé "gap". La bulle est caractérisée par sa vitesse  $v_b$ , son axe le long du mouvement  $a$  et son axe perpendiculaire au mouvement  $b$ . Les schémas ne sont pas à l'échelle. **(a)** Projection dans le plan  $xz$ , parallèle aux plaques. **(b)** Projection dans le plan  $xy$  (vue de dessus) et **(c)** dans le plan  $yz$  (vue de côté).

## 4.1 Méthodologie

### 4.1.1 Dispositif expérimental

Le montage expérimental utilisé pour étudier la remontée d'une bulle unique dans une cellule de Hele-Shaw (hauteur  $H_c = 30$  cm, largeur  $L_c = 20$  cm et gap  $h = \{2.3, 5.2\}$  mm) remplie d'une suspension est présenté figure 4.1.1. Il correspond au même que dans la partie 2.1.1, où le liquide newtonien a été remplacé par une suspension. Les bulles sont générées manuellement à la base de la cellule à l'aide d'une seringue de 50 mL. Un panneau LED, disposé  $\sim 30$  cm derrière la cellule de Hele-Shaw, est allumé à l'aide d'une alimentation stabilisée afin d'assurer un éclairage constant et d'éviter le scintillement dû aux 50 Hz du secteur. Le panneau LED est de dimensions bien supérieures à celles de la cellule afin d'assurer un éclairage uniforme sur l'ensemble de cette dernière. Les remontées de bulles sont filmées à l'aide d'une caméra Basler AC-0.400, 2048x2048 pixels, dont le nombre d'images par seconde a été fixé à 5 pour ce chapitre. Seule la région centrale de la cellule est étudiée pour s'assurer que les effets de bord soient négligeables.

### 4.1.2 Suspension utilisée

Nous étudions distinctement le régime visqueux ( $Re_{3h} \ll 1$ ) et le régime inertiel ( $Re_{3h} \gg 1$ ). Pour chaque régime, nous avons utilisé un type de mélange, que l'on va présenter dans cette partie.



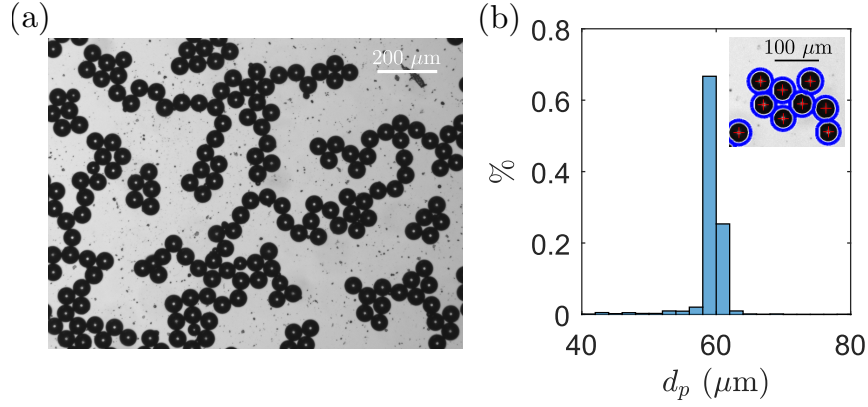


FIGURE 4.1.2 – (a) Photographie des particules de PMMA rétroéclairées. (b) Distribution de la taille des billes de PMMA réalisées sur un échantillon de 3294 particules. Insert : zoom sur quelques particules montrant le résultat de la méthode automatique de détection permettant de mesurer leur diamètre (cercles bleus).

### Régime visqueux

	Eau	Triton X-100	ZnCl
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	997	1060	2900
$n$	1.33	1.49	1.7

TABLE 4.1 – Propriétés physiques des espèces chimiques utilisées.  $\rho$  désigne la masse volumique et  $n$  l'indice optique.

Le liquide suspensif utilisé est un mélange de Triton X-100, qui est un détergent commercial miscible à l'eau, de chlorure de zinc et d'eau (composition inspirée des travaux de Souzy (2016) isodense avec le PMMA). Les propriétés physiques de ces espèces chimiques sont présentées dans le tableau 4.1. Dans la partie 4.2.1 dédiée à l'étude de la vitesse des bulles remontant dans une suspension, le mélange utilisé est composé à 73.86% de Triton (les pourcentages indiqués étant des pourcentages massiques), 11.9% d'eau et 14.24% de ZnCl. Sa viscosité vaut  $\eta = 2.7$  Pa.s, sa densité  $\rho = 1187$  kg.m<sup>-3</sup> et sa tension de surface  $\gamma = 32 \pm 1$  mN.m<sup>-1</sup>. Les méthodes de détermination des caractéristiques physiques sont explicitées en annexe A. L'annexe B présente une méthode expérimentale ayant pour but de trouver la composition du liquide suspensif qui permet d'atteindre l'iso-indicéité.

Les particules utilisées, dont une photo est montrée sur la figure 4.1.2(a), sont en PMMA et la distribution de leur taille après tamisage est présentée figure 4.1.2(b), de laquelle on déduit que les particules ont un diamètre  $d_p = 59 \pm 3$  μm. On considérera le mélange comme étant monodisperse et on vérifiera  $\phi < 30\%$  dans notre étude, ce qui implique qu'il se comporte rhéologiquement comme un fluide newtonien effectif dont la viscosité dépend uniquement de la fraction volumique et de la viscosité du liquide suspensif.

Les expériences en régime visqueux ont été réalisées dans la cellule de gap  $h = 5.2$  mm.

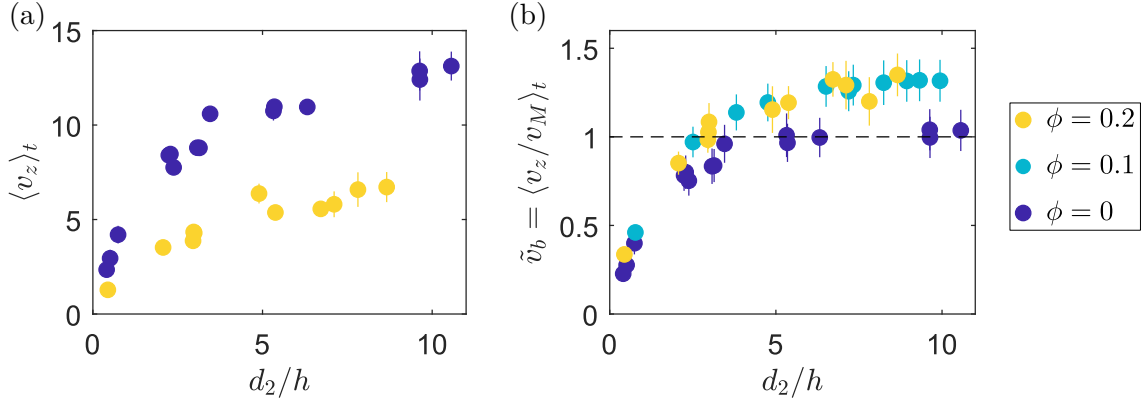


FIGURE 4.2.1 – (a) Vitesse moyenne de remontée d’une bulle en régime visqueux en fonction du diamètre normalisé  $d_2/h$ . (b) Vitesse normalisée  $\tilde{v}_b$  en fonction du diamètre normalisé des bulles  $d_2/h$  pour trois suspensions de fraction volumique différente. Les pointillés noirs indiquent la valeur  $\tilde{v}_b = 1$ .

## Régime inertiel

Pour étudier le régime inertiel, nous utilisons un mélange d’eau/salée et de UCON dans lequel on met des particules de polystyrène de diamètre  $d_p = 230 \mu\text{m}$  en suspension. Nous sommes partis d’un mélange eau salée/UCON préparé lors de la thèse de Madec (2021) dont la proportion massique de UCON est de 10%, et celle de sel est choisie pour le rendre isodense avec le polystyrène. La suspension utilisée dans ce chapitre à un fraction volumique de grains de 20% et la suspension ainsi formée a une viscosité effective de  $\eta_s = 9.1 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Les expériences en régime inertiel ont été réalisées dans la cellule de gap  $h = 2.3 \text{ mm}$ .

## 4.2 Vitesse de remontée d’une bulle unique

### 4.2.1 Régime visqueux

On s’intéresse à la vitesse de remontée d’une bulle unique dans des suspensions de différentes fractions volumiques  $\phi = \{0, 10, 20\}\%$ , la composition de ces dernières étant précisée dans la partie 4.1.2. La figure 4.2.1(a) montre l’évolution de la vitesse moyenne de remontée des bulles en fonction de  $d_2/h$  pour  $\phi = \{0, 20\}\%$ . Comme pour les fluides newtoniens (partie 2.3), on remarque que pour un mélange donné, la vitesse augmente avec  $d_2/h$  et que cette augmentation est plus faible pour les bulles les plus grosses. On voit aussi qu’à une taille de bulle fixée, la vitesse est plus faible dans le mélange dont la fraction volumique est plus élevée. Cela peut simplement s’expliquer par le fait que la viscosité effective de la suspension à 20 % est supérieure à la viscosité du fluide newtonien. Les bulles vont donc naturellement moins vite. Sur la figure 4.2.1(b) est tracé  $\tilde{v}_b = \langle v_z \rangle_t / v_M$  (voir équation 2.3.2), qui correspond à la moyenne de la vitesse expérimentale de la bulle normalisée par la vitesse théorique  $v_M$ , en fonction du diamètre normalisé de la bulle  $d_2/h$ . Les pointillés noirs indiquent la valeur  $\tilde{v}_b = 1$ . L’incertitude principale sur la valeur de  $\tilde{v}_b$  porte sur la viscosité étant donné que la température était mal connue et que la viscosité de ce mélange varie très fortement avec

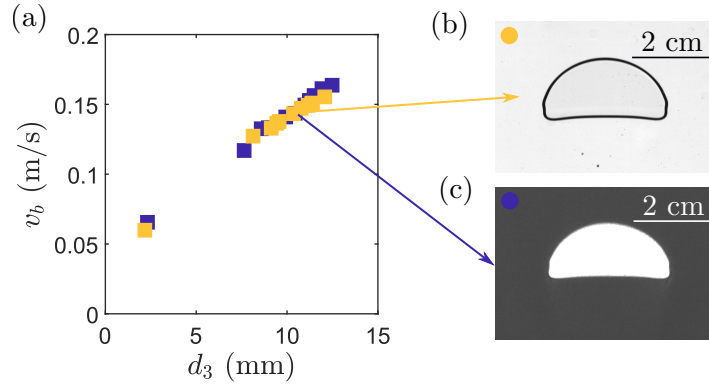


FIGURE 4.2.2 – (a) Vitesse moyenne de remontée d’une bulle en régime inertiel en fonction du diamètre équivalent  $d_3$ . Les rectangles bleus (■) correspondant à une suspension eau/UCON de fraction volumique  $\phi = 20\%$  et de viscosité effective  $\eta_s = 9.1 \times 10^{-3}$  Pa.s. Les rectangles jaunes (■) correspondent à un mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 10 \times 10^{-3}$  Pa.s. (b) Photographie d’une bulle de diamètre équivalent  $d_3 \approx 11$  mm remontant dans le liquide newtonien de viscosité  $\eta = 10 \times 10^{-3}$  Pa.s. (c) Photographie d’une bulle de diamètre équivalent  $d_3 \approx 11$  mm remontant dans la suspension de fraction volumique  $\phi = 20\%$  et de viscosité effective  $\eta_s = 9.1 \times 10^{-3}$  Pa.s.

celle-ci. Pour chaque fraction volumique, on voit que la vitesse normalisée augmente jusqu’à atteindre un plateau. On remarque que pour le liquide newtonien, le plateau vaut environ  $\tilde{v}_b \approx 1$  et qu’il est supérieur à 1 pour les suspensions. Les incertitudes étant cependant élevées, il est difficile de différencier le cas  $\phi = 10\%$  du cas  $\phi = 20\%$ . On retrouve néanmoins le phénomène observé par Madec et al. (2020) avec, à  $d_2/h$  constant, une vitesse normalisée  $\tilde{v}_b$  plus élevée pour les bulles évoluant dans une suspension que pour celle évoluant dans un liquide newtonien. La valeur plateau atteinte pour  $\phi = 10\%$  et  $\phi = 20\%$  valent  $1.29 \pm 0.14$  et  $1.31 \pm 0.14$  respectivement, valeurs qui coïncident aux incertitudes près. Avec une autre suspension (liquide : eau/UCON, particules : polystyrène), Madec et al. (2020) trouve  $1.27 \pm 0.11$  et  $1.34 \pm 0.11$  pour  $\phi = 10\%$  et  $\phi = 20\%$  respectivement, ce qui est en accord avec nos valeurs.

On rappelle que le fait que  $\tilde{v}_b/v_M > 1$  dans les suspensions est attribué à la migration de particules dans le gap (voir partie 1.4.3). La suspension utilisée ici permet d’obtenir un mélange iso-indice (voir annexe B pour les détails) afin de réaliser des mesures 3D et de vérifier cette hypothèse. Ce travail reste encore à faire.

Nous souhaitons savoir si ce que l’on observe en régime visqueux est aussi vrai en régime inertiel : la vitesse d’une bulle dans une suspension est-elle supérieure à celle dans un liquide newtonien de même viscosité effective ?

## 4.2.2 Régime inertiel

Afin de réaliser un liquide newtonien de viscosité semblable à celle de la suspension préparée ( $\eta_s = 9.1 \times 10^{-3}$  Pa.s, voir partie 4.1.2), nous avons réalisé un mélange eau/UCON dont nous avons mesuré la viscosité. Si la viscosité est trop élevée, on rajoute de l’eau et si elle est trop faible, on rajoute du UCON. On répète cette opération jusqu’à obtenir un mélange de viscosité  $\eta \approx 9.1 \times 10^{-3}$  Pa.s. La température n’étant pas contrôlée, le liquide newtonien

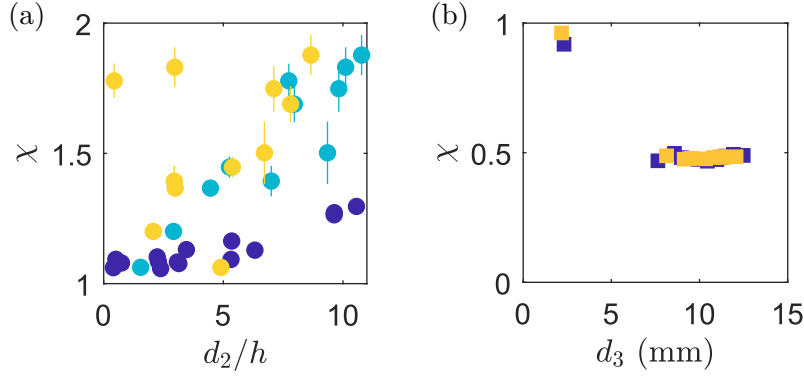


FIGURE 4.3.1 – (a) Rapport d’aspect en fonction du diamètre normalisé  $d_2/h$  pour des bulles en régime visqueux. La légende est la même que pour la figure 4.2.1. (b) Rapport d’aspect en fonction du diamètre équivalent  $d_3$  pour des bulles en régime inertiel. La légende est la même que pour la figure 4.2.2.

ainsi obtenu avait une viscosité de  $\eta = 10 \times 10^{-3}$  Pa.s au moment de l’expérience.

La figure 4.2.2(a) montre l’évolution de la vitesse moyenne de remontée en fonction du diamètre équivalent  $d_3$ . Les rectangles bleus (■) correspondant à la suspension eau/UCON de fraction volumique  $\phi = 20\%$  et de viscosité effective  $\eta_s = 9.1 \times 10^{-3}$  Pa.s. Les rectangles jaunes (■) correspondent au mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 10 \times 10^{-3}$  mPa.s. On remarque que la vitesse d’une bulle de diamètre donnée est la même, que ce soit dans la suspension ou dans le liquide newtonien. La figure 4.2.2(b) montre une bulle de diamètre équivalent  $d_3 \approx 11$  mm remontant dans le liquide newtonien de viscosité  $\eta = 10 \times 10^{-3}$  Pa.s et la figure 4.2.2(c) remontant dans la suspension de fraction volumique  $\phi = 20\%$  et de viscosité effective  $\eta_s = 9.1 \times 10^{-3}$  Pa.s. On voit bien que dans la suspension la bulle apparaît bien plus clairement que dans le liquide newtonien. Les grains sont cependant trop petits pour être discernés individuellement. Les bulles ont l’air d’avoir une forme semblable mais on peut se demander si les rapports d’aspect sont les mêmes ou non, ce qui est l’objet de la prochaine partie 4.3.

## 4.3 Forme des bulles

### 4.3.1 Régime visqueux

Sur la figure 4.3.1(a) est tracée l’évolution du rapport d’aspect  $\chi$  avec  $d_2/h$  pour des suspensions eau/Triton/ZnCl à différentes fractions volumiques de PMMA. La légende utilisée est la même que pour la figure 4.2.1. Pour le mélange sans grain, on voit que  $\chi \approx 1.1$ , avec une légère augmentation pour les grandes bulles. Par contre, plus la fraction volumique est élevée, plus les points sont dispersés. Pour  $\phi = 10\%$ , le rapport d’aspect semble augmenter avec  $d_2/h$  mais les incertitudes augmentent elles aussi considérablement. Pour  $\phi = 20\%$ , il n’y a pas de tendance générale qui se dégage et les incertitudes sont bien plus élevées que pour  $\phi = 0\%$ . On ne retrouve donc pas les mêmes résultats que Madec (2021) pour des suspensions eau/UCON avec des billes de polystyrène où aucune différence n’était observée entre le liquide newtonien seul et les suspensions. Les suspensions utilisées ici sont cependant bien

plus visqueuses (environ 10 fois plus visqueuses) que celles utilisées par Madec (2021), ce qui pourrait expliquer la différence de résultats.

### 4.3.2 Régime inertiel

La figure 4.3.1(b) montre l'évolution du rapport d'aspect  $\chi$  avec  $d_3$  pour une suspension et un liquide newtonien de même viscosité effective. La légende utilisée est la même que pour la figure 4.2.2. Cette fois, les points expérimentaux se superposent et les incertitudes ne sont pas spécialement élevées pour  $\phi = 20\%$ . On peut noter que les bulles les plus petites sont plus sphériques et que le rapport d'aspect atteint un plateau pour  $d_3 > 7$  mm. Cela fait écho aux résultats présentés dans la partie 2.5.

## 4.4 Perspectives

La suite des travaux présentés dans ce chapitre sont introduits dans l'annexe B, qui n'ont pour l'instant pas donné de résultats. En effet, les expériences se sont malheureusement arrêtées en cours de route car la production de billes de PMMA dont la taille correspond, c'est-à-dire suffisamment grandes pour être non Browniennes et suffisamment petites pour ne pas cristalliser dans le gap, est très peu répandue et par conséquent très chère à l'heure actuelle. L'objectif serait de remplir une cellule de Hele-Shaw d'une solution isoindice afin de regarder le réarrangement des particules lors du passage d'une bulle, ce qui nécessite d'être capable de préparer une grande quantité de suspension homogène. La réalisation de ces expériences est donc laissée pour le futur, lorsque les billes de PMMA de la taille nécessaire seront plus abordables.

#### Résumé du chapitre 4

- Dans le régime visqueux, nous avons retrouvé expérimentalement, avec un nouveau mélange, qu'une bulle est plus rapide dans une suspension que dans un liquide newtonien de même viscosité effective. Cette différence n'est plus vraie en régime inertiel, où à taille égale, deux bulles ont la même vitesse, que ce soit dans une suspension ou un liquide newtonien (toujours à viscosité égale).
- La forme des bulles est identique dans une suspension et un liquide newtonien en régime inertiel. Néanmoins, en régime visqueux, nous avons vu que le rapport d'aspect est plus variable d'une bulle à l'autre et n'est pas constant et égal à 1.1 dans le cas des suspensions.



# Chapitre 5

## Vidange d'un réservoir idéal fermé

*"Cette expérience, c'est bouclé en dix minutes."*

Sylvain Joubaud au sujet de ce chapitre, 06/03/2023

Après s'être intéressés à la remontée d'une bulle unique, on souhaite étudier la vidange d'un réservoir, qui est pilotée par la formation spontanée de bulles. Nous avons vu dans la partie 1.2 que le débit volumique lors de la vidange d'un réservoir est donné par l'équation 1.2.2, rappelée ici :

$$D_V = \frac{\pi}{12} d^2 \sqrt{gd} \equiv D_{Vi},$$

où  $d$  est le diamètre de vidange (Clanet et Searby, 2004). À la surface libre, la pression oscille autour de la valeur  $P_0 - \rho g(L_b - z_{eq})$  (où  $P_0$  correspond à la pression atmosphérique et  $L_b - z_{eq}$  à la hauteur de liquide) avec une période  $T$  qui dépend de la hauteur d'air dans la bouteille  $z_{eq}/L_b$ , donnée par l'équation 1.2.3 :

$$T = 2\pi \frac{L}{\sqrt{\Gamma P_0 / \rho}} \sqrt{\frac{z_{eq}}{L_b} \left(1 - \frac{z_{eq}}{L_b}\right)},$$

où  $\Gamma$  est le coefficient adiabatique (Clanet et Searby, 2004). Nous souhaitons étendre l'étude sur le débit volumique  $D_V$  et sur la fréquence de formation de bulles  $f_b$  à d'autres liquides que l'eau afin de comprendre comment les propriétés physiques du fluide ( $\eta, \rho$ ) les influencent. Nous proposons de répondre à cette question dans ce chapitre à l'aide du plan présenté figure 5.1.

Après la présentation du dispositif expérimental (partie 5.1) et du traitement numérique (partie 5.2), nous étudierons tout d'abord les fluides newtoniens, que nous traiterons en deux temps selon le diamètre de vidange  $d$ . Dans un premier temps, nous regarderons le cas des "grands" diamètres de vidange  $d = \{20, 30, 40\}$  mm (débits et fréquence des bulles constants), pour lesquels nous nous pencherons sur l'importance de la masse volumique et de la viscosité du liquide vidangé (partie 5.3). Dans un second temps, nous traiterons le cas du "petit" diamètre  $d = 10$  mm (débits et fréquence des bulles variables) pour lequel nous ferons aussi varier la viscosité du fluide (partie 5.4). Dans tous ces cas, nous étudierons le débit volumique ainsi que la fréquence de formation des bulles. Enfin, nous nous intéresserons au débit de vidange de suspensions isodenses, uniquement pour le cas des "grands" diamètres, où nous ferons varier la fraction volumique de particules  $\phi$  de la suspension (partie 5.5).

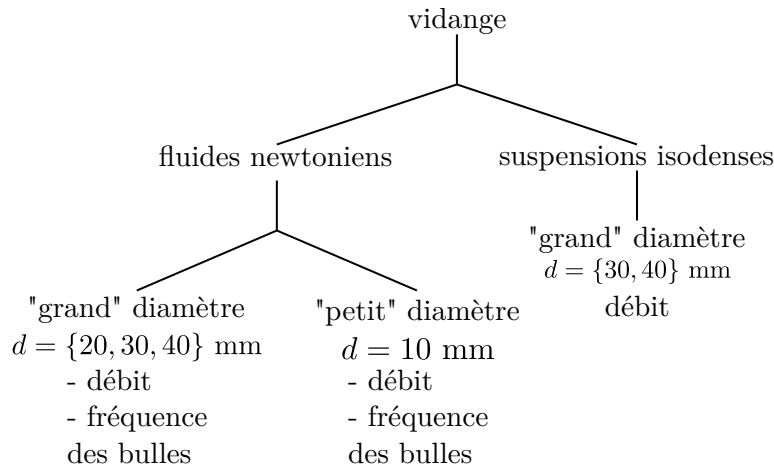


Figure 5.1 – Schéma du plan du chapitre.

## 5.1 Méthode expérimentale

### 5.1.1 Description du dispositif

La figure 5.1.1(a) présente un schéma du dispositif expérimental, qui est composé d'un cylindre de diamètre  $D_0 = 110$  mm, de hauteur  $L_b \approx 447$  mm et de diamètre de vidange  $d = \{10, 20, 30, 40\}$  mm. Les figures 5.1.1(b) et (c) donnent respectivement une vue plongeante et contre-plongeante d'une reconstitution 3D du montage expérimental utilisé. L'orifice de vidange est biseauté avec un angle de  $45^\circ$  de manière à éviter tout effet Coanda<sup>1</sup> sur les bords du trou. Le trou de vidange est fermé à l'aide d'un bouchon en plastique dont la taille est adaptée à celle du trou. Pour lancer la vidange, celui-ci est retiré manuellement. En dessous du cylindre sont disposés une bassine, destinée à recevoir le liquide, et un capteur de force (Honeywell 152, voir partie 5.1.2) qui permet d'obtenir un suivi en temps réel de la quantité de liquide ou de suspension présente dans la bassine. Le signal de ce dernier est récupéré et amplifié à l'aide d'un pont de Wheatstone et d'un amplificateur, dont le signal de sortie est envoyé sur une carte National Instrument USB 6251 qui le récupère et le transmet à un ordinateur. Ce système permet de s'affranchir des problèmes d'acquisition des balances commerciales dont les temps de réponse (typiquement de l'ordre de la seconde) sont trop grands pour notre expérience. Celui de l'ensemble {capteur+bassine} est de l'ordre de  $1/300$  Hz. Le cylindre est rétroéclairé à l'aide d'un panneau LED disposé juste derrière celui-ci et allumé à l'aide d'une alimentation stabilisée. La vidange est filmée à l'aide d'une caméra Chronos 2.1,  $1920 \times 1080$  pixels, dont le nombre d'images par seconde (IPS) est adapté à la vitesse de la vidange, allant de 60 à 300. La conversion pixels  $\leftrightarrow$  millimètres se fait à l'aide d'une grille de points séparés d'une distance connue, placée à l'avant du cylindre.

Les acquisitions de la caméra et de la balance sont lancées chacune manuellement et individuellement, ce qui implique que l'origine des temps n'est pas la même pour les deux. Dans les graphes de ce chapitre, nous utiliserons une unique origine temporelle, qui est choisie dans le but de faciliter la compréhension des graphes. Cependant, il faut garder en tête que le signal du capteur de force et de la balance ne sont pas parfaitement synchronisés.

1. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet\\_Coanda](https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Coanda)



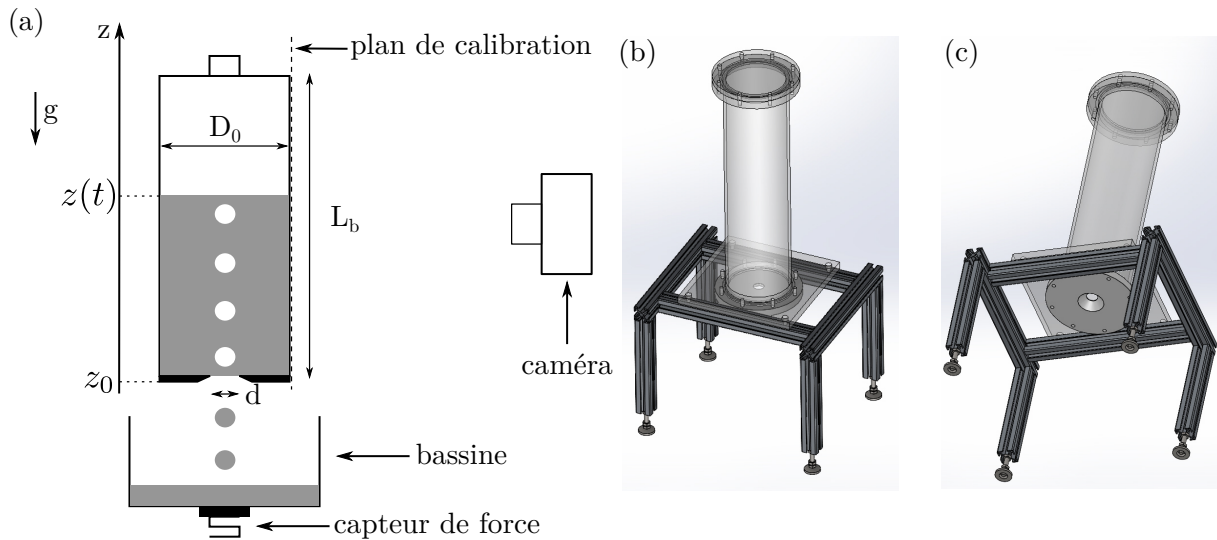


FIGURE 5.1.1 – (a) Schéma du dispositif expérimental utilisé pour étudier la vidange d’un réservoir idéal cylindrique de diamètre  $D_0 = 110$  mm, hauteur  $L_b \approx 447$  mm et diamètre de vidange  $d = \{10, 20, 30, 40\}$  mm. La conversion pixels  $\leftrightarrow$  millimètres est effectuée à l’aide d’une grille positionnée dans le plan de calibration, à l’avant du cylindre, représenté par des pointillés. (b) Vue plongeante et (c) contre-plongeante du dispositif expérimental réalisé avec le logiciel SolidWorks (crédit : M. Moulin).

### 5.1.2 Calibration du capteur de force

Le capteur de force (Honeywell 152) est utilisé dans le but de connaître la masse d’eau que la bassine récupère, afin de remonter au débit massique et donc au débit volumique, sachant que  $\rho D_V = D_m$ . Afin de calibrer le capteur de force, nous remplissons la bassine de différentes masses d’eau  $m_e$  connues. La figure 5.1.2 montre l’évolution de la tension  $U$  délivrée par le pont de Wheatstone en fonction de  $m_e$ . Les barres d’erreur sont plus petites que la taille des points et sont dues au bruit thermique et aux vibrations éventuelles de la table sur laquelle est posée le capteur de force. On voit que, pour  $m_e \lesssim 2900$  g,  $U$  évolue linéairement avec la masse. Le trait en pointillés noirs représente le meilleur ajustement affine entre la tension  $U$  et la masse d’eau dans la bassine  $m_e$ , nous donnant ainsi une calibration qui permet de passer d’une grandeur à l’autre. Cependant, au-delà de  $m_e \approx 2900$  g, le capteur de force semble saturer. Les expériences seront donc faites avec des masses qui ne dépassent pas cette limite, afin que la calibration ainsi obtenue soit valable tout le long de l’expérience.

### 5.1.3 Liquides et suspensions utilisés

Les informations sur les différents mélanges utilisés (liquides newtoniens et suspensions) sont présentées dans cette sous-partie.

#### Fluides newtoniens

- Afin d’étudier le rôle de la masse volumique, nous avons utilisé de l’eau à différents niveaux de salinité (le sel utilisé étant du chlorure de sodium NaCl, ingrédient principal

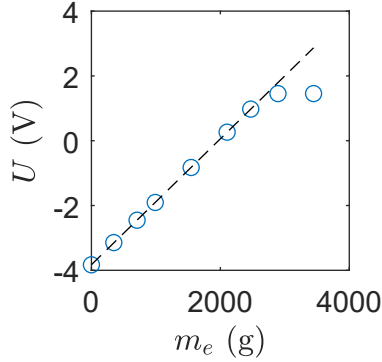


FIGURE 5.1.2 – Tension  $U$  délivrée par le pont de Wheatstone en fonction de la masse d’eau dans la bassine  $m_e$ .

du sel de table) pour garder une viscosité et une tension de surface quasiment constantes en faisant varier uniquement la masse volumique<sup>2</sup>. Nous avons fait six mélanges différents dont les masses volumiques valent  $\rho = \{996, 1042, 1080, 1098, 1117, 1178\}$  kg/m<sup>3</sup>, sachant que nous ne pouvions pas dépasser les 1178 kg/m<sup>3</sup> avec le sel utilisé dans nos conditions expérimentales<sup>3</sup>.

- Ensuite, nous nous intéresserons à l’impact de la viscosité sur la vidange. Les différents mélanges eau/UCON utilisés sont présentés dans le tableau 5.1 en fonction du diamètre de vidange  $d$  pour lequel ils ont été utilisés. Le mélange à  $\eta = 1$  mPa.s correspond à de l’eau pure. Les détails de la mesure des différentes grandeurs physiques sont explicités dans l’annexe A. Dans ce chapitre, une forme de symbole donnée correspond à un diamètre de vidange.

## Suspensions

Les grains utilisés dans nos expériences sont des billes d’hydrogel Jelly-Beads. Utilisées dans la thèse de Falkinoff (2023), elles nous ont été données par M. Bourgoin<sup>4</sup>. Ce sont des petites billes de diamètre  $\sim 1.5$  mm qui, une fois plongées dans de l’eau, se gorgent de cette dernière, grossissant considérablement (voir figure 5.1.3(a)). Les propriétés physiques de ces grains (indice optique et masse volumique) sont alors proches de celles de l’eau (Dijksman et al., 2012). Ce sont des particules qui sont peu rigides : on peut facilement les déformer avec les doigts (voir figure 5.1.3(b)), voir les fragmenter. Afin de connaître le diamètre moyen de ces grains, nous réalisons un histogramme des diamètres sur la figure 5.1.3(c) sur 436 billes. On trouve sur cet échantillon  $d_p = 17 \pm 1$   $\mu$ m. On considèrera que la suspension est monodisperse vue sa faible polydispersité.

Une fois gonflées, les particules ont tout de même une masse volumique légèrement différente de celle de l’eau à cause de leur part non-aqueuse. On effectue donc les expériences

2. La viscosité varie de 1 mPa.s à 1.6 mPa.s entre de l’eau pure et de l’eau saturée en NaCl (Akoulov et Wiens, 2018), ce qui n’influence ni le débit ni la fréquence des bulles comme nous le verrons dans la partie 5.3.2.

3. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Saumure>

4. Merci beaucoup à lui pour ce don.

$d$ (mm)	$\eta$ (mPa.s)	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\gamma$ (mN.m <sup>-1</sup> )	Symbole
40	1	996	72	▲
30	1	996	72	■
	36	1030	52	
	90	1041	52	
	184	1055	51	
	383	1063	49	
	455	1065	49	
20	745	1071	47	●
	1	996	72	
	4	1059	55	
	8	1013	54	
	14.1	1053	53	
	40.6	1030	52	
	67	1037	52	
	112	1045	51	
	184	1052	50	
	383	1063	50	
	402	1063	49	
	513	1067	48	
	700	1071	47	
	1015	1075	46	
1530	1077	46		
2280	1079	45		
2800	1080	45		
3700	1081	44		
4030	1082	44		
10	1	996	72	-
	383	1063	50	
	719	1071	47	

TABLE 5.1 – Propriétés physiques (viscosité  $\eta$ , masse volumique  $\rho$  et tension de surface  $\gamma$ ) des différents mélanges eau/UCON utilisés, triées selon le diamètre de vidange  $d$  pour lequel ils ont été utilisés. L’incertitude sur la densité est de 1 kg.m<sup>-3</sup>, celle sur la viscosité est d’environ 10% lorsque  $\eta < 20$  mPa.s et de 1% autrement et celle sur la tension de surface est de 1 mN.m<sup>-1</sup>. Une forme de symbole donnée correspond à un diamètre de vidange. Il n’y a pas de symbole associé au cas  $d = 10$  mm car ce diamètre sera traité à part dans la partie 5.4.

dans un mélange eau/UCON de viscosité  $\eta \approx 4$  mPa.s (ce qui correspond à  $\sim 10\%$  de UCON environ) afin d’avoir un liquide dont la masse volumique est identique à celle des hydrogels<sup>5</sup>.

5. Nous avons aussi essayé avec de l’eau salée mais le sel fragilise drastiquement les billes d’hydrogel, qui se cassent ensuite pendant les expériences. L’utilisation d’acide citrique nous a aussi été suggérés, ce qui fait varier le diamètre des particules.

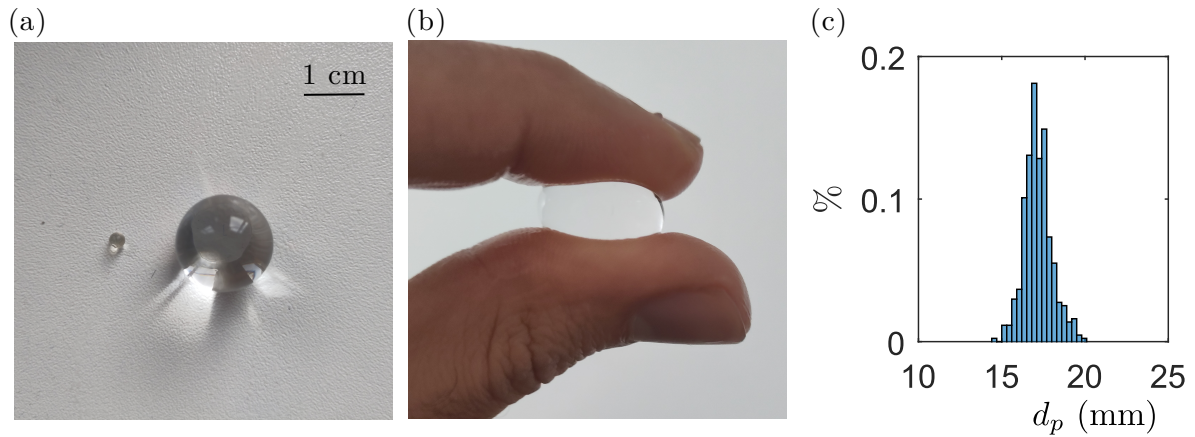


FIGURE 5.1.3 – (a) Photographie d'une bille hydrogel avant (gauche) et après (droite) avoir été laissée plus de 24 heures dans de l'eau. (b) Photographie d'une bille d'hydrogel aplatie à la force des doigts. (c) Distribution des diamètres des billes d'hydrogel réalisée sur 436 billes.

Ce mélange est obtenu en rajoutant progressivement de l'eau ou du UCON dans un bécher contenant quelques billes d'hydrogel et de l'eau afin d'ajuster petit à petit la masse volumique du liquide, le but étant que les billes ne sédimentent pas et ne remontent pas à la surface (égalité des masses volumiques). Comme nous le verrons plus tard (voir par exemple les photos figure 5.5.1(a)), l'indice optique des grains et du fluide est proche, ce qui permet de voir au travers du mélange. Nous avons travaillé avec deux types de billes d'hydrogel différents, un de diamètre  $d_p = 17 \pm 1$  mm et un autre  $d_p = 10 \pm 1$  mm (voir tableau 5.2).

### Diamètre de vidange

Lors de la vidange d'un réservoir rempli de particules, ces dernières peuvent former des arches au niveau du trou de vidange, ce qui induit une interruption de l'écoulement, phénomène que l'on appelle "clogging" (Hidalgo et al., 2013). Le rapport  $d/d_p$  joue un rôle important dans l'apparition ou non de clogging : plus  $d/d_p$  est élevé, moins les arches arrivent à se former et moins l'écoulement sera interrompu (Marin et al., 2018; Vani et al., 2022). Après quelques essais, nous avons choisi d'utiliser des diamètres de vidange de sorte à avoir  $d/d_p \approx 3$  afin d'être dans un cas où le clogging au niveau du trou de vidange est très peu probable. La forme des symboles utilisés correspond à un diamètre  $d$  de vidange donné (et donc aussi à un diamètre  $d_p$  de particules donné, voir tableau 5.2).

$d$ (mm)	$d_p$ (mm)	Symbole
30	$10 \pm 1$	■
40	$17 \pm 1$	▲

TABLE 5.2 – Paramètres géométriques ( $d$  est le diamètre de vidange et  $d_p$  celui des particules) utilisés dans les expériences avec des suspensions. Ces dernières sont réalisées avec des billes d'hydrogel dans un mélange eau/UCON de même masse volumique.

## 5.2 Observations générales et traitement numérique

Maintenant que nous avons présenté le montage expérimental, nous allons voir dans cette partie la manière dont les grandeurs physiques qui nous intéressent (débit et fréquence de formation des bulles) ont été mesurées. Nous nous baserons sur une expérience typique afin d'illustrer nos dires.

### 5.2.1 Débits volumiques

La figure 5.2.1(a) présente une chronophotographie d'une vidange réalisée avec de l'eau et  $d = 30$  mm. Toutes les images sont à la même échelle. Une manière d'obtenir le débit volumique consiste à mesurer à la caméra la vitesse à laquelle se vide le cylindre, ce qui revient à déterminer la position de la surface libre au cours du temps. Pour ce faire, pour chaque image, on moyenne l'intensité lumineuse pour chaque ordonnée  $z$  (l'origine étant en bas de l'image) et on trace l'intensité moyenne  $I$  ainsi obtenue en fonction du temps  $t$  de l'expérience (voir figure 5.2.1(b)). Le jaune représente les intensités lumineuses élevées et le bleu les intensités faibles. Dans la suite, ce code couleur sera utilisé dans tous les graphiques de la sorte. La présence d'une interface liquide/air réduisant l'intensité lumineuse, la position de la surface libre se repère bien sur la figure 5.2.1(b), où l'on voit une longue bande bleue (celle par laquelle passe une ligne pleine rouge, qui est un guide visuel). Les pointillés horizontaux rouges font le lien entre les images de la figure 5.2.1(a) et la figure 5.2.1(b) en repérant pour chaque photo de la figure 5.2.1(a) le temps  $t$  et la position de la surface libre  $z$ . La position exacte de la surface est complexe à déterminer et on voit en effet sur les images figure 5.2.1(a) que la présence de bulles au niveau de la surface libre complique la détermination de sa position, ce qui explique le fait que le signal de la figure 5.2.1(b) soit bruité. Les traits verticaux bleus en dessous de la surface libre correspondent aux bulles qui remontent dans le liquide. La zone de faible intensité que l'on voit pour  $t < 3$  s et  $0 < z < 100$  mm correspond à la main de l'expérimentateur qui retire le bouchon afin de lancer la vidange. On peut repérer le bas du cylindre, indiqué par les pointillés violets, que l'on nomme  $z_0$  ( $z_0$  correspond exactement au bas du cylindre modulo les erreurs de parallaxe et l'épaisseur du biseau du trou de vidange, qui fait 1 cm). La hauteur de liquide présent dans la bouteille sera notée  $z - z_0$ . On remarque que la position de la surface libre semble décroître linéairement en fonction du temps. On fait l'hypothèse que le débit est constant et donc que la vitesse de la surface libre  $v_s$  l'est aussi étant donné que  $D_V = (\pi D_0^2 v_s)/4$  (voir partie 5.2.2 pour plus de justification). On peut facilement déduire la vitesse de la surface libre, en prenant la pente de la ligne pleine rouge. Le débit volumique  $D_V$  est donc considéré comme étant constant et vaut  $D_V = 4.0 \pm 0.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$  ici, l'étude des incertitudes étant présentée dans la partie 5.2.2. La constance du débit n'est vraie que pour les  $d = \{20, 30, 40\}$  mm, comme nous le verrons plus tard dans la partie 5.2.4.

Grâce à la présence du capteur de force, nous disposons d'une autre méthode pour déterminer le débit volumique, ce qui permet de vérifier la cohérence des résultats. La figure 5.2.1(c) représente la masse mesurée par le capteur de force en fonction du temps  $t$ . On remarque que, en moyenne, la masse évolue de manière linéaire en fonction du temps, comme le souligne la droite en pointillés blancs qui correspond à un ajustement linéaire du signal brut pour  $5 < t < 30$  s. Le signal est très bruité dû au fait que de petites masses d'eau tombent

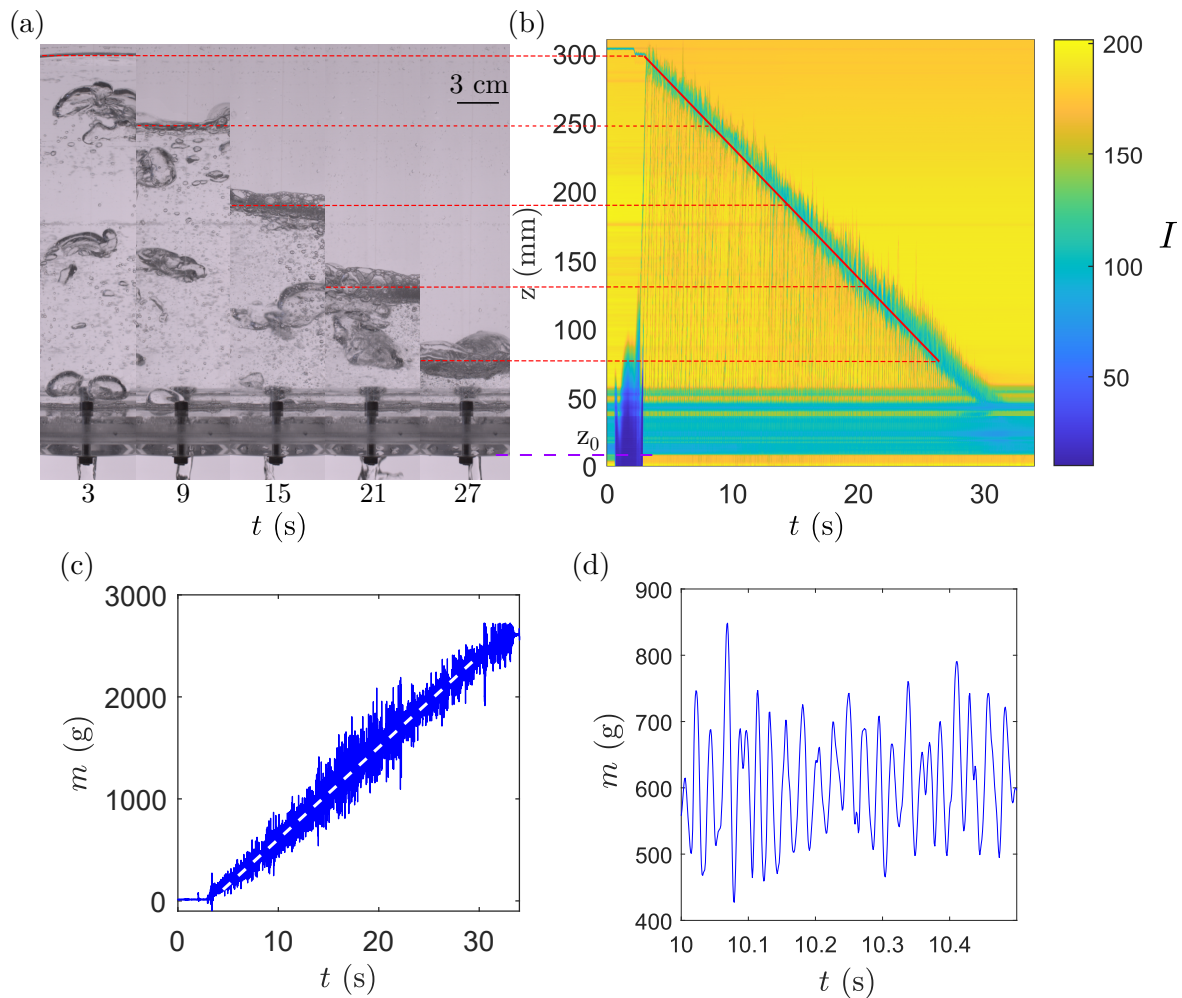


FIGURE 5.2.1 – **(a)** Chronophotographie d’une vidange d’eau avec  $d = 30$  mm. Toutes les images sont à la même échelle. **(b)** Intensité moyennée horizontalement pour chaque ordonnée  $z$  en fonction du temps. Les zones jaunes correspondent aux intensités élevées et les zones bleues aux intensités faibles. La ligne pleine rouge est un guide visuel. Les pointillés rouges horizontaux sont des guides visuels qui font le lien entre la figure (a) et la figure (b) en repérant pour chaque photo de la figure (a) le temps  $t$  et la position de la surface libre  $z$ . **(c)** Masse d’eau présente dans la bassinée mesurée par le capteur de force en fonction du temps. Les pointillés blancs correspondent à un ajustement linéaire du signal bleu pour  $5 < t < 30$  s. **(d)** Zoom de la figure (c) sur la plage de temps  $10 < t < 10.5$  s.

régulièrement dans la bassinée, donnant des à-coups sur le capteur de force, que l’on peut observer sur la figure 5.2.1(d). Il s’agit d’un zoom de la figure 5.2.1(c) sur la plage de temps  $10 < t < 10.5$  s. Les oscillations sont de l’ordre de  $1/40$  s, ce qui est bien plus rapide que la fréquence à laquelle des bulles sont formées et qui correspond aux vibrations de la bassinée. En prenant la pente de l’ajustement linéaire en pointillés blancs sur la figure 5.2.1(c), on obtient le débit massique  $D_m$ , que l’on convertit ensuite en débit volumique avec  $\rho D_V = D_m$ . Nous trouvons avec cette méthode  $D_V = 4.0 \pm 0.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ , ce qui coïncide parfaitement avec la valeur trouvée à l’aide de la vidéo.



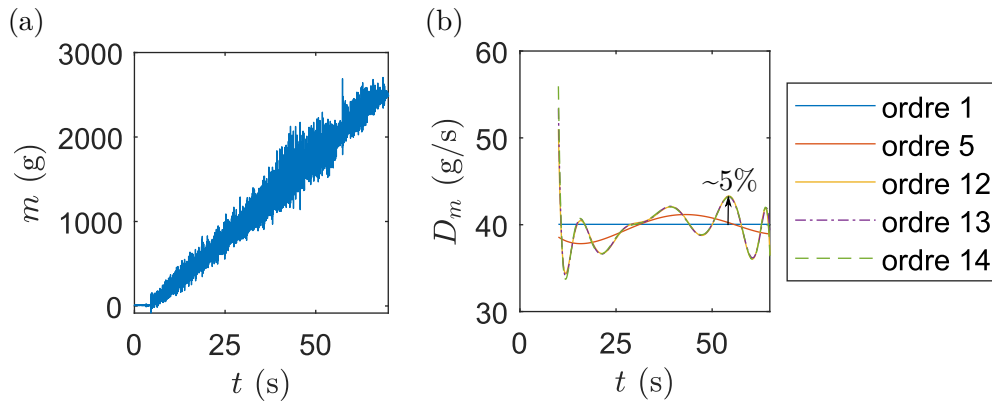


FIGURE 5.2.2 – (a) Masse  $m$  d'eau vidangée en fonction du temps déterminée avec le capteur de force pour une expérience réalisée avec de l'eau  $d = 20$  mm. (b) Débit massique en fonction du temps pour des ajustements polynomiaux de la masse en fonction du temps (a) à différents ordres.

## 5.2.2 Incertitudes sur les débits

### Vidange à "grands" diamètres

L'étude présentée dans cette partie porte sur la vidange des "grands" diamètres, c'est-à-dire  $d \geq 20$  mm (donc  $d = \{20, 30, 40\}$  mm). La figure 5.2.2(a) montre la masse d'eau vidangée en fonction du temps déterminée avec le capteur de force pour une expérience réalisée avec  $d = 20$  mm. Le signal est très bruité et il n'est donc pas évident de savoir à quoi ressemble exactement le signal. Néanmoins, sa forme nous a poussés à prendre comme modèle empirique le cas d'un débit constant (donc on modélise la masse en fonction du temps par une droite). Afin d'avoir une idée de l'erreur induite par cette modélisation, nous avons réalisé des ajustements polynomiaux de la masse en fonction du temps à différents ordres. La figure 5.2.2(b) montre le débit volumique obtenu pour des ajustements d'ordre 1, 4, 12, 13, et 14. L'ordre 1 correspond au modèle choisi pour les diamètres de vidange  $d = \{20, 30, 40\}$  mm et correspond à un débit constant. On voit qu'à partir de l'ordre 12, les courbes se superposent. On peut donc supposer qu'un ajustement d'ordre 12 ou supérieur permet de bien retranscrire l'allure de la courbe  $m(t)$ . On peut estimer l'erreur que l'on fait en supposant que le débit est constant en regardant à quel point la valeur ainsi obtenue s'écarte d'un modèle plus précis, à savoir un ajustement d'ordre 12 ou plus. On estime que l'erreur vaut  $\sim 5\%$  et ceci est en fait valable pour tous les "grands" diamètres de vidange  $d = \{20, 30, 40\}$  mm. Les débits seront donc indiqués avec une erreur de 5% dans ce manuscrit <sup>6</sup>.

Estimer l'erreur sur la valeur de débit déterminée à l'aide de la caméra est plus complexe étant donné que nous n'avons pas directement isolé le signal  $z(t)$ . Cependant, on utilise la même hypothèse que pour la mesure au capteur de force : on suppose que le débit est constant. En pointant manuellement plusieurs droites, on trouve une incertitude de l'ordre de 1%. La principale source d'erreur vient donc de l'hypothèse d'un débit constant, qui est de  $\sim 5\%$ . Dans le cas de suspensions, une étude similaire amène à une erreur de l'ordre de  $\sim 10\%$ .

6. Que le signal soit filtré ou non, la valeur du débit déterminée par cette méthode n'est pas modifiée.

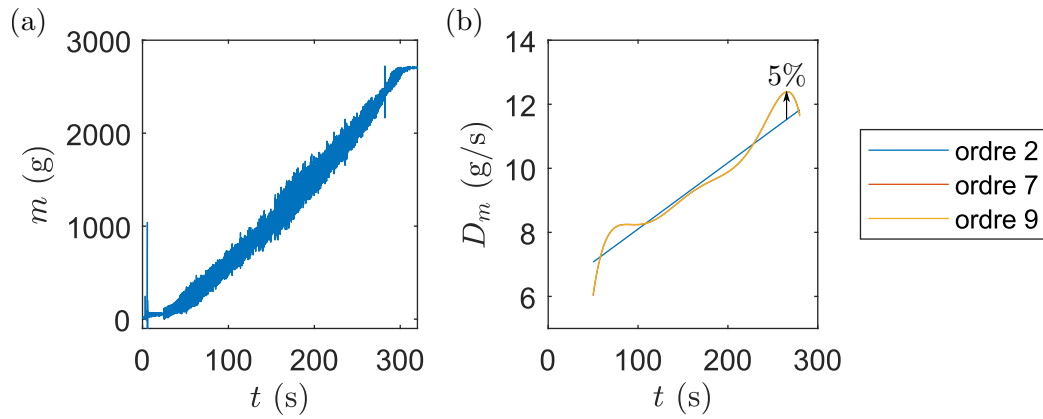


FIGURE 5.2.3 – (a) Masse  $m$  d'eau vidangée en fonction du temps déterminée avec le capteur de force pour une expérience réalisée avec de l'eau et  $d = 10$  mm. (b) Débit massique en fonction du temps pour des ajustements polynomiaux de la masse en fonction du temps à différents ordres.

### Vidange à "petit" diamètre

Pour le plus petit diamètre de vidange  $d = 10$  mm, la physique n'est pas la même et on ne peut plus considérer que le débit est constant (voir partie 5.2.4). La figure 5.2.3(a) montre l'exemple de la masse détectée par le capteur de force en fonction du temps pour une expérience réalisée avec de l'eau. On voit cette fois que la masse ne croît pas linéairement avec le temps mais de plus en plus rapidement. De par la forme du signal, on modélise la courbe  $m(t)$  par une parabole (donc un polynôme d'ordre 2), ce qui implique que le débit massique évolue linéairement avec le temps. Encore une fois, afin de déterminer l'erreur induite par une telle hypothèse, nous comparons sur la figure 5.2.3(b) les débits obtenus en modélisant la courbe  $m(t)$  par des polynômes de différents ordres. On voit que pour des ordres supérieurs à 7, les modèles convergent, signifiant que cela est suffisant pour capturer convenablement les variations de la masse au cours du temps. Le débit obtenu ainsi ne diffère que de  $\sim 5\%$  au maximum avec le modèle d'un débit linéaire (et donc d'une évolution quadratique de  $m$  avec  $t$ ).

### 5.2.3 Fréquence des bulles

Afin de nous aider à déterminer la fréquence des bulles, regardons ce qu'il se passe lors du cycle de formation d'une bulle. La figure 5.2.4(a) montre une chronophotographie d'une vidange réalisée avec de l'eau et  $d = 30$  mm (même expérience que la figure 5.2.1) sur une plage de temps correspondant approximativement à un cycle de formation de bulle ( $5.6 < t < 5.76$  s). Toutes les images sont à la même échelle. On voit que pour  $5.6 \leq t \leq 5.67$  s, le jet d'eau en dessous du trou de vidange s'amincit progressivement, annonçant la naissance d'une bulle au niveau du trou, indiquée par la flèche rouge. Une fois la bulle formée, elle remonte le long du cylindre et le jet d'eau en dessous de la bouteille s'épaissit de nouveau ( $5.67 \leq t \leq 5.73$  s). L'étude détaillée du processus est réalisée par Rohilla et Das (2020). On remarque sur les photos que le jet se distingue par ses bordures sombres et le fait que son intérieur soit moins lumineux que les alentours (l'eau absorbant partiellement la lumière). On



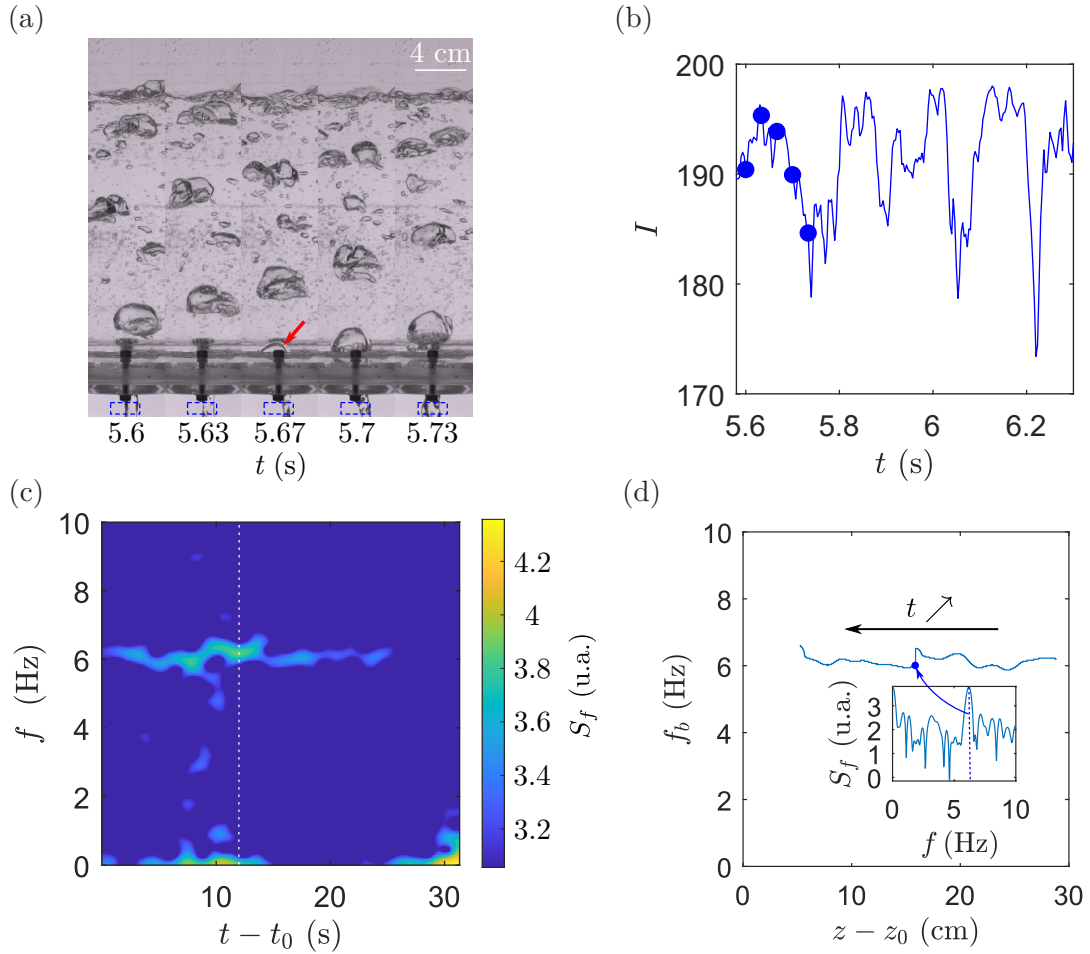


FIGURE 5.2.4 – (a) Chronophotographie d'une vidange d'eau avec  $d = 30$  mm sur la plage de temps  $5.6 \leq t \leq 5.76$  s. Toutes les images sont à la même échelle. La flèche rouge indique une bulle qui se forme au niveau du trou de vidange. (b) Intensité lumineuse moyennée sur le rectangle en pointillés bleus présent sur les photos (a) en fonction du temps pour  $5.55 < t < 6.3$  s. Les points bleus correspondent aux temps des images (a). (c) Diagramme temps-fréquence du signal (b) en fonction de  $t - t_0$ , où  $t_0$  correspond au début de la vidange. L'échelle logarithmique indique  $S_f(f, t)$  la contribution d'une fréquence donnée au spectre totale, en unité arbitraire. Le bleu correspond à des fréquences dont la contribution au spectre total est inférieure à  $S_f < 3$  u.a. afin de faire ressortir les fréquences les plus importantes. Les pointillés blancs indiquent  $t = 12$  s, ce qui correspond au temps auquel le spectre du signal est représenté dans l'insert de la figure (d). (d) Fréquence des bulles en fonction de la hauteur de liquide.  $f_b$  correspond à la fréquence dont la contribution est la plus importante au spectre à l'instant  $t$  avec  $f_b > 1$  Hz. Le passage de  $t - t_0$  à  $z - z_0$  la hauteur de liquide se fait en utilisant la valeur du débit volumique calculée comme précisé dans la partie 5.2.1.  $S_f$  en fonction de  $f$  au temps  $t - t_0 = 12$  s (pointillés blancs sur (c)). La fréquence vérifiant  $f > 1$  Hz pour laquelle  $S_f$  est maximale est repérée par des pointillés bleus et reportée sur la figure (d) par un point bleu.

s'attend donc à ce que l'intensité dans le cadre en pointillés bleus soit plus élevée lorsqu'une bulle est en train de se former ( $t \approx 5.67$  s, jet d'eau peu épais) que lorsqu'elle commence tout juste à remonter et que le jet d'eau est plus épais ( $t \approx 5.73$  s). Ainsi, on imagine que cette intensité oscille au rythme de la formation des bulles. On aurait aussi pu étudier la fréquence des bulles en regardant directement l'intensité au-dessus du trou de vidange. Néanmoins, cet endroit est plus sujet à des fluctuations de l'intensité moyenne, en particulier lorsqu'il reste peu de liquide dans le cylindre et que la surface libre s'approche du trou de vidange, ce qui perturbe fortement le spectre du signal.

La figure 5.2.4(b) représente l'intensité lumineuse moyennée dans le cadre bleu représenté sur la figure 5.2.4(a) en fonction du temps pour  $5.58 < t < 6.3$  s. Les points bleus correspondent aux images de la figure 5.2.4(a). On voit que l'on a bien l'intensité moyenne qui oscille, avec un minimum lorsque le jet d'eau est épais ( $t \approx 5.73$  s). Afin d'obtenir la fréquence de formation des bulles, on étudie le spectre de ce signal. Étant donné que nous ne savons pas si cette fréquence dépend du temps ou non (on ne sait pas a priori si elle dépend de la hauteur de liquide ou non), on cherche plus exactement à connaître l'évolution du spectre au cours du temps. Pour cela, on effectue une analyse temps-fréquence à l'aide de la fonction `tfrsp`<sup>7</sup> sur MATLAB<sup>®</sup>. Cette fonction détermine le spectre d'un signal en un temps  $t$  en analysant le signal entre  $t - t_s$  et  $t + t_s$  où  $t_s$  est un paramètre choisi tel qu'il soit grand devant la période typique de la formation d'une bulle. Pour cette expérience, on choisit par exemple  $t_s = 4$  s par rapport aux  $\sim 0.15$  s du temps typique entre deux bulles (voir figure 5.2.4(a)). Il faut donc rester vigilant quant à l'interprétation du spectre pour les temps courts ( $t < t_s$ ) et les temps proches de la fin de la vidange. Afin d'éviter que la composante continue du spectre ne soit trop importante, on soustrait toujours la valeur moyenne du signal étudié.

Sur la figure 5.2.4(c) est représentée la contribution de chaque fréquence entre 0 et 10 Hz au spectre en fonction de  $t - t_0$ , où  $t_0$  est le temps de début de vidange. L'échelle logarithmique indique  $S_f(f, t)$  la contribution d'une fréquence donnée au spectre total, en unité arbitraire. Le bleu correspond à des fréquences dont la contribution au spectre total est inférieure à  $S_f < 3$  u.a. afin de faire ressortir les fréquences les plus importantes. Les pointillés blancs indiquent  $t = 12$  s, ce qui correspond au temps auquel le spectre du signal est représenté dans l'insert de la figure (d). Plus une fréquence donnée à un temps donné est jaune/clair, plus elle a une contribution importante au spectre. On remarque qu'une fréquence ressort autour de 6 Hz tout le long de l'expérience. Afin de tracer ce spectre, nous avons au préalable retiré la composante continue du signal, comme mentionné plus tôt. Néanmoins, celle-ci fluctuant le long de l'expérience, on remarque qu'il y a de fortes contributions aux fréquences faibles qui viennent d'un reste de la composante continue. Afin de déterminer une fréquence caractéristique pour la formation des bulles à un temps donné, on extrait, à l'aide de quelques lignes de code écrites par nos soins, la fréquence  $f_b$  dont la contribution est la plus importante, avec  $f_b > 1$  Hz afin d'ignorer la composante continue. Connaissant le débit volumique (qui est constant, voir partie 5.2.1), on peut convertir  $t - t_0$  en la hauteur de fluide  $z - z_0$ , ce qui permet de tracer  $f_b$  en fonction de la hauteur de liquide  $z - z_0$  (voir figure 5.2.4(d)). Le signal s'arrête avant  $z - z_0 = 0$  car le fond du cylindre n'est pas visible à la caméra. L'insert présente le spectre du signal (b) en échelle logarithmique à  $t = 12$  s. La fréquence vérifiant  $f > 1$  Hz pour laquelle  $S_f(f, t)$  est maximale est repérée par des pointillés bleus et reportée

---

7. La documentation de cette fonction se trouve sur le site <https://tftb.nongnu.org/>.

sur la figure (d) par un point bleu. On remarque que la fréquence de formation des bulles est approximativement constante au cours de l'expérience.

### 5.2.4 Impact du diamètre de vidange sur la physique du problème

La figure 5.2.5 présente quatre vidanges effectuées avec de l'eau pour les diamètres  $d = \{10, 20, 30, 40\}$  mm (correspondant aux suffixes 1, 2, 3 et 4 respectivement). Pour chaque vidange est présentée une chronophotographie **(a)**, l'intensité lumineuse moyennée pour chaque  $z$  en fonction du temps **(b)** et la fréquence des bulles en fonction de la hauteur de liquide restant  $z - z_0$  **(c)**. On remarque tout d'abord sur les chronophotographies (figure 5.2.5(a1-4)) que, plus le diamètre est petit, plus la vidange est lente et plus les bulles générées sont petites, conformément à ce que l'on attend. Pour les diamètres les plus élevés ( $d = \{20, 30, 40\}$  mm, figure 5.2.5(a2-4)), les bulles se fragmentent et génèrent ainsi beaucoup de petites bulles, ce qui rend plus complexe l'identification de la surface libre. Plus  $d$  est grand, plus ce phénomène est important. De plus, pour une hauteur de fluide  $z - z_0$  donnée, la fréquence de formation des bulles est plus élevée lorsque le diamètre de vidange est plus grand (figure 5.2.5(c1-4)). Pour les expériences réalisées avec  $d = \{20, 30, 40\}$  mm, on voit sur les figures 5.2.5(b2-4) que le débit volumique est constant et sur les figures 5.2.5(c2-4) que la fréquence des bulles est approximativement constante aussi. On note tout de même des fluctuations de  $f_b$ , tout particulièrement dans le cas  $d = 20$  mm où la fréquence des bulles décroît légèrement tout le long de la vidange avant de remonter lorsqu'il reste peu de fluide ( $z - z_0 < 100$  mm). Néanmoins, comme l'erreur relative sur la valeur moyenne de  $f_b$  est semblable pour les diamètres  $d = \{40, 30, 20\}$  mm ( $\sim 15\%$ ), nous traiterons ces cas de manière équivalente. Par contre, pour le diamètre  $d = 10$  mm, on remarque que le débit volumique augmente avec le temps (de manière linéaire, voir partie 5.2.2) car la surface libre descend de plus en plus vite (figure 5.2.5(b1)) et la fréquence des bulles décroît avec la quantité de liquide présente dans le cylindre (figure 5.2.5(c1)). En raison de cette observation, nous traiterons séparément le cas  $d = 10$  mm des autres dans la partie 5.4. On appellera "grands" diamètres les cas  $d > 20$  mm et "petit" diamètre le cas  $d = 10$  mm.

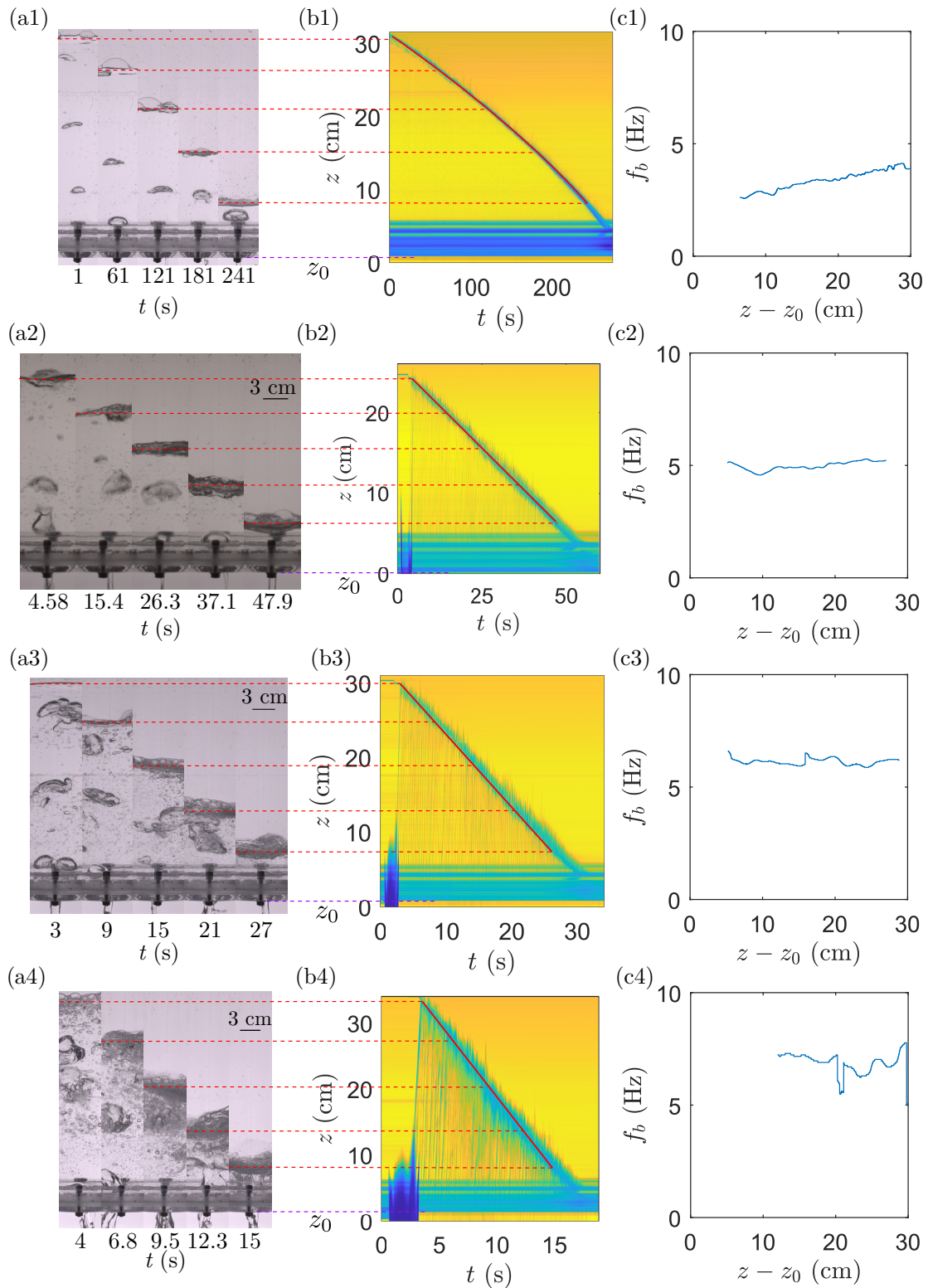


FIGURE 5.2.5 – (a) Chronophotographie de la vidange. (b) Intensité moyennée à chaque  $z$  en fonction du temps  $t$ . (c) Fréquence des bulles en fonction de la hauteur de liquide restant  $z - z_0$ . Les suffixes 1, 2, 3 et 4 désignent respectivement des expériences réalisées avec  $d = 10, 20, 30$  et  $40$  mm.

## 5.3 Vidange d'un fluide newtonien : grands diamètres de vidange

Dans cette partie, nous nous intéresserons à la vidange de liquides newtoniens pour les diamètres de vidange  $d = \{20, 30, 40\}$  mm, pour lesquels le débit volumique et la fréquence de formation des bulles restent constants durant toute la vidange. Le principal but de cette partie est de comprendre comment les paramètres physiques du liquide influencent le débit et la fréquence des bulles. Nous allons étudier l'importance de la masse volumique dans un premier temps et celle de la viscosité dans un second temps.

### 5.3.1 Impact de la masse volumique du fluide

Nous considérons dans cette sous-partie la vidange d'eau salée uniquement. Cela permet de modifier la masse volumique en ne variant que très peu la viscosité et la tension de surface.

#### Débits

La figure 5.3.1(a) montre l'évolution du débit volumique en fonction de la masse volumique pour les solutions d'eau salée présentées dans la partie 5.1.3, avec  $d = 20$  mm. Les points bleus pleins ( $\bullet$ ) représentent les valeurs obtenues à l'aide de la vidéo et les points vides ( $\circ$ ) à l'aide du capteur de force. On remarque dans un premier temps que les valeurs trouvées à l'aide de la vidéo sont toujours légèrement inférieures ou égales à celles trouvées à l'aide du capteur de force, mais que les deux coïncident aux incertitudes près. La figure 5.3.1(b), sur laquelle est tracée le débit volumique déterminé à l'aide de la vidéo en fonction de celui obtenu grâce au capteur de force, permet de bien le voir (les pointillés noirs représentent le cas d'égalité entre les deux valeurs). Aucune explication n'a été trouvée à ce léger décalage de valeurs. On voit sur la figure 5.3.1(a) que le débit volumique semble très légèrement augmenter avec la masse volumique, mais cette augmentation, sur la plage de masse volumique étudiée ici, n'est pas significative par rapport aux barres d'erreur, avec  $D_V = 4.0 \pm 0.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$  pour  $\rho = 996 \text{ kg}/\text{m}^3$  et  $D_V = 4.3 \pm 0.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$  pour  $\rho = 1178 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Nous considérerons donc que sur cette plage de valeur (qui couvre toutes les valeurs des solutions utilisées dans nos expériences, voir tableau 5.1), aux incertitudes près, le débit volumique est indépendant de la masse volumique.

#### Fréquence des bulles

L'évolution de la fréquence des bulles en fonction de la hauteur de liquide  $z - z_0$  est présentée sur la figure 5.3.2(a) pour les six masses volumiques étudiées pour un trou de vidange de  $d = 20$  mm. On observe, pour une masse volumique donnée, que la fréquence de formation des bulles décroît légèrement avec la quantité d'eau restante, comme mentionné dans la partie 5.2.4 sur le cas spécifique  $d = 20$  mm. On rappelle néanmoins que l'on considère  $f_b$  comme étant approximativement constante étant donné que les variations de ses valeurs restent de l'ordre de  $\sim 5\%$ , comme pour  $d = \{30, 40\}$  mm. On remarque aussi que plus la masse volumique est élevée, plus  $f_b$  est faible à une hauteur de liquide  $z - z_0$  donnée. On peut aussi noter que, pour les masses volumiques les plus élevées ( $\rho = 1117 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et

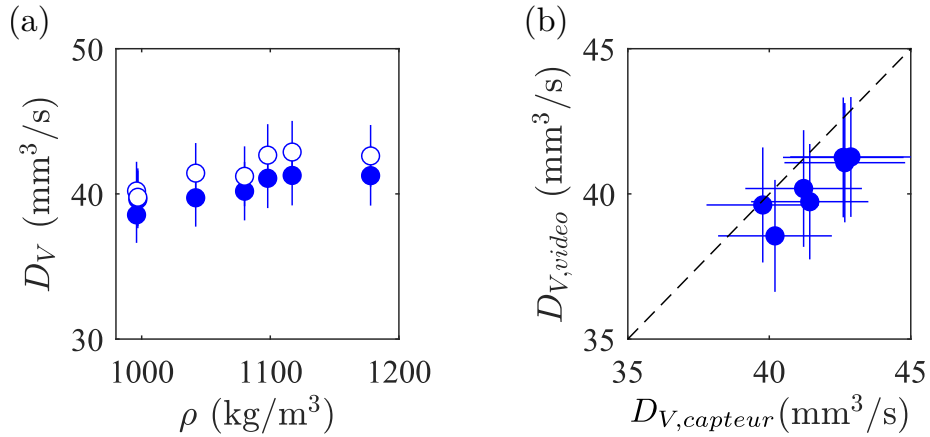


FIGURE 5.3.1 – (a) Débit volumique en fonction de la masse volumique pour  $d = 20$  mm. Les points remplis ( $\bullet$ ) représentent les valeurs obtenues à l’aide de la vidéo et les points vides ( $\circ$ ) à l’aide du capteur de force. (b) Débit volumique mesuré à l’aide de la vidéo en fonction du débit volumique mesuré à l’aide du capteur de force. Les pointillés noirs correspond à la droite d’équation  $D_{V,video} = D_{V,capteur}$ .

$\rho = 1178 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ), l’allure de la courbe n’est pas identique en fin de vidange ( $z - z_0 < 10$  cm). La valeur moyenne de la fréquence sur la plage  $10 < z - z_0 < 20$  cm  $\langle f_b \rangle_z$  en fonction de la masse volumique est présentée figure 5.3.2(b). Les incertitudes correspondent à l’écart-type des fréquences utilisées pour déterminer  $\langle f_b \rangle_z$  (données de la figure 5.3.2(a)). On voit nettement apparaître le fait que la fréquence des bulles décroît avec la masse volumique.

Inspirés par une formule portant sur les périodes d’oscillations de la pression au niveau de la surface libre proposée par Clanet et Searby (2004) (équation 1.2.3), nous avons tracé la fréquence des bulles multipliée par la racine de la masse volumique  $f_b \sqrt{\rho}$  en fonction de la hauteur de liquide  $z - z_0$  (voir figure 5.3.2(c)). On remarque que cela permet de faire coïncider les données des différentes masses volumiques. La figure 5.3.2(d) présente la valeur moyenne de cette grandeur (donc  $\langle f_b \rangle_z \sqrt{\rho}$ ) en fonction de la masse volumique. On voit alors bien que  $\langle f_b \rangle_z \sqrt{\rho}$  est indépendant de  $\rho$  sur la plage étudiée ici.

### 5.3.2 Impact de la viscosité

Afin d’étudier l’influence de la viscosité, nous utilisons des mélanges eau/UCON dont la viscosité varie de  $\eta = 1$  mPa.s à  $\eta = 4030$  mPa.s (voir tableau 5.1). Les variations de densité associées (faibles) seront prises en compte.

#### Observations générales

La figure 5.3.3 compare deux vidanges réalisées avec  $d = 20$  mm, une avec de l’eau et l’autre avec un mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 2.8$  Pa.s. Les figures 5.3.3(a1-2) présentent une chronophotographie pour chaque mélange, le suffixe 1 correspondant au cas de l’eau pure et le suffixe 2 au mélange eau/UCON. On remarque que dans le mélange visqueux, les bulles ont une taille et une forme remarquablement identiques et sont bien moins nombreuses que pour l’eau, où l’on distingue de multiples bulles dont les plus grosses se fragmentent. La



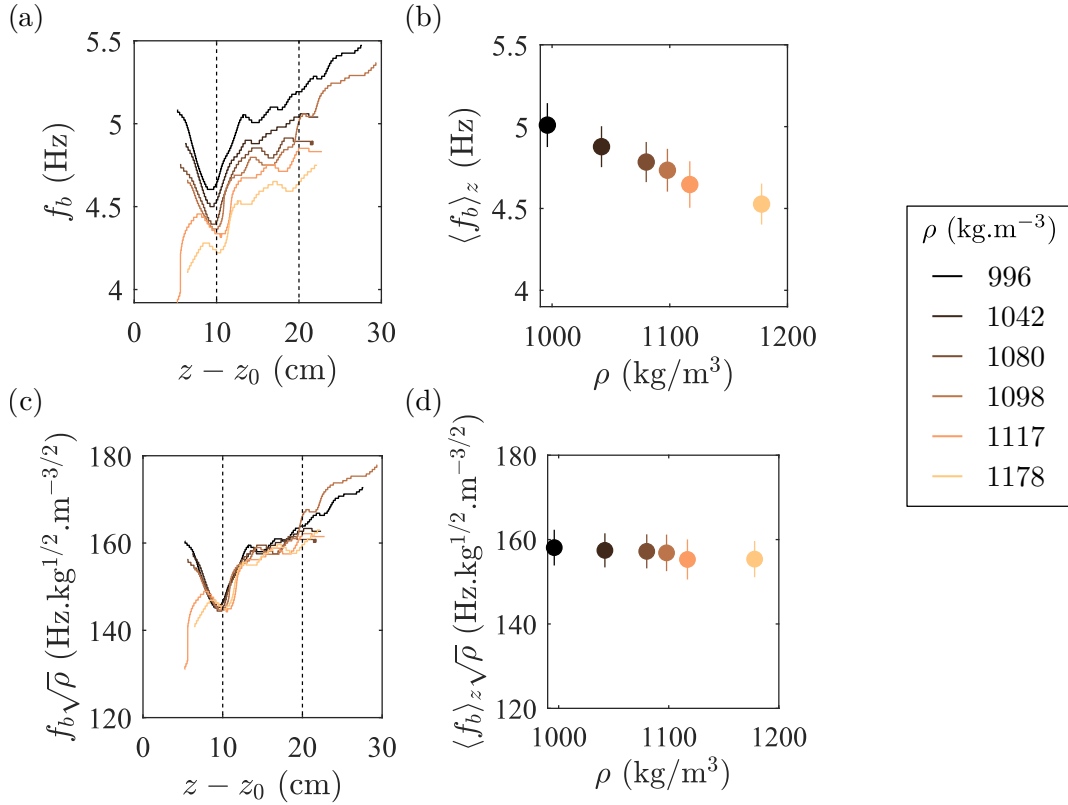


FIGURE 5.3.2 – (a) Fréquence des bulles  $f_b$  en fonction de la hauteur de liquide  $z - z_0$  pour des mélanges d'eau salée de différentes masses volumiques avec un trou de vidange de  $d = 20$  mm. Chaque masse volumique a une couleur donnée (voir légende à droite de la figure). Les pointillés noirs repèrent les hauteurs de liquide  $z - z_0 = 10$  cm et  $z - z_0 = 20$  cm. (b) Fréquence moyenne des bulles sur la plage  $10 < z - z_0 < 20$  cm  $\langle f_b \rangle_z$  en fonction de la masse volumique. (c)  $f_b \sqrt{\rho}$  en fonction de la hauteur de liquide  $z - z_0$ . (d)  $\langle f_b \rangle_z \sqrt{\rho}$  en fonction de la masse volumique.

surface libre est aussi moins agitée dans le cas visqueux. Cela vient probablement du fait que les bulles vont moins vite se fragmentent moins. Les figures 5.3.3(b1-2) montrent l'intensité moyennée pour chaque  $z$  en fonction du temps. Le débit volumique semble constant tout le long de la vidange pour les deux mélanges. On remarque cependant que pour les échelles de temps mises en jeu pour un même hauteur de liquide vidangée ne sont pas les mêmes. Les figures 5.3.3(c1-2) présentent l'évolution de la fréquence des bulles avec la hauteur de liquide  $z - z_0$ . La figure 5.3.3(c2) montre en insert un zoom pour  $f_b \in [0.9, 1.4]$  Hz. On voit que dans les deux cas,  $f_b$  est constant tout le long de l'expérience. La fréquence d'apparition moyenne des bulles est beaucoup plus faible pour le mélange visqueux, qui vaut  $\langle f_b \rangle_z = 1.16 \pm 0.06$  Hz contre  $\langle f_b \rangle_z = 4.8 \pm 0.8$  Hz pour l'eau.

La constance du débit et de la fréquence des bulles est valable pour l'ensemble des expériences réalisées avec  $d = \{40, 20, 30\}$  mm avec des liquides newtoniens. Le débit volumique et la fréquence d'apparition de bulles diminuent avec la viscosité, ce que nous allons étudier quantitativement dans la suite de cette sous-partie.

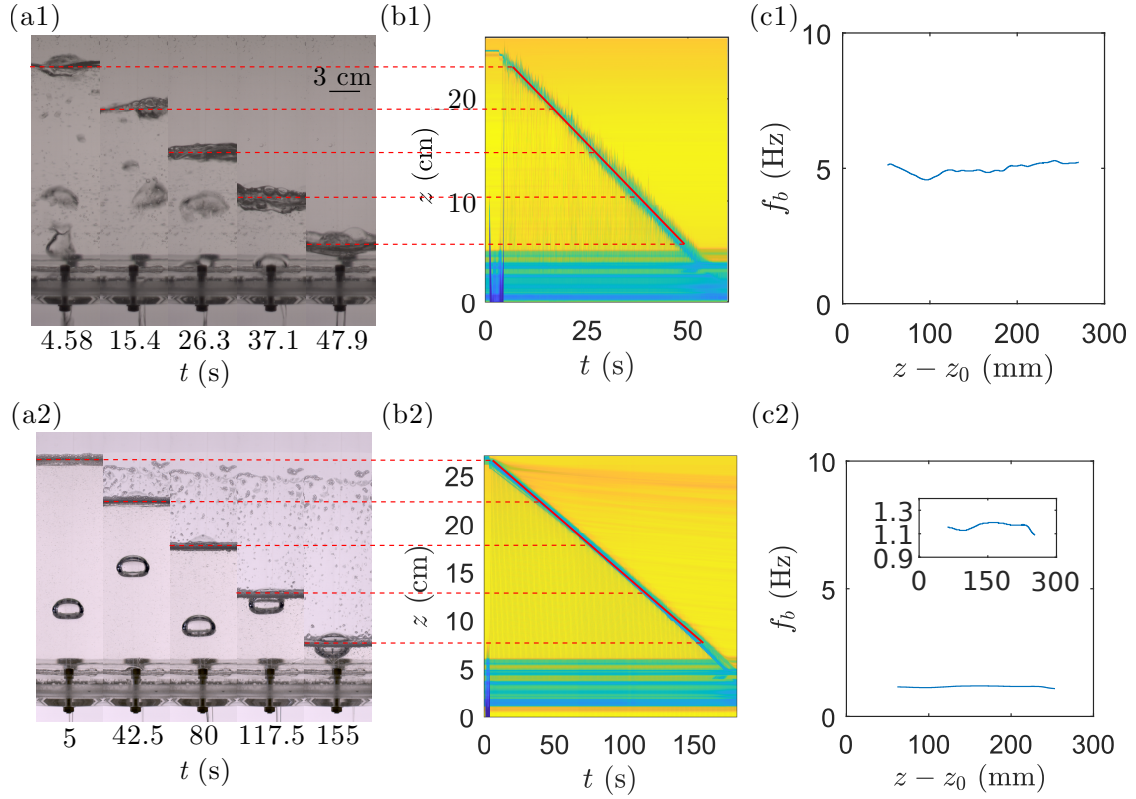


FIGURE 5.3.3 – **(a)** Chronophotographies **(a1)** d’une vidange d’eau et **(a2)** d’une vidange d’un mélange eau/UCON de viscosité  $\eta = 2.8$  Pa.s. **(b)** Intensité moyennée pour chaque ordonnée  $z$  en fonction du temps. La ligne rouge pleine est un guide visuel. **(c)**  $f_b$  en fonction de la hauteur de liquide  $z - z_0$ . **(c2)** L’insert correspond à un zoom sur la plage  $f_b \in [0.9, 1.4]$  Hz. Le suffixe 1 correspondant au cas de l’eau pure et le suffixe 2 au mélange eau/UCON.

## Débits

La figure 5.3.4(a) montre le débit volumique en fonction de la viscosité, les ronds (●) correspondant à  $d = 20$  mm, les rectangles (■) à  $d = 30$  mm et les triangles (▲) à  $d = 40$  mm. Les points à fond blanc correspondent aux données obtenues à l’aide du capteur de force et les points pleins à l’aide de la caméra. Les barres d’erreur sont plus petites que les points. On remarque que pour un diamètre de vidange donné, le débit de vidange reste constant pour  $\eta \lesssim 4 \times 10^{-2}$  Pa.s avant de décroître lorsque  $\eta$  augmente. On voit aussi que, pour une viscosité donnée, la vidange est plus rapide si le diamètre de vidange est plus gros, comme attendu. Afin de pouvoir comprendre mieux ces données, repartons d’un raisonnement développé par [Clanet et Searby \(2004\)](#), illustré sur la figure 5.3.4(b). En notant  $\alpha$  la fraction de temps pendant laquelle de l’air rentre pendant une période  $T = 1/f_b$  dans la bouteille, alors on considère que le volume d’air entrant dans la bouteille durant cette période peut s’écrire  $\alpha T(v_b \pi d^2/4)$ , où  $v_b$  est la vitesse de la bulle et  $\pi d^2/4$  la surface de vidange. Durant cette période  $T$ , le volume d’air libéré au-dessus de la surface libre vaut  $D_V T$ . Par conservation du volume, on a donc

$$D_V T = \alpha T(v_b \pi d^2/4). \quad (5.3.1)$$

— En régime inertiel, nous avons vu dans la partie 1.1.3 que la vitesse des bulles suit la



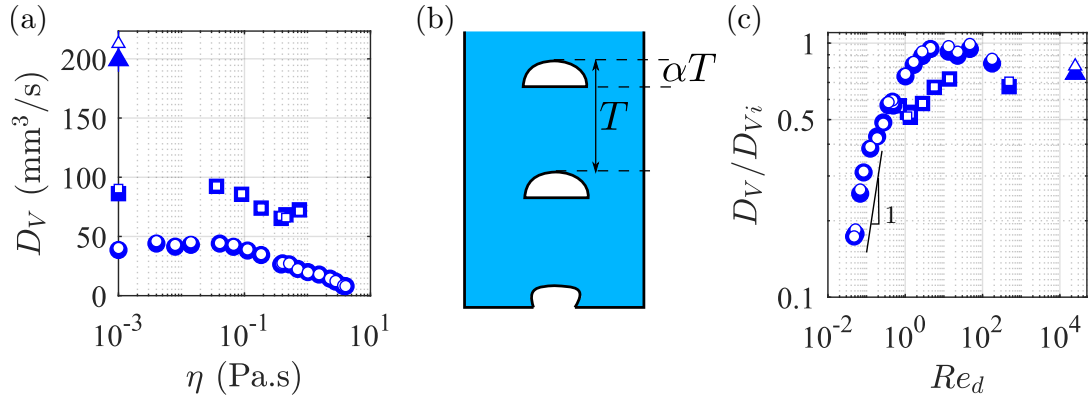


FIGURE 5.3.4 – (a) Débit volumique en fonction de la viscosité pour  $d = 20$  mm (●) et  $d = 30$  mm (■). Les points à fond blanc correspondent aux données obtenus à l’aide du capteur de force et les points pleins à l’aide de la caméra. (b) Schéma de la définition de  $\alpha$ , basé sur le papier de [Clanet et Searby \(2004\)](#). (c) Débit volumique normalisé par  $D_{Vi}$  défini par l’équation 5.3.2 en fonction du nombre de Reynolds  $Re_d = \rho d \sqrt{gd} / \eta$ .

loi  $v_b \propto \sqrt{gd_3} \propto \sqrt{gd}$  ([Clift et al., 2005](#)) où l’on suppose que le diamètre de la bulle est proportionnel au diamètre de vidange. Enfin, en utilisant que dans la limite  $d = D_0$ ,  $D_V = \pi/12 \sqrt{gD_0} D_0^2$  ([Davies et Taylor, 1950](#)), on conclut  $\alpha = 1/3$ <sup>8</sup> et

$$D_V = \frac{\pi}{12} d^2 \sqrt{gd} \equiv D_{Vi}. \quad (5.3.2)$$

On retrouve ainsi le résultat donné par [Clanet et Searby \(2004\)](#).

- Dans le régime de Stokes (régime visqueux), une bulle sphérique remonte à la vitesse  $v_b \propto gd^2 \rho / \eta$ , ce qui donne

$$D_V \propto \frac{\rho g d^4}{\eta} \equiv D_{V\eta}. \quad (5.3.3)$$

En faisant le rapport des deux débits limites,

$$\frac{D_{V\eta}}{D_{Vi}} \propto \frac{1}{d^2 \sqrt{gd}} \frac{\rho g d^4}{\eta} = \frac{\rho d \sqrt{gd}}{\eta} = Re_d. \quad (5.3.4)$$

Avec ce raisonnement, on trouve donc que la transition du régime inertiel au régime visqueux est piloté par un nombre adimensionné  $Re_d = \rho d \sqrt{gd} / \eta$  assimilable à un nombre de Reynolds dont la vitesse serait celle d’un corps en chute libre sur une distance caractéristique  $d$ . Il faut garder en tête que, dans le raisonnement présenté ici, le préfacteur  $\alpha$  a été ignoré mais il dépend lui aussi de la viscosité et donc de  $Re_d$ . De plus, nous avons considéré qu’une bulle formée au niveau du diamètre de vidange remonte immédiatement à sa vitesse terminale  $v_b$  et nous n’avons pas considéré la possibilité que le gaz de la bulle soit compressé ou dilaté lorsqu’il arrive à la surface. Il s’agit donc ici d’un raisonnement grossier effectué dans le but de faire émerger un nombre adimensionné caractéristique, à savoir  $Re_d$ .

8. Dans les expériences réalisées ici, on trouve plutôt  $\alpha \sim 1/4$ .

La figure 5.3.4(c) montre l'évolution de  $D_V/D_{V_i}$  (où  $D_{V_i}$  correspond à l'équation 5.3.2) en fonction de  $Re_d = \rho d \sqrt{gd}/\eta$ . Les ronds (●) correspondant à  $d = 20$  mm, les rectangles (■) à  $d = 30$  mm et les triangles (▲) à  $d = 40$  mm. Les points à fond blanc correspondent aux données obtenus à l'aide du capteur de force et les points pleins à l'aide de la caméra. On remarque que, pour des nombres de Reynolds faibles, les points pour  $d = 20$  mm s'alignent sur une droite de pente 1 (ligne noire), indiquant que le débit volumique normalisé  $D_V/D_{V_i}$  semble être proportionnel à  $Re_d$  dans le régime visqueux (qui correspond ici à  $Re_d \ll 1$ ). Ensuite, lorsque  $Re_d$  augmente, le débit normalisé converge vers  $D_V/D_{V_i} = 1$  pour  $d = 20$  mm et pour une valeur plus faible  $D_V/D_{V_i} \approx 0.7$  pour  $d = 30$  mm. La normalisation par  $D_{V_i}$  ne marche donc pas précisément bien pour tous les diamètres mais donne quand même le bon ordre de grandeur. De plus, on voit que les points pour  $d = 30$  mm sont, pour un  $Re_d$  constant, toujours légèrement en dessous des points pour  $d = 20$  mm. Le choix réalisé ici de normaliser le débit par  $D_{V_i}$  et de regarder l'évolution en fonction de  $Re_d$  ne permet donc pas de bien réunir les données des deux diamètres sur une courbe maîtresse mais représente tout de même une amélioration notable.

### Fréquence des bulles

Nous avons vu dans la partie 5.3.1, à l'aide d'expériences utilisant de l'eau salée, que la grandeur  $\langle f_b \rangle_z \sqrt{\rho}$  était indépendante de la masse volumique. La figure 5.3.5(a) montre donc l'évolution de cette grandeur en fonction de la viscosité. Les ronds bleus (●) correspondent à  $d = 20$  mm et les carrés bleus (■) à  $d = 30$  mm. Tout comme pour le débit, on remarque que la fréquence est constante pour  $\eta \lesssim 4 \times 10^{-2}$  Pa.s avant de décroître. À viscosité égale,  $\langle f_b \rangle_z \sqrt{\rho}$  est plus grand pour un diamètre de vidange plus élevé. Néanmoins, il semble que cette différence s'amenuise lorsque  $\eta$  augmente. Sur la figure 5.3.5(b) est tracée  $\langle f_b \rangle_z$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_d = \rho d \sqrt{gd}/\eta$ . On voit encore une fois que la fréquence est constante aux nombres de Reynolds élevés (donc aux faibles viscosités), puis que celle-ci décroît lorsque le nombre de Reynolds décroît. Pour les nombres de Reynolds faibles ( $Re_d < 0.1$ ), on remarque que la fréquence suit une loi de puissance de la forme  $\langle f_b \rangle_z \propto Re_d$ , tout comme le débit. Les points pour les deux différents diamètres  $d = 20$  mm et  $d = 30$  mm coïncident mieux pour les Reynolds intermédiaires. On peut aussi noter que le fait que  $\langle f_b \rangle_z \propto Re_d$  est en contradiction avec les observations faites plus tôt, qui nous indiquent que  $\langle f_b \rangle_z \sqrt{\rho}$  est indépendant de la masse volumique. Néanmoins, cette dernière observation a été faite dans le régime inertiel alors que la première n'est valable qu'en régime visqueux. Enfin, il faut garder en tête que les variations sur la fréquence induites par la viscosité sont bien plus importantes que celles induites par la masse volumique et le diamètre de vidange pour les expériences réalisées ici. La relation entre  $\langle f_b \rangle_z$  et  $Re_d$  reste donc à vérifier.

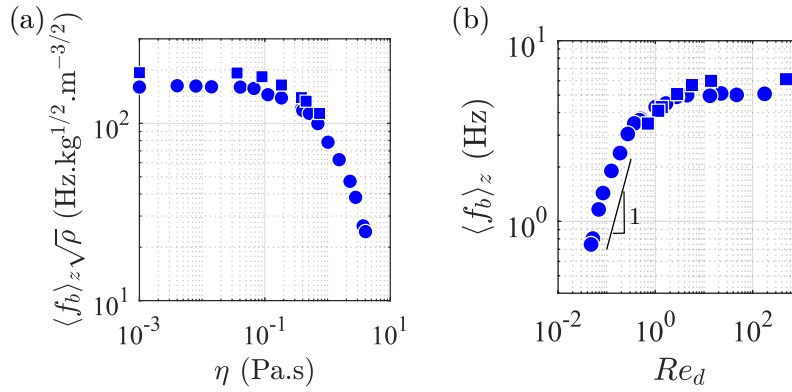


FIGURE 5.3.5 – (a)  $\langle f_b \rangle_z \sqrt{\rho}$  en fonction de la viscosité. (b) Fréquence moyenne de formation des bulles en fonction de  $Re_d = \rho \sqrt{gd} / \eta$ . Les ronds bleus ( $\bullet$ ) correspondent à  $d = 20$  mm et les carrés bleus ( $\blacksquare$ ) à  $d = 30$  mm.

### Résumé de la partie 5.3.2

- Nous avons montré que le débit volumique  $D_V$  ainsi que la grandeur  $f_b \sqrt{\rho}$  sont indépendants de la masse volumique sur la plage de masse volumique étudiée ici  $996 \text{ kg.m}^{-3} < \rho < 1178 \text{ kg.m}^{-3}$ .
- À l'aide d'une analyse théorique, nous avons introduit un nombre de Reynolds  $Re_d = \rho d \sqrt{gd} / \eta$  afin de caractériser la transition entre le régime visqueux ( $Re_d \ll 1$ ) et le régime inertiel ( $Re_d \gg 1$ ) des vidanges. Nous avons vu que, pour  $Re_d \gg 1$ , le rapport  $D_V / D_{Vi}$  (où  $D_{Vi} = d^2 \sqrt{gd} \pi / 12$  est le débit théorique dans le régime inertiel) est indépendant du nombre de Reynolds et du diamètre de vidange  $d$ . La fréquence de formation des bulles  $f_b$  est indépendante de  $Re_d$  mais augmente avec  $d$ . Dans le régime visqueux,  $D_V / D_{Vi}$  et  $f_b$  sont proportionnels à  $Re_d$ . Ce résultat n'est cependant vérifié que pour un seul diamètre de vidange.

## 5.4 Vidange d'un fluide newtonien : petit diamètre de vidange

Nous avons vu dans la partie 5.2.4 que la physique de la vidange pour le diamètre  $d$  le plus petit était différente : le débit et la fréquence des bulles ne sont pas constants pendant la vidange. Nous allons discuter plus en détails ce cas particulier dans cette partie.

### 5.4.1 Observations générales

La figure 5.4.1(a) montre la chronophotographie d'une vidange d'eau avec  $d = 10$  mm. On peut remarquer, par exemple en comparant les images à  $t = 61$  s et  $t = 241$  s, que les

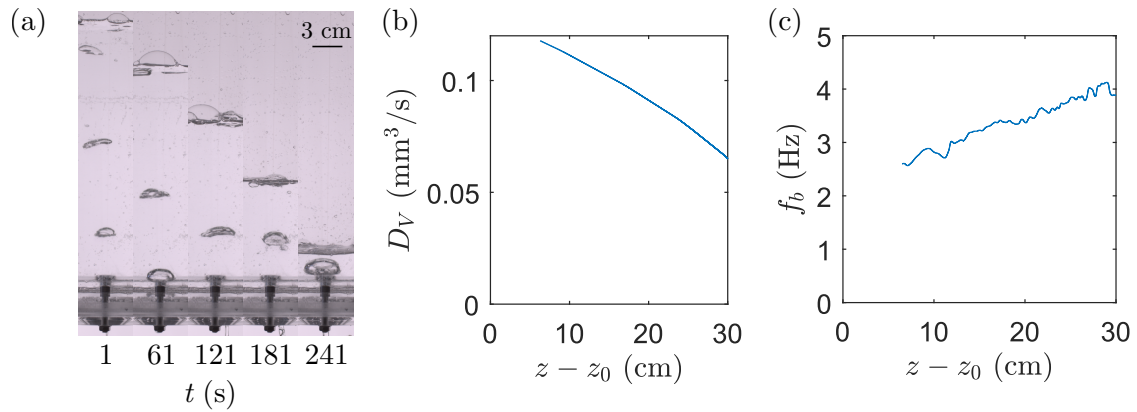


FIGURE 5.4.1 – (a) Chronophotographie d'une vidange d'eau distillée avec  $d = 10$  mm. (b) Débit volumique  $D_V$  en fonction de la hauteur de liquide restant. (c) Fréquence d'apparition des bulles  $f_b$  en fonction de la hauteur de liquide restant.

bulles sont plus grosses lorsque la quantité de fluide restante est plus faible, ce qui n'est pas le cas pour les diamètres de vidange plus élevés. La figure 5.4.1(b) présente le débit volumique en fonction de la quantité de fluide restante  $z - z_0$ , qui est obtenue en utilisant un modèle linéaire pour le débit en fonction du temps (donc un modèle quadratique de  $z(t)$ ), comme justifié dans la partie 5.2.2. Le débit augmente donc au cours de la vidange, jusqu'à augmenter de plus de 50% entre le début de la vidange ( $z - z_0 = 30$  cm) et le dernier point mesurable ( $z - z_0 \approx 6.5$  cm). La figure 5.4.1(c) montre l'évolution de la fréquence d'apparition des bulles en fonction de  $z - z_0$ . On remarque que celle-ci décroît de manière linéaire avec  $z - z_0$ , à quelques variations près. Ces remarques permettent de mettre en avant les résultats principaux, qui sont que lors d'une vidange avec  $d = 10$  mm, le débit volumique augmente alors que la fréquence de formation des bulles diminue, ce qui s'explique par l'augmentation de la taille des bulles générées. Nous allons voir comment la viscosité joue un rôle pour ce cas particulier.

## 5.4.2 Impact de la viscosité

### Débit volumique

La figure 5.4.2(a) montre le débit volumique en fonction de la hauteur de liquide restante pour trois mélanges eau/UCON différents (le cas  $\eta = 1$  mPa.s correspondant à de l'eau pure). On voit que pour toutes les viscosités, le débit décroît avec  $z - z_0$  (et donc augmente lors de la vidange). Pour une hauteur de liquide donnée (donc à  $z - z_0$  fixé), le débit est plus faible pour une viscosité plus élevée, résultat rappelant ce qui a été observé pour les autres diamètres de vidange. La figure 5.4.2(b) représente le débit volumique normalisé par sa valeur en  $z - z_0 = 15$  cm (choix arbitraire, qui ne change pas les observations) en fonction de  $z - z_0$ . On remarque que les courbes correspondant aux différentes viscosités se superposent. On en déduit que la variation de débit relative est indépendante de la viscosité et survient peu importe que l'on soit en régime visqueux ou inertiel.

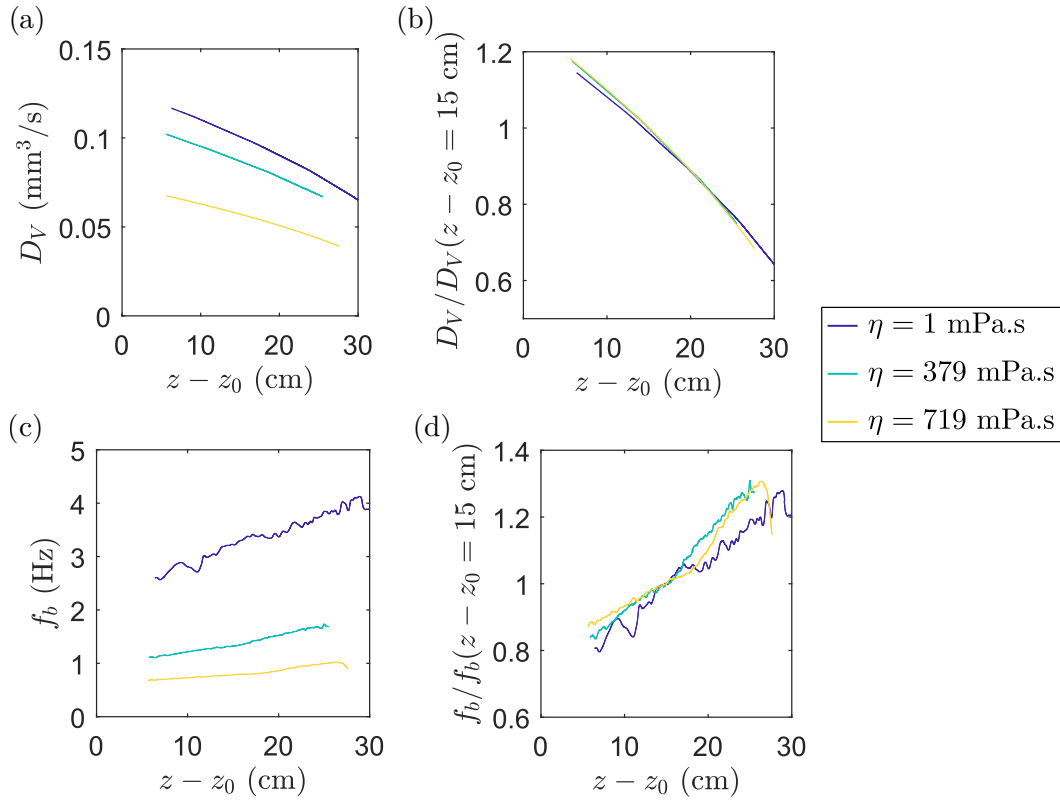


FIGURE 5.4.2 – **(a)** Débit volumique  $D_V$  en fonction de la hauteur de fluide restante pour trois mélanges eau/UCON différents. **(b)** Débit volumique normalisé par le débit volumique pour  $z - z_0 = 15$  cm en fonction de  $z - z_0$  pour trois mélanges eau/UCON différents. **(c)** Fréquence d'apparition des bulles  $f_b$  en fonction de la hauteur de fluide restante pour trois mélanges eau/UCON différents. **(d)** Fréquence d'apparition des bulles normalisée par la valeur à  $z - z_0 = 15$  cm en fonction de  $z - z_0$  pour trois mélanges eau/UCON différents.

### Fréquence des bulles

La figure 5.4.2(c) montre l'évolution de la fréquence de formation des bulles en fonction de la hauteur de liquide pour les trois mêmes mélanges eau/UCON que précédemment. Pour une viscosité donnée,  $f_b$  décroît au cours de la vidange, et plus la viscosité est élevée, plus la fréquence  $f_b$  est faible à  $z - z_0$  donné. La figure 5.4.2(d) montre, comme précédemment, la fréquence normalisée par sa valeur à  $z - z_0 = 15$  cm (choix arbitraire ici encore, qui ne change pas les observations). Comme pour le débit, les courbes se superposent indépendamment de la viscosité, signifiant que la variation relative de  $f_b$  est indépendante de la viscosité.

### Résumé de la partie 5.4

- Dans le cas  $d = 10$  mm, le débit augmente lors de la vidange alors que la fréquence de génération des bulles diminue. Cela reste cohérent car les bulles d'air générées sont de plus en plus grosses.
- Les variations relatives de débit et de fréquence de bulles avec la hauteur de liquide  $z - z_0$  sont indépendantes de la viscosité.
- Pour une quantité de liquide donnée, le débit et la fréquence diminuent lorsque la viscosité augmente, tout comme pour les autres diamètres de vidange.

Les résultats présentés dans cette partie ne sont que préliminaires. Une étude systématique de la variation du diamètre de vidange sur les variations de fréquence et de débit est envisageable. De plus, la valeur de ces deux grandeurs physiques à une hauteur  $z - z_0$  donnée peut aussi être étudiée en fonction de la viscosité (et de la masse volumique ou de la tension de surface).

## 5.5 Vidange d'une suspension

Nous avons vu qu'une suspension isodense, visqueuse, non-Brownienne, avec des particules rigides sphériques, se comporte comme un fluide effectif dont la viscosité dépend de la fraction volumique de grains (voir partie 1.4.1). Néanmoins, des expériences ont montré que de telles suspensions pouvaient s'écarter de ce modèle idéal dans certains cas spécifiques (Yeo et Maxey, 2011; Madec et al., 2020). Le but de cette partie est de proposer des premiers résultats sur la vidange de suspensions isodenses, visqueuses et non-Browniennes. On rappelle néanmoins que les particules utilisées ici sont bien sphériques mais ne sont pas totalement rigides (voir partie 5.1.3). Nous resterons dans cette partie en régime inertiel  $Re_d \gg 1$ .

Les résultats de cette partie ont été obtenus dans le cadre du projet expérimental (nov.-déc. 2023) et du stage de M2 (en cours depuis mars 2024) de Sasha Perez, que j'ai co-encadrés.

### 5.5.1 Observations générales

La figure 5.5.1(a) montre une chronophotographie de la vidange d'une suspension de fraction volumique  $\phi = 40$  % avec des particules de diamètre  $d_p = 17 \pm 1$  mm. La surface libre descend et finit par révéler progressivement un étage de billes d'hydrogel que l'on aperçoit sur la photo à  $t = 8.75$  s. Cet étage de billes d'hydrogel n'est constitué que d'une couronne de grains qui fait le contour du cylindre, le centre étant vide. Ce phénomène continue jusqu'à ce que, vers la fin, il reste des billes d'hydrogel le long de la paroi du cylindre de vidange, sur une certaine hauteur, qui forment une structure cristalline stable. La figure 5.5.1(b) montre une photographie de la fin d'une expérience ( $d = 30$  mm) vue de dessus où l'on peut voir, entre les deux cercles jaunes, des étages de billes au contact de la paroi. La figure 5.5.1(c)

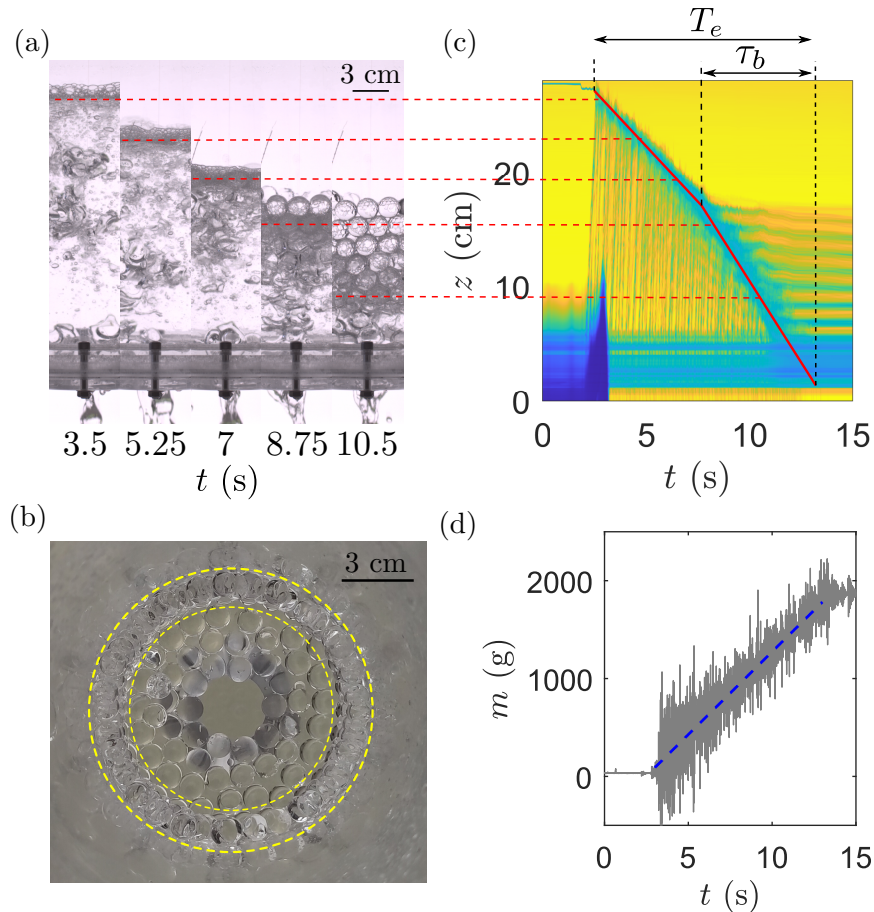


FIGURE 5.5.1 – (a) Chronophotographie de la vidange d’une suspension avec  $\phi = 40\%$  et  $d_p = 17 \pm 1$  mm. (b) Photographie prise par dessus le montage expérimental en fin d’expérience. On y voit des billes qui ne se sont pas écoulées, avec contre la paroi des étages de billes formant une structure cristalline (entre les deux cercles jaunes). Le fond flou correspond à la suspension qui s’est écoulée dans la bassine en dessous du cylindre. (c) Intensité moyennée pour chaque  $z$  en fonction du temps. Les lignes rouges sont des guides visuels.  $T_e$  correspond au temps de vidange total et  $\tau_b$  au temps de vidange avec des particules émergées. (d) Masse de liquide mesurée par le capteur de force en fonction du temps. Les pointillés en bleu représentent un ajustement linéaire du signal gris pour  $3 < t < 13$  s.

correspond à l’intensité moyennée pour chaque  $z$  en fonction du temps. La zone bleue épaisse par laquelle passe les traits pleins rouges correspond à la surface libre. On remarque que sur le temps de vidange  $T_e$ , le débit est constant par morceaux (avec deux morceaux). Les lignes rouges sont des guides visuels qui mettent ce phénomène en avant. On notera  $\tau_b$  le temps entre la rupture de pente et la fin de la vidange. De plus, la rupture de pente survient lorsque les billes apparaissent en surface. On peut deviner les billes émergées sur la figure 5.5.1(c) : ce sont les lignes bleues horizontales à la droite de la figure. La zone bleu foncé pour  $0 < t < 3$  s correspond à la main de l’expérimentateur. Comme la surface libre descend à deux vitesses différentes selon si l’on est avant ou après l’apparition des billes à la surface, on introduit  $v_{s1}$  la vitesse avant cela et  $v_{s2}$  celle après. La figure 5.5.1(d) montre l’évolution de la masse



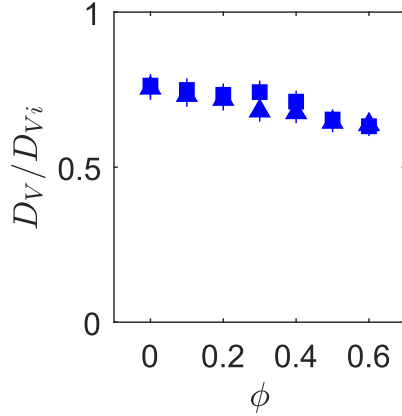


FIGURE 5.5.2 – Débit volumique normalisé par le débit théorique  $D_{Vi} = \sqrt{gd}d^2\pi/12$  en fonction de la fraction volumique  $\phi$  de billes d’hydrogel. Les données présentées ici sont celles obtenues à l’aide du capteur de force. Les carrés (■) correspondent à  $d = 30$  mm ( $d_p = 10 \pm 1$  mm) et les triangles (▲) à  $d = 40$  mm ( $d_p = 17 \pm 1$  mm).

mesurée par le capteur de force en fonction du temps. On remarque que le signal brut (en gris) est plus bruité que dans le cas d’un liquide newtonien (voir partie 5.2.1), ce qui peut s’expliquer par les chocs que viennent produire les particules qui sont vidangées. Les pointillés bleus sont un ajustement linéaire du signal gris pour  $3 < t < 13$  s. On voit donc, de manière surprenante, que le débit massique est constant tout le long de la vidange.

La présence de grains implique donc un nouveau mécanisme qui est le changement de vitesse de la surface libre et le fait qu’il reste quelque chose à la fin dans le cylindre (des grains au niveau de la paroi). Nous allons essayer de comprendre qualitativement et quantitativement comment ces phénomènes se retrouvent modifiés lorsque la fraction volumique de grains change.

## 5.5.2 Influence de la fraction volumique

### Débit et vitesse de la surface libre

Intéressons-nous au cas le plus simple en premier : le débit mesuré à l’aide du capteur de force, qui est constant tout le long de la vidange. Le mélange liquide utilisé ici ayant une viscosité faible ( $\eta = 3$  mPa.s donc  $Re_d = \rho d\sqrt{gd}/\eta > 150 \gg 1$ ), nous considérerons que les vidanges sont dans le régime inertiel. Sans grain, nous nous attendons donc à ce que le débit vaille  $D_{Vi} = \sqrt{gd}d^2\pi/12$ . On propose donc sur la figure 5.5.2 de tracer le débit volumique obtenu à l’aide du capteur de force normalisé par  $D_{Vi}$  en fonction de la fraction volumique de billes. Les carrés (■) correspondent à  $d = 30$  mm ( $d_p = 10 \pm 1$  mm) et les triangles (▲) à  $d = 40$  mm ( $d_p = 17 \pm 1$  mm). Le diamètre des particules est modifié tout en gardant le rapport  $d/d_p \approx 3$  afin de savoir si ce paramètre joue un rôle ou non. On remarque que la normalisation permet de faire coïncider les points expérimentaux des deux différents diamètres de vidange aux incertitudes près. Cependant, on ne trouve pas  $D_V/D_{Vi} = 1$  pour  $\phi = 0$  donc cette normalisation n’est pas parfaite, comme observé dans la partie 5.3.2. On observe de plus que le débit volumique décroît lorsque la quantité de grains augmente. La



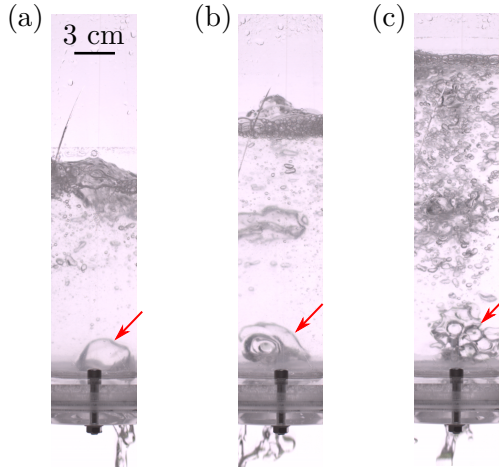


FIGURE 5.5.3 – (a) Photographie d’un instant d’une vidange d’une suspension avec  $\phi = 0$ , (b)  $\phi = 20\%$  et (c)  $\phi = 60\%$ . Toutes les photographies sont à la même échelle. Les flèches rouges mettent en avant la bulle qui est en train de se former.

différence est légère (de l’ordre de 16 %) mais notable. Il semble assez intuitif que la présence de grains puisse ralentir la vidange, néanmoins aucune explication théorique n’est connue pour le moment.

Intéressons-nous maintenant à ce que l’on voit à la caméra. La figure 5.5.3 montre des photographies d’un instant quelconque d’une vidange avec (a)  $\phi = 0$ , (b)  $\phi = 20\%$  et (c)  $\phi = 60\%$ . Les flèches rouges mettent en avant une bulle en train de se former. On remarque que dans les cas  $\phi = \{0, 20\}\%$ , la formation de la bulle est assez semblable. Par contre, dans le cas à  $\phi = 60\%$ , on voit que la bulle percole à travers les grains. La manière dont la bulle se forme et remonte est donc très différente à haute fraction volumique. Le modèle théorique du débit en régime inertiel développé dans la partie 5.3.2 se basant sur la formation des bulles, il n’est pas étonnant que l’on voit un impact de  $\phi$  sur le débit volumique  $D_V$ .

On a vu que la vitesse de la surface  $v_s$  est constante par morceaux (2 morceaux pour être exact), le changement de vitesse s’effectuant lorsque des billes d’hydrogel émergent de la suspension. On représente sur la figure 5.5.4(a) la vitesse de la surface en fonction de la fraction volumique de grains. Les points sans contour correspondent à la vitesse mesurée lorsqu’il n’y a pas encore de grains au-dessus de la surface libre et ceux avec les contours noirs à la vitesse mesurée lorsque c’est le cas (sur la plage de temps  $\tau_b$ ). Les triangles ( $\Delta$ ) correspondent à  $d = 40$  mm,  $d_p = 17$  mm et les rectangles ( $\square$ ) à  $d = 30$  mm,  $d_p = 10$  mm. On remarque tout d’abord que les points avec des contours noirs n’apparaissent que pour  $\phi > 30\%$ . Cela vient du fait que pour  $\phi = \{0, 10, 20\}\%$ , aucune rupture de pente n’est observée. Cela ne signifie pas qu’elle n’a pas lieu pour les faibles fractions volumiques : elle survient peut-être en fin de vidange mais notre dispositif expérimental ne permet pas, si c’est le cas, de l’observer. Pour un diamètre de vidange donné,  $v_{s1}$  diminue légèrement avec la fraction volumique et on remarque que  $v_{s2}$  est bien plus élevée que  $v_{s1}$ , avec un écart approximativement constant pour chaque jeu de données.

Afin d’expliquer cette rupture de pente, on peut se baser sur le schéma de la figure 5.5.4(b). Lorsque les billes d’hydrogel ne sont pas encore visibles en surface, le débit volumique vaut simplement  $v_{s1}\pi D_0^2/4$  car la surface de suspension qui descend à la vitesse  $v_{s1}$  est bien  $\pi D_0^2/4$ .

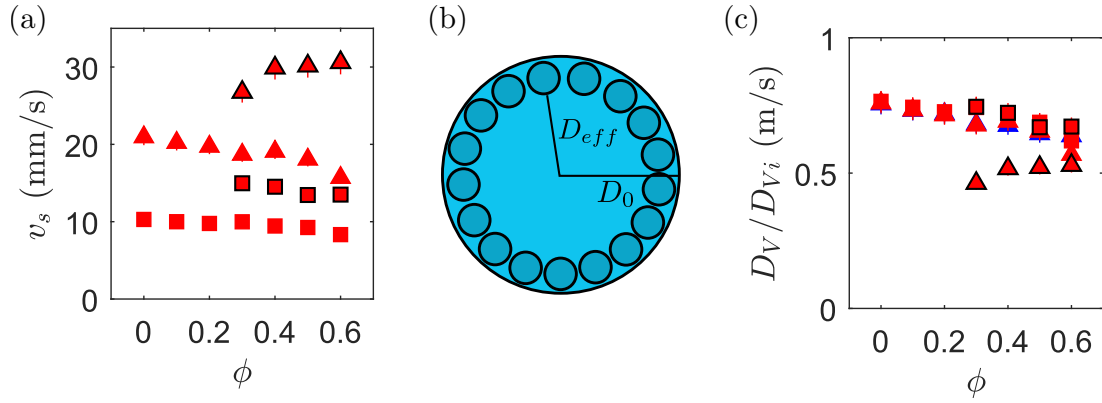


FIGURE 5.5.4 – (a) Vitesse de la surface libre mesurée à la caméra avant (points sans contour) et après (points avec un contour noir) l’apparition des billes d’hydrogel au-dessus de la surface libre. Les triangles ( $\Delta$ ) correspondent à  $d = 40$  mm,  $d_p = 17$  mm et les rectangles ( $\square$ ) à  $d = 30$  mm,  $d_p = 10$  mm. (b) Schéma de la vue de l’intérieur du cylindre perpendiculaire à l’axe  $z$ , où l’on voit des billes émergées au-dessus de la suspension. (c) Débit volumique normalisé par  $D_{Vi}$  en fonction de la fraction volumique. Le débit volumique vaut  $v_{s1}\pi D_0^2/4$  avant que des billes n’émergent (points sans contour) et  $v_{s2}\pi D_{eff}^2/4$  après (points avec contour noir). Les triangles bleus ( $\blacktriangle$ ) représentent les valeurs de débit volumique obtenues par le capteur de force.

Néanmoins, lorsque des particules sont émergées et que, au niveau des parois, elles restent en surface au lieu de s’écouler, on peut supposer que la surface sur laquelle le fluide s’écoule n’est plus  $\pi D_0^2/4$  mais  $\pi D_{eff}^2/4$  où  $D_{eff} \approx D_0 - 2d_p$ . On suppose donc que les grains ne bougent pas au niveau de la paroi et que l’écoulement a lieu uniquement au centre du cylindre. Le débit volumique dans ce cas vaut donc  $v_{s2}\pi D_{eff}^2/4$ . Les débits volumiques ainsi déterminés sont tracés sur la figure 5.5.4(c) en fonction de  $\phi$ , les points sans contour étant ceux avant la rupture de pente et avec un contour noir, ceux après. Les valeurs mesurées à l’aide du capteur de force pour  $d = 40$  mm sont aussi représentés ( $\blacktriangle$ ). On remarque tout d’abord que la normalisation par  $D_{Vi}$  a permis encore une fois de faire coïncider les valeurs pour les différents diamètres de vidange lorsqu’il n’y a pas de grains en surface. De plus, les valeurs obtenues à la caméra sont en accord avec celles mesurées avec le capteur de force. Pour ce qui est des débits normalisés après l’apparition des particules d’hydrogel à la surface (contour noir sur les symboles), on voit que le modèle simple considéré ci-dessus permet aux points pour  $d = 30$  mm ( $\blacksquare$ , contour noir) d’être en accord avec les autres à une fraction volumique donnée. Par contre, pour  $d = 40$  mm ( $\blacktriangle$ , contour noir), les valeurs restent assez loin des autres et les variations avec  $\phi$  sont différentes. L’argument géométrique de considérer comme surface  $\pi D_{eff}^2/4$  au lieu de  $\pi D_0^2/4$  est peut-être trop simpliste dans le cas où les billes sont plus grosses car il y a en réalité de l’espace laissé par les billes lorsqu’elles cristallisent sur le bord de la paroi. Une analyse plus profonde (non réalisée dans le cadre de cette thèse) pourrait prendre en compte cette porosité. Suite à ce résultat, il semble que le débit volumique soit imposé et pilote la vitesse de la surface, sans que l’on ait d’explication à ce phénomène.

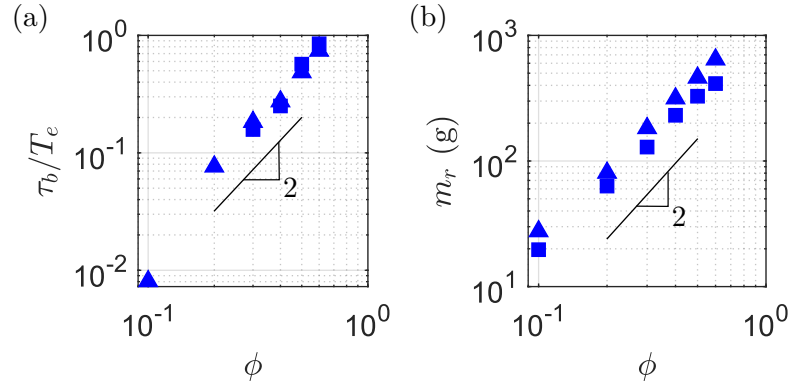


FIGURE 5.5.5 – (a) Proportion du temps de vidange avec des billes d’hydrogel hors de la suspension en fonction de la fraction volumique de grains. (b) Masse restante de grains dans le cylindre à la fin de la vidange en fonction de  $\phi$ . Les triangles ( $\blacktriangle$ ) correspondent à  $d = 30$  mm et  $d_p = 10$  mm et les rectangles ( $\blacksquare$ ) à  $d = 40$  mm et  $d_p = 17$  mm.

### Étude des grains

La plage de temps pendant laquelle les billes d’hydrogel apparaissent en surface (que l’on note  $\tau_b$ ) varie avec la fraction volumique. On souhaite étudier la fraction de temps pendant laquelle la vidange se fait avec la présence de grains non immergés, soit  $\tau_b/T_e$ , où  $T_e$  est le temps de vidange. La figure 5.5.5(a) montre l’évolution du rapport  $\tau_b/T_e$  en fonction de  $\phi$ . Les triangles ( $\blacktriangle$ ) correspondent à  $d = 30$  mm et  $d_p = 10$  mm et les rectangles ( $\blacksquare$ ) à  $d = 40$  mm et  $d_p = 17$  mm. On remarque que  $\tau_b/T_e$  tend vers 1 lorsque la fraction volumique augmente. Autrement dit, lorsque la fraction volumique est élevée ( $\phi = 0.6$ ), des particules apparaissent très vite à la surface, quasiment dès le début de la vidange. Évidemment, lorsqu’il n’y a pas de grains,  $\tau_b/T_e = 0$ . Cela signifie que le proportion de temps avec des grains visibles à la surface augmente de 0 à  $\sim 1$  de manière quadratique en la fraction volumique de grains de  $\phi = 0$  à  $\phi \approx 0.6$ .

Sur la figure 5.5.5(b) est représentée l’évolution de la masse restante de grains  $m_r$  en fonction de la fraction volumique de grains. On remarque que  $m_r \propto \phi^2$  dans notre cas. Cela est très probablement lié à ce que l’on vient de voir ( $\tau_b/T_e \propto \phi^2$ ) car une fois que des billes émergent, celles en contact avec le cylindre ne bougent plus, à quelques réarrangements près. Or, la hauteur de liquide est proportionnelle au temps de vidange donc si le temps avec des billes en surface évolue de manière quadratique avec  $\phi$ , alors la hauteur de billes restante au niveau de la paroi aussi (et donc la masse restante aussi). Nous n’avons pas d’explication théorique à cette loi d’échelle empirique.

### Résumé de la partie 5.5

- La vidange d'une suspension se déroule en deux temps, le changement s'effectuant suite à l'émergence de particules hors du fluide, qui cristallisent au niveau des parois.
- Le débit massique est constant durant toute l'expérience et comparable à celle d'un liquide newtonien. Cependant, la vitesse de la surface a deux valeurs distinctes lors d'une vidange. En effet, celle-ci augmente lorsque des grains émergent du liquide et cristallisent au niveau des parois, modifiant la surface sur laquelle la vidange a lieu, qui passe de tout le cylindre à tout le cylindre moins la couronne de particules.
- La proportion de temps pendant laquelle la vidange se déroule avec des grains émergés augmente proportionnellement à  $\phi^2$ , ce qui implique que la quantité de billes restant dans le cylindre à la fin de la vidange (qui sont celles qui cristallisent sur les parois) évolue elle aussi avec  $\phi^2$ .

### Résumé du chapitre 5

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la vidange de fluides newtoniens dans un premier temps et à la vidange de suspensions isodenses se comportant comme un liquide newtonien effectif dans un second temps.

Nous avons vu que la physique du problème est différente selon la taille du diamètre de vidange. Pour de "grands" diamètres, le débit volumique  $D_V$  ainsi que la fréquence de formation des bulles  $f_b$  sont constants. Pour des "petits" diamètres, le débit augmente au cours de la vidange alors que la fréquence de formation des bulles diminue mais que leur taille augmente. Dans tous les cas, la viscosité diminue à la fois le débit et la fréquence d'apparition des bulles. Nous avons remarqué que, dans le régime visqueux pour des "grands" diamètres de vidange, ces deux grandeurs physiques  $f_b$  et  $D_V$  sont proportionnelles à un nombre adimensionné  $Re_d = \rho\sqrt{gd}d/\eta$  et dans le régime inertiel,  $D_V \approx D_{Vi} = \sqrt{gdd^2}\pi/12$ . Malheureusement, si les résultats sur le débit ont un fondement théorique, nous n'avons pas d'explication aux observations faites sur la fréquence des bulles  $f_b$ .

Lors de la vidange d'une suspension isodense, le débit volumique est aussi constant mais la vitesse de la surface libre augmente d'un coup car des particules émergent de la suspension au niveau de la paroi et y restent, créant ainsi à la fin des couronnes de grains. Plus la fraction volumique de particules est élevée, plus ce phénomène arrive tôt et donc plus il reste de grains dans le cylindre à la fin de la vidange. La quantité de grains restant à la fin de la vidange ainsi que le proportion de temps de vidange avec des particules émergées évoluent en  $\phi^2$ .

# Conclusion et perspectives

L'objectif principal de ma thèse a été d'étudier la remontée d'une bulle unique dans une cellule de Hele-Shaw ainsi que la vidange d'un réservoir. Nous avons séparé l'étude selon le type de liquide utilisé dans les expériences ou les régimes considérés (régime visqueux ou régime inertiel).

## Résumé du travail présenté

### Remontée d'une bulle unique en milieu confiné

- Nous nous sommes d'abord intéressés au cas où la cellule de Hele-Shaw est verticale, c'est-à-dire alignée avec la gravité. Dans un premier temps, notre intérêt s'est porté sur la transition vers la vitesse limite établie théoriquement par [Taylor et Saffman \(1959\)](#) en régime visqueux, valable dans la limite des bulles infiniment grandes, en étudiant comment la validité de cette formule est impactée par les propriétés physiques du fluide. Dans un second temps, la transition entre le régime inertiel et le régime visqueux a été étudiée en focalisant sur la vitesse et la forme des bulles ainsi que le champ de vitesse dans le fluide. Un modèle prédisant la vitesse d'une grande bulle pour toute viscosité a été proposé et vérifié expérimentalement. Un comportement empirique de la forme des grandes bulles a été observé, avec des bulles allongées en régime visqueux et aplaties en régime inertiel. Une partie de ce travail a été publié dans JFM [Monnet et al. \(2022\)](#).
- Nous avons ensuite étudié la remontée d'une bulle unique en cellule de Hele-Shaw inclinée par rapport à la verticale. Le rapport d'aspect des bulles est identique au cas non-incliné mais leur vitesse est plus faible que celle prévue par un simple changement de gravité effective, ce que nous avons interprété par l'apparition de frottements supplémentaires dont une modélisation a été proposée. De plus, la bulle est décentrée dans le gap sous l'effet de la flottabilité et se retrouve plus proche de la plaque supérieure que de la plaque inférieure. Ce travail a donné lieu à un article soumis à PRF en 2024.
- Dans une suspension en régime visqueux, nous avons retrouvé qu'une bulle est plus rapide dans une suspension que dans un liquide newtonien de même viscosité effective, vérifiant ainsi pour un autre type de fluide les résultats précédents de [Madec et al. \(2020\)](#). Nous avons ensuite montré que cela n'est pas vrai en régime inertiel et que la vitesse de la bulle dans les deux cas est alors identique.

## Vidange d'un cylindre

- Nous avons vu que la physique de la vidange dépend de la taille du trou de vidange, avec un débit et une fréquence de bulles constants à grand diamètre de vidange et variables à petit diamètre de vidange. Pour les grands trous de vidange, la masse volumique du liquide vidangé impacte très peu le débit volumique mais modifie par contre la fréquence à laquelle des bulles apparaissent. Afin de caractériser l'influence de la viscosité, un nombre adimensionné  $Re_d$  semblable à un nombre de Reynolds a été trouvé théoriquement. Il permet de comprendre les données expérimentales et nous avons trouvé que le débit ainsi que la fréquence des bulles sont proportionnels à  $Re_d$  dans le régime visqueux ( $Re_d \ll 1$ ) et constants dans le régime inertiel ( $Re_d \gg 1$ ). Pour le plus petit trou de vidange étudié, nous avons mis en avant une décroissance linéaire de la fréquence des bulles et du débit en fonction du temps, qui est indépendante de la viscosité.
- Lors de la vidange d'une suspension par un grand trou de vidange, nous observons un débit constant en sortie du réservoir. La valeur du débit décroît légèrement avec la fraction volumique de la suspension vidangée. Néanmoins, la vitesse à laquelle la surface libre descend est constante par morceaux. En effet, la vitesse de la surface libre change brutalement suite à l'apparition de particules à la surface, qui cristallisent en formant une couronne au niveau de la paroi du cylindre. Nous avons interprété cela en suggérant que la surface sur laquelle la surface libre descend passe alors de la totalité du cylindre à un cylindre plus petit, correspondant au cylindre moins la couronne de grains, ce qui explique quantitativement le changement de vitesse de la surface libre. Plus la fraction volumique de grains est élevée, plus l'apparition de particules en surface arrive tôt dans la vidange.

## Perspectives

Les travaux effectués au cours de cette thèse ont apporté quelques éléments de compréhension sur des cas spécifiques d'écoulements multiphasiques. Néanmoins chaque réponse apportée tend à soulever des questions encore plus nombreuses. Nous en proposons ici une liste non exhaustive :

- Les résultats présentés sur la remontée des bulles en cellule de Hele-Shaw portent majoritairement sur les grandes bulles. Une étude numérique, expérimentale et théorique de la dynamique des bulles plus petites reste encore à faire, que ce soit dans un liquide newtonien ou dans une suspension. Le modèle proposé pour la vitesse des grandes bulles repose sur un bilan de puissance construit empiriquement et une explication théorique reste encore à trouver.
- De même, les résultats établis pour la remontée d'une bulle en cellule de Hele-Shaw inclinée restent à expliquer théoriquement. On pourrait aussi étudier la remontée de bulles multiples ou les interactions entre deux bulles dans ce cadre spécifique. De plus, l'analyse de la remontée d'une bulle dans une suspension en cellule de Hele-Shaw inclinée n'a pas encore été faite. Il serait intéressant de voir comment les résultats connus pour

le cas d'une suspension dans une cellule verticale et celui d'un liquide newtonien dans une cellule inclinée se rejoignent et se complètent.

- Une suspension isodense et isoindice ayant été mise en place (voir annexe B), une étude du réarrangement des particules dans le gap de la cellule est possible. Elle permettrait de préciser l'origine du phénomène observé dans une suspension en régime visqueux : une bulle va plus vite dans une suspension que dans un liquide newtonien de même viscosité effective. Dans les suspensions isodenses, nous avons exploré d'une part le régime visqueux et d'autre part le régime inertiel. La transition entre les deux régimes reste encore à examiner et à comparer à ce qui a été établi pour des liquides newtoniens.
- Dans notre étude, nous nous sommes limités aux suspensions isodenses, monodisperses et non-browniennes mais les expériences pourraient être élargies à tous les types de suspensions, ce qui laisse un vaste choix de possibilités. La taille ainsi que la forme des particules peuvent être modifiées de multiples manières.
- Lors de nos travaux sur la vidange d'un réservoir, nous nous sommes concentrés sur le cas des grands diamètres de vidange mais nous avons pu remarquer que la physique changeait lorsque le trou de vidange rapetissait : le débit et la fréquence des bulles ne sont pas constants. Une étude des variations de ces deux grandeurs avec le diamètre de vidange est envisageable, afin de mieux comprendre l'origine physique de cette observation.
- Notre attention s'est tout particulièrement portée sur le débit et la fréquence des bulles. Néanmoins, beaucoup d'autres grandeurs physiques restent à étudier, comme la pression au niveau de la surface libre, la vitesse de remontée des bulles, leur taille et leur forme. Cela est facilement réalisable à l'aide d'un capteur de pression d'une part et d'autre part d'une caméra calibrée et réglée pour visionner le plan de remontée des bulles (travaux en cours dans le cadre du stage de M2 de Sasha Perez, mars-juin 2024).
- Ensuite, lors de nos travaux sur la vidange d'une suspension, nous avons fait le choix de nous concentrer sur les suspensions isodenses et monodisperses en régime inertiel avec des particules telles que  $d/d_p = 3$ . On peut envisager de faire varier le rapport  $d/d_p$  utilisé, de modifier la rigidité des grains ou encore d'explorer la vidange d'autres types de mélanges, comme des suspensions polydisperses ou des fluides non-newtoniens.
- Nous nous sommes limités à une unique géométrie, à savoir le cylindre. Les travaux effectués et suggérés peuvent être repris avec d'autres formes de réservoir. On peut par exemple penser à rajouter un goulot en sortie pour se rapprocher de la forme d'une bouteille et regarder comment cela modifie les résultats connus.





# Annexe A

## Mesure des propriétés physiques des liquides utilisés

### A.1 Mesure de la masse volumique du liquide

La masse volumique est mesurée à l'aide d'un densimètre électronique Anton Paar DMA 35. Il déduit la grandeur voulue de la fréquence de vibration d'un tube en U rempli du liquide que l'on souhaite étudié. Toutes les mesures ont été effectuées à température ambiante, en supposant que la masse volumique ne varie pas significativement avec la température. Le tube étant fin, les liquides dont la viscosité dépasse les 3 Pa.s ne peuvent pas être insérés dans le densimètre.

### A.2 Mesure de la tension de surface du liquide

La tension de surface a été déterminée à l'aide d'un tensiomètre Attension Theta (Biolin Scientific) qui utilise la méthode de la goutte pendante (Gassin, 2014). Cela consiste à générer une goutte du liquide en question au bout d'une seringue (voir la figure A.2.1(a), photo obtenue avec le mélange eau/Triton/ZnCl) et d'en mesurer la forme, cette dernière étant dictée par la compétition entre la gravité et la capillarité. On peut voir sur la figure A.2.1(b) la mesure effectuée par le tensiomètre de la tension de surface  $\gamma$  au cours du temps. La valeur varie très peu autour de sa valeur moyenne, permettant ainsi de conclure sur la valeur de la tension de surface du mélange. La précision de cette méthode dépend du fluide considéré. Dans le cas du mélange eau/Triton/ZnCl, utilisé pour réaliser la figure A.2.1, l'erreur est de l'ordre de  $0.1 \text{ mN.m}^{-1}$ . Pour les mélanges eau/UCON, les incertitudes sont de l'ordre de  $1 \text{ mN.m}^{-1}$ . Pour les mélanges eau/sirop de glucose, les incertitudes sont de l'ordre de  $3 \text{ mN.m}^{-1}$ .

### A.3 Mesure de viscosité

La détermination de la viscosité des différents mélanges est réalisée à l'aide d'un rhéomètre Malvern Kinexus Ultra+. Différentes géométries de mesure sont envisageables mais nous

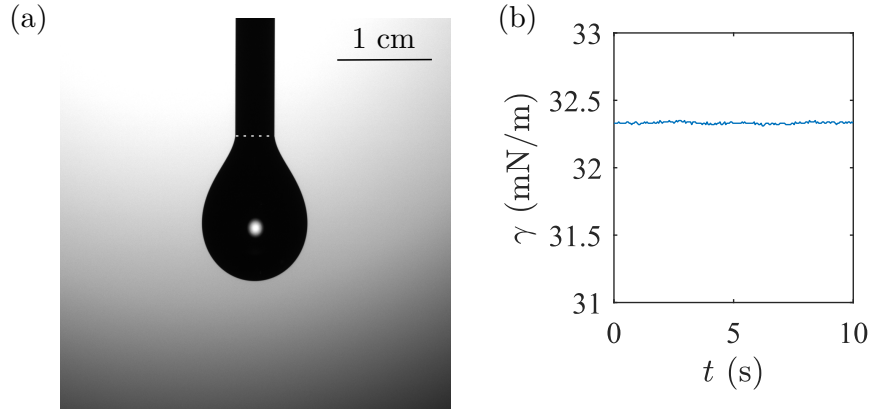


FIGURE A.2.1 – (a) Photographie d’une goutte pendante du mélange eau/Triton/ZnCl de volume  $4.7 \mu\text{L}$ . Les pointillés blancs délimitent le bout de l’aiguille qui sert à former la goutte. (b) Évolution de la tension de surface  $\gamma$  mesurée par le tensiomètre en fonction du temps. La valeur obtenue est très stable.

avons majoritairement utilisé une géométrie plan-plan pour les liquides (toutes les géométries donnant le même résultat) et une géométrie couette cylindrique pour les suspensions. Cette dernière géométrie est la meilleure pour mesurer la viscosité des suspensions étant donné qu’elle garantit les gradients de cisaillement les moins forts et limite donc la migration de particules pendant la mesure (Guazzelli et Pouliquen, 2018).

Une mesure de la viscosité du mélange eau/Triton/ZnCl à  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  est présentée figure A.3.1(a). Les gros (resp. petits) points correspondent aux mesures réalisées avec un taux de cisaillement croissant (resp. décroissant). Toutes les observations effectuées sur ce mélange se transposent sur les différents mélanges utilisés dans ce manuscrit. La viscosité est mesurée sur une gamme de cisaillements correspondant aux expériences réalisées par la suite sur les remontées de bulles dans l’ordre croissant puis décroissant. Ce protocole permet de nous assurer d’une part que le mélange utilisé est bien newtonien (la viscosité ne dépend pas du cisaillement) et d’autre part que le mélange est bien à l’équilibre lors de la mesure de viscosité (la viscosité ne dépend pas de si l’on augmente ou diminue le cisaillement, il n’y a pas d’hystérésis). Nous pouvons voir sur la figure A.3.1(b) l’évolution de la viscosité en fonction de la température pour le mélange eau/Triton/ZnCl. Elle varie d’un facteur 2 sur une variation de température de 5 K. Il faut donc bien faire attention à mesurer la viscosité du mélange à la température des expériences afin de pouvoir comparer correctement les données. Il faut garder en tête que la dépendance en  $\eta$  avec la température a été bien prise en compte pour le chapitre 3 mais pas systématiquement pour le chapitre 2. Cela est dû au fait que la forte dépendance de la viscosité des mélanges avec la température a été remarquée tardivement.

La figure A.3.1(c) montre, en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , la viscosité d’une suspension d’eau/Triton/ZnCl avec 20 % de particules de PMMA de diamètre  $d_p = 59 \mu\text{m}$  à  $T = 22 \text{ }^\circ\text{C}$ . Les gros (resp. petits) points correspondent aux mesures réalisées avec un taux de cisaillement croissant (resp. décroissant). On remarque que la suspension est elle aussi assimilable à un liquide newtonien. L’évolution de la viscosité du mélange eau/Triton/ZnCl en fonction de la fraction volumique de particules  $\phi$  à  $T = 23 \text{ }^\circ\text{C}$  est présentée figure A.3.1(d).

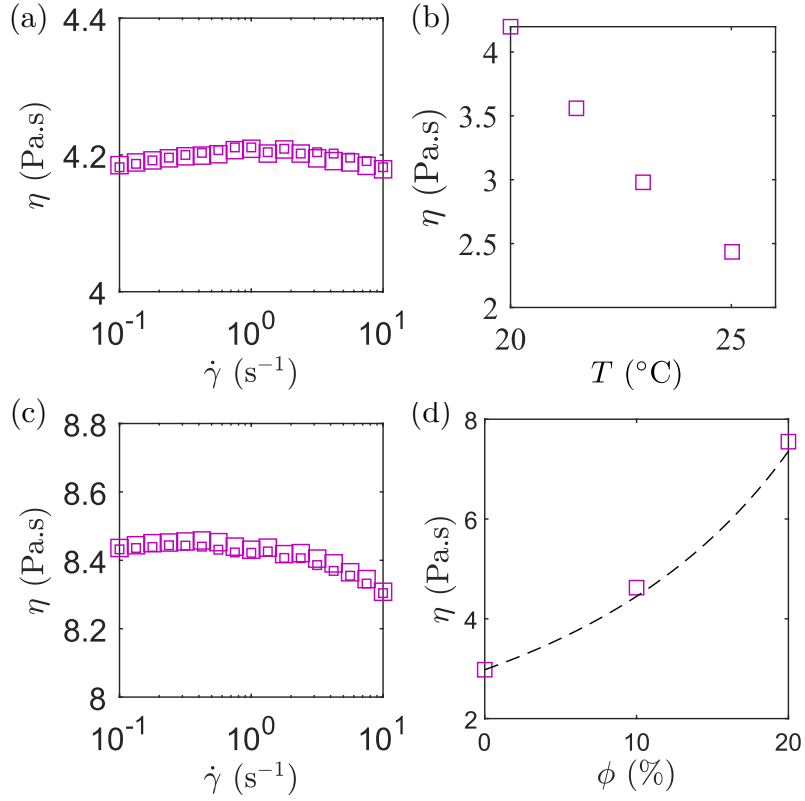


FIGURE A.3.1 – Propriétés rhéologiques d’une suspension d’eau/Triton/ZnCl avec des particules de PMMA de diamètre  $d_p = 59 \mu\text{m}$ . **(a)** Évolution de la viscosité du liquide (sans particule) à  $T = 20^\circ\text{C}$  en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Les gros (resp. petits) points correspondent aux mesures réalisées avec un taux de cisaillement croissant (resp. décroissant). **(b)** Évolution de la viscosité de ce même mélange en fonction de la température. Les barres d’erreur sont plus petites que la taille des points. **(c)** Évolution de la viscosité de la suspension à  $\phi = 20\%$  et  $T = 22^\circ\text{C}$  en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Les gros (resp. petits) points correspondent aux mesures réalisées avec un taux de cisaillement croissant (resp. décroissant). **(d)** Évolution de la viscosité de la suspension en fonction de la fraction volumique de grains. Les pointillés correspondent au modèle théorique de Maron-Pierce (voir le texte pour plus de détails).

Les pointillés noirs correspondent au modèle de Maron-Pierce  $\eta(\phi) = \eta(\phi = 0)/(1 - \phi/\phi_c)^2$  avec  $\phi_c = 0.55$ , qui a été vérifié pour de nombreuses suspensions monodisperses et non browniennes comme celle que l’on utilise ici. Les points expérimentaux sont en bon accord avec ce modèle (Guazzelli et Pouliquen, 2018; Madec, 2021).



# Annexe B

## Visualisation des grains

### B.1 Isoindicité : description

Nous allons pour cela utiliser une suspension isodense et isoindice dans laquelle nous insérons une espèce fluorescente. Le principe de l'isoindicité est schématisé sur la figure B.1.1. Si on utilise une suspension dont l'indice optique des grains est différent de celui du liquide, alors la première couche de particules dévie les rayons optiques et la suspension est opaque (figure B.1.1(a)). De plus, il est impossible de déterminer dans quel plan  $yz$  se trouve exactement une particule. Si jamais les deux indices optiques sont égaux, on ne peut pas distinguer les particules du liquide et on a l'impression que la cellule est remplie d'un simple liquide (figure B.1.1(b)). Imaginons que l'on ajoute ensuite une espèce liquide fluorescente à notre mélange qui ne pénètre pas les grains et que l'on éclaire à l'aide d'une nappe LASER un plan  $yz$  qui va exciter l'espèce fluorescente. En mettant un filtre qui bloque la longueur d'onde du LASER et qui laisse passer la longueur d'onde réémise par l'espèce fluorescente, seul le liquide émet de la lumière et les particules apparaissent comme des disques noirs dans le plan illuminé par le LASER. On peut alors distinguer les particules et remonter à la fraction volumique locale.

Pour appliquer cette méthode aux suspensions utilisées dans le chapitre 4 (partie 4.1.2), il faut donc réussir à préparer un mélange isodense qui soit aussi isoindice. La prochaine partie portera sur ce point.

### B.2 Recherche du bon mélange

Souzy et al. (2015) et Souzy (2016) ont proposé un mélange isodense et isoindice à  $23.0 \pm 0.5$  °C pour un LASER de couleur  $\lambda = 532$  nm, qui est celui présenté dans la partie 4.1.2 et utilisé dans la partie 4.2.1. Néanmoins, ne souhaitant pas utiliser de la Rhodamine en tant qu'espèce fluorescente vu qu'elle est cancérigène, nous utilisons de la fluorescéine. Cela a pour effet de modifier la longueur d'onde du LASER à utiliser afin de correspondre au mieux à celle absorbée par la fluorescéine. De plus, nous ne travaillons pas dans une pièce à température contrôlée. Or, l'indice optique d'un milieu quelconque dépend à la fois de la longueur d'onde et de la température. Il faut donc déterminer quel est le bon mélange pour travailler avec de la fluorescéine pour nos températures de travail.

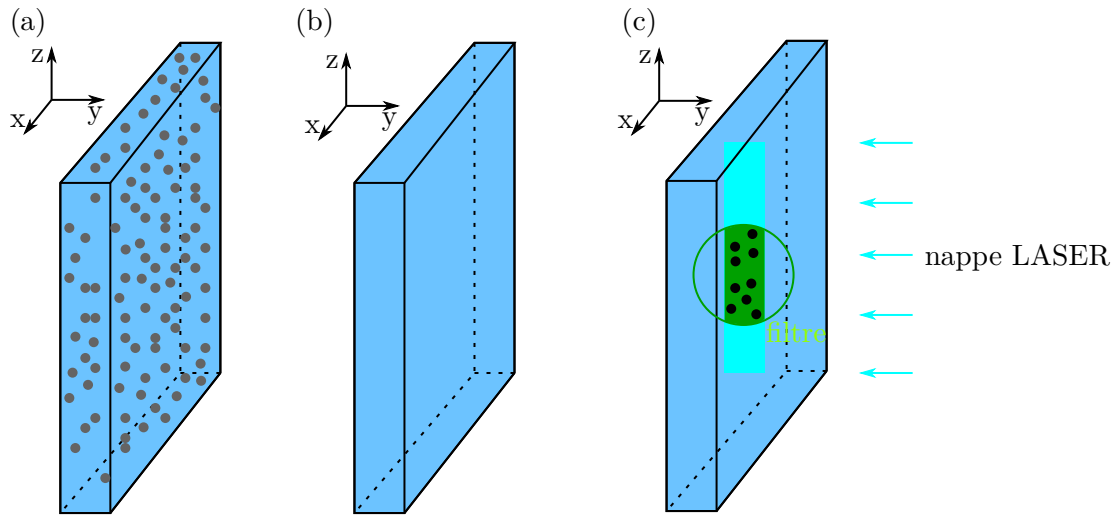


FIGURE B.1.1 – Schéma explicatif du principe de l'isoindicité. **(a)** Dans une suspension non isoindice, les grains bloquent la vue et la suspension est opaque : on ne peut pas déterminer ce qu'il se passe dans le gap de la cellule (plan  $yz$ ). **(b)** Pour un mélange isoindice, la suspension est transparente et on ne peut donc pas non plus distinguer les particules. **(c)** En rajoutant une espèce fluorescente, on peut faire ressortir la position des particules dans un plan  $yz$ , qui apparaissent à l'aide d'un filtre comme des disques noirs.

Les spectres d'émission et d'absorption de la fluorescéine réalisés par [Klonis et al. \(1998\)](#) sont présentés sur la figure [B.2.1](#). La fluorescéine a son maximum d'absorption vers  $\lambda = 490$  nm (bleu) et réémet autour de  $\lambda = 520$  nm (vert). On a utilisé un LASER Coherent Sapphire 488 émettant à  $\lambda = 488$  nm afin d'exciter la fluorescéine. Comme l'indice optique des particules et du liquide dépendent de la longueur d'onde et que l'on travaille à deux longueurs d'ondes différentes (celle du LASER et celle d'émission de la fluorescéine), il faut que ces dernières soient assez proches afin qu'il soit possible d'avoir une isoindicité assez bonne pour les deux. [Dijksman et al. \(2012\)](#) estiment qu'un écart de 30 nm maximum est souhaité afin que cela soit possible, ce qui est le cas pour la fluorescéine.

## B.2.1 Détermination grossière

Dans un premier temps, nous allons essayer de déterminer approximativement le mélange dont on a besoin. Pour cela, nous repartons du mélange proposé par [Souzy \(2016\)](#), qui fonctionne pour une longueur d'onde ( $\lambda = 532$  nm) proche de celle qui nous intéresse ( $\lambda = 490$  nm). Ce mélange est composé d'eau, de chlorure de zinc et de Triton (voir détails partie [4.1.2](#)). On peut remarquer à l'aide du tableau [4.1](#) que la masse volumique du Triton et de l'eau sont relativement proches par rapport à celle du chlorure de zinc. La proportion de ZnCl dans le mélange est donc grandement responsable de sa masse volumique. Afin de garder un mélange isodense avec le PMMA, nous gardons donc la proportion massique de chlorure de zinc proposé par [Souzy \(2016\)](#), à savoir 14.24 % (les pourcentages indiqués ici étant des pourcentages massiques). Nous allons donc varier la proportion d'eau présente dans le mélange, ce dernier étant complété par du Triton.

Afin de tester l'isoindicité de mélanges avec différents pourcentages d'eau, on utilise le

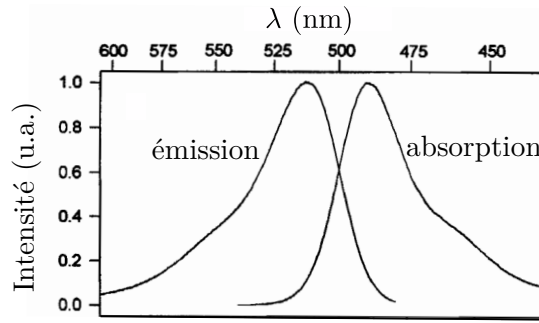


FIGURE B.2.1 – Spectre d’émission et d’absorption de la fluorescéine dans de l’eau réalisés par [Klonis et al. \(1998\)](#).

montage expérimental présenté figure [B.2.2\(a\)](#). Le faisceau LASER est converti en nappe LASER à l’aide d’une lentille cylindrique divergente. Cette nappe LASER traverse ensuite une cuve remplie de la suspension que l’on souhaite étudier avant d’arriver sur une photodiode THORLABS PDA36A. Un écran peut être positionné devant la photodiode afin d’observer la nappe LASER. Si le mélange est isoindice, alors la nappe LASER n’est pas changée par la suspension et reste concentrée au niveau de la photodiode. Si ce n’est pas le cas, la nappe LASER est diffusée par les interfaces liquides/solides et la photodiode récupère une plus faible quantité de lumière.

La figure [B.2.2\(b\)](#) montre l’évolution de  $\mathcal{T}$  en fonction de la proportion d’eau dans le mélange, où  $\mathcal{T}$  est le rapport entre l’intensité lumineuse reçue par la photodiode lorsqu’il y a la cuve et lorsqu’il n’y a pas la cuve. Les incertitudes sont plus petites que la taille des points. L’expérience est réalisée à température ambiante ( $\approx 23^\circ\text{C}$ , la plaque chauffante présente sur la figure [B.2.2\(a\)](#) ne servant donc pas ici). On voit que l’on obtient un maximum d’intensité lumineuse autour de 10.8 % d’eau, la quantité de lumière reçue par la photodiode diminuant lorsque l’on s’éloigne de cette valeur. La figure [B.2.2\(c\)](#) montre pour cinq des expériences l’allure de la nappe LASER au niveau de la photodiode. Le carré en pointillés noirs représente approximativement la photodiode se trouvant juste derrière l’écran. On remarque que pour le mélange à 10.8 % d’eau, la nappe LASER reste fine (plus fine que la photodiode) et brillante. Plus on s’éloigne de cette composition, plus la nappe est diffuse et se transforme en une tache lumineuse, dont seule une faible partie est récupérée par la photodiode. On en déduit que, pour obtenir un mélange isoindice à température ambiante pour  $\lambda = 488 \text{ nm}$ , il faut 10.8% d’eau. Néanmoins, les indices optiques étant dépendants de la température (cette dernière n’étant pas contrôlée), il faut que l’on détermine le mélange optimal à utiliser en fonction de la température.

## B.2.2 Détermination précise

Maintenant que l’on connaît le mélange qui fonctionne bien à  $23^\circ\text{C}$ , il reste à savoir comment l’adapter à la température exacte. Pour cela, on prépare de nouveau plusieurs mélanges, mais dont la proportion en eau est proche de 10.8 %. Le but est de savoir à quelle température chacun d’entre eux est isoindice. Pour réaliser l’expérience on commence par laisser une vingtaine de minutes le mélange étudié dans un frigo, on le dispose ensuite sur la plaque chauffante (voir figure [B.2.2\(a\)](#)) et on rajoute dans la cuve un barreau magnétique

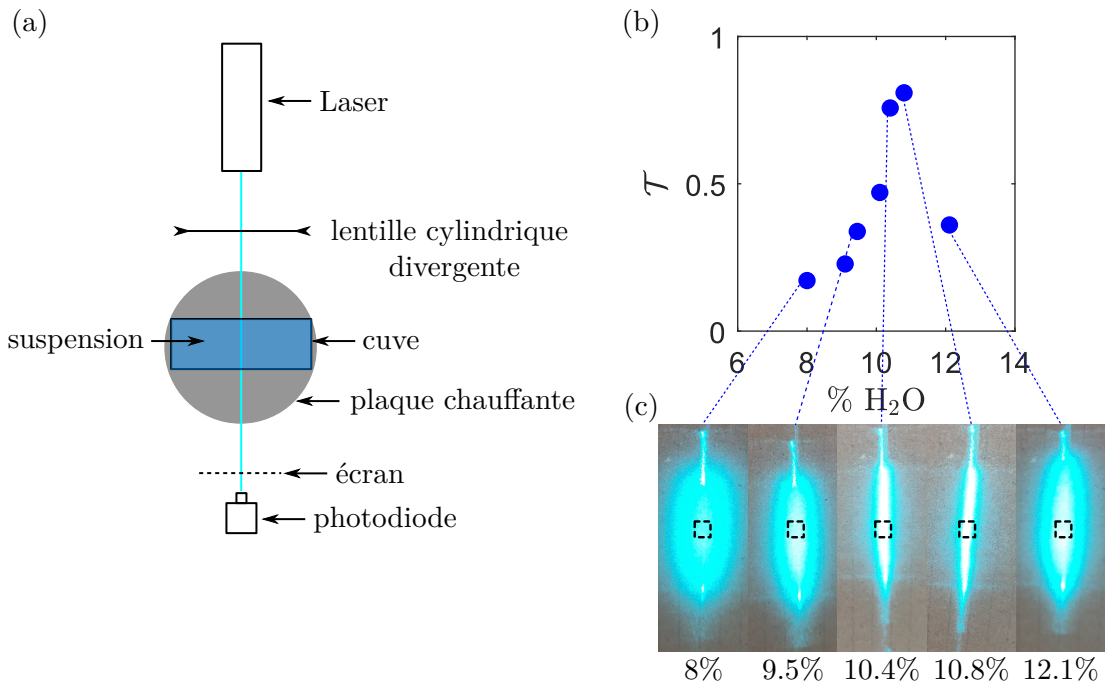


FIGURE B.2.2 – (a) Schéma du dispositif expérimental permettant de caractériser la qualité de l'isoindicité d'une suspension. (b) Évolution de  $\mathcal{T}$  en fonction de la proportion d'eau dans le mélange, où  $\mathcal{T}$  est le rapport entre l'intensité lumineuse reçue par la photodiode lorsqu'il y a la cuve et lorsqu'il n'y a pas la cuve. (c) Image de la nappe LASER au niveau de la photodiode pour cinq des expériences réalisées (voir (b)). Le carré en pointillés noir représentent approximativement la photodiode se trouvant juste derrière l'écran. Les % indiqués correspondent au pourcentage d'eau utilisée dans la suspension pour réaliser la photographie correspondante.

afin d'agiter le mélange ainsi que deux thermocouples disposés à chaque extrémité (voir figure B.2.3(a)) afin de suivre l'évolution de la température. On laisse d'abord le mélange se réchauffer naturellement puis on allume la plaque chauffante, tout en suivant l'évolution de l'intensité reçue par la photodiode en fonction de la température. La figure B.2.3(b) montre, pour un mélange à 10.89 % d'eau, l'évolution de  $\mathcal{T}$  en fonction de la température mesurée par les deux thermocouples avec en jaune, le thermocouple le plus proche de la plaque chauffante et, en bleu, celui qui en est le proche de la surface ((voir figure B.2.3(a)). Les pointillés sont des guides visuels indiquant le maximum de chaque courbe. On remarque que les deux courbes ne se superposent pas mais ont une tendance similaire : elles augmentent sur une bonne plage de température avec de diminuer. Cela signifie que le mélange n'est malheureusement pas homogène malgré l'agitation du barreau magnétique. On définit  $T_{iso}$  comme étant la moyenne des températures auxquelles la courbe rouge et la courbe bleue sont maximales et on associe à  $T_{iso}$  un écart-type correspondant à la moitié de l'écart entre ces deux valeurs. En répétant cette expérience pour les différents mélanges, on obtient la figure B.2.3(c) qui montre l'évolution de  $T_{iso}$  avec le proportion massique d'eau dans le mélange. Les pointillés noirs correspondent à un ajustement linéaire des points expérimentaux. Cet ajustement linéaire permet donc de savoir quel mélange utiliser exactement selon la température de travail.



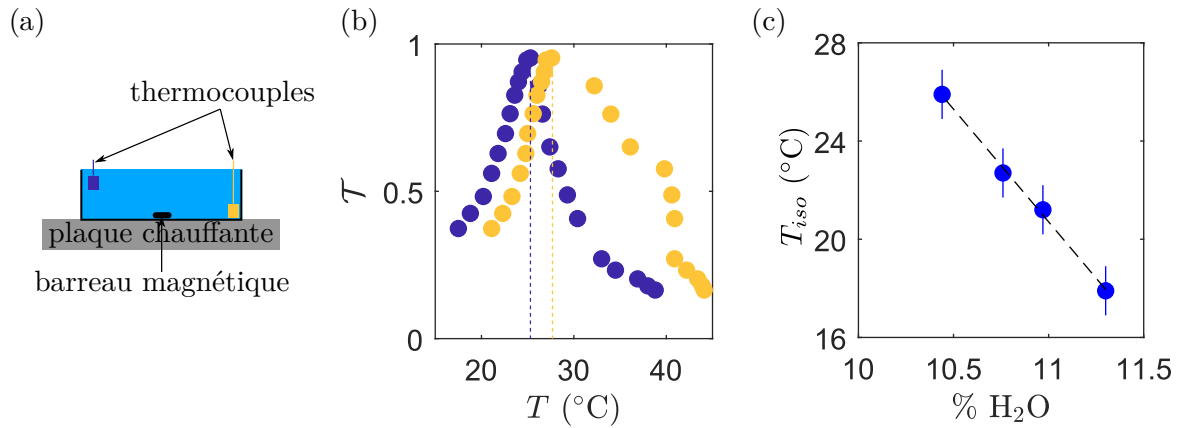


FIGURE B.2.3 – (a) Schéma de l'intérieur de la cuve, dans laquelle on dispose un barreau magnétique pour homogénéiser le milieu et deux thermocouples pour réaliser une suivi de température. (b)  $\mathcal{T}$  en fonction de la température pour un mélange à 10.89 % d'eau. Les pointillés sont des guides visuels repérant le maximum de chaque courbe. La courbe jaune correspond au thermocouple le plus proche de la surface chauffante et le bleu le plus loin. (c) Température d'isoindicité en fonction du pourcentage massique d'eau.

### B.2.3 Vérification expérimentale

Maintenant que nous savons quel mélange nous devons faire, l'objectif est de savoir si l'on est capable de discerner les particules de PMMA dans la suspension. Pour cela, on réalise le montage schématisé sur la figure B.2.4(a), où l'on envoie sur la suspension une nappe LASER et on regarde la région ainsi éclairée à travers un filtre ne laissant passer que la longueur d'onde fluorescée avec un appareil photo NIKON D850 sur lequel on monte un objectif nikon ED AF micro nikkor 200mm. Le filtre est un passe haut de longueur d'onde  $\lambda = 550$  nm. La figure B.2.4(b) montre une des photos obtenues avec une suspension à  $\phi = 0.2$ . La nappe LASER arrive de la droite de l'image. On peut y voir de longs traits noirs horizontaux provenant de réfraction à la surface des grains dues aux défauts d'isoindicité [Dijksman et al.](#). On remarque que l'on est capable de distinguer les particules (points noirs), tout particulièrement sur la droite de l'image. Plus on se trouve sur la gauche, plus les particules sont floues car la lumière provenant de la nappe LASER est diffusée progressivement dans la suspension, l'isoindicité n'étant pas parfaite. Ce résultat est encourageant étant donné que les cellules de Hele-Shaw ont des gaps  $h = \{2.3, 5.2\}$  mm qui sont bien plus petits que la zone observée ici.

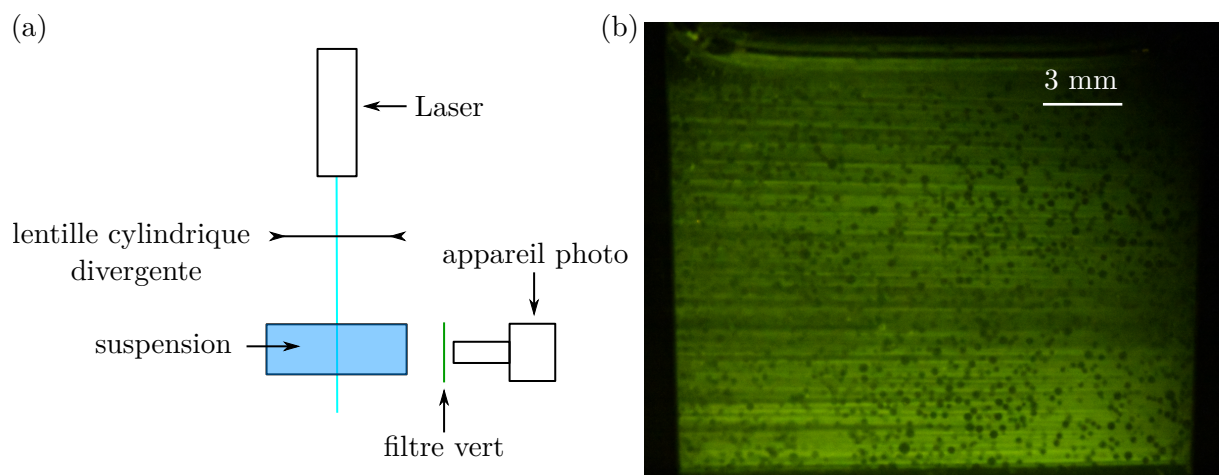


FIGURE B.2.4 – (a) Schéma du montage réalisé afin d’obtenir l’image (b) sur laquelle on voit apparaître les particules de PMMA (points noirs). Le filtre est un passe haut de longueur d’onde  $\lambda = 550$  nm. La nappe LASER arrive de la droite de l’image.

# Bibliographie

- A. A. Akoulov et T. Wiens. The effect of co-saturated salts on the kinematic viscosity of water. University of Saskatchewan Undergraduate Research Journal, 5(1), 2018.
- P. Aussillous et D. Quéré. Quick deposition of a fluid on the wall of a tube. Physics of Fluids, 12(10) : 2367–2371, 2000.
- G. K. Batchelor. The effect of Brownian motion on the bulk stress in a suspension of spherical particles. Journal of Fluid Mechanics, 83(1) : 97–117, 1977.
- F. P. Bretherton. The motion of long bubbles in tubes. Journal of Fluid Mechanics, 10(2) : 166–188, 1961.
- J. Campos et J. G. De Carvalho. An experimental study of the wake of gas slugs rising in liquids. Journal of Fluid Mechanics, 196 : 27–37, 1988.
- G. Caramanna, N. Voltattorni, L. Caramanna, D. Cinti, G. Galli, L. Pizzino, et F. Quattrocchi. Scientific diving techniques applied to the geomorphological and geochemical study of some submarine volcanic gas vents (Aeolian Islands, southern Tyrrhenian sea, Italy). Proceedings of the 2005 American Academy of Underwater Sciences Symposium, pages 11–12, 2005.
- C. Clanet et G. Searby. On the glug-glug of ideal bottles. Journal of Fluid Mechanics, 510 : 145–168, 2004.
- R. Clift, J. R. Grace, et M. E. Weber. Bubbles, drops, and particles. Dover Publications, Inc., New York, 2005.
- R. Davies et G. I. Taylor. The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 200(1062) : 375–390, 1950.
- H. De Bruijn. The viscosity of suspensions of spherical particles. (The fundamental  $\eta$ - $c$  and  $\varphi$  relations). Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas, 61(12) : 863–874, 1942.
- J. A. Dijksman, N. Brodu, et R. P. Behringer. Refractive index matched scanning and detection of soft particles. Review of Scientific Instruments, 88(5) : 051807.
- J. A. Dijksman, F. Rietz, K. A. Lőrincz, M. Van Hecke, et W. Losert. Invited article : Refractive index matched scanning of dense granular materials. Review of Scientific Instruments, 83(1) : 011301, 2012.

- B. Dollet, P. Marmottant, et V. Garbin. Bubble dynamics in soft and biological matter. Annual Review of Fluid Mechanics, 51 : 331–355, 2019.
- D. T. Dumitrescu. Strömung an einer luftblase im senkrechten rohr. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 23(3) : 139–149, 1943.
- W. Eck et J. Siekmann. On bubble motion in a Hele-Shaw cell, a possibility to study two-phase flows under reduced gravity. Ingenieur-Archiv, 47 : 153–168, 1978.
- A. Einstein. Eine neue bestimmung der moleküldimensionen. PhD thesis, ETH Zurich, 1905.
- F. Falkinhoff. Inertial flows in wall-bounded porous media : from pore- to global scales. PhD thesis, Ecole normale supérieure de lyon - ENS de Lyon, 2023.
- Z. Feng et L. Leal. Nonlinear bubble dynamics. Annual Review of Fluid Mechanics, 29(1) : 201–243, 1997.
- A. Filella, P. Ern, et V. Roig. Oscillatory motion and wake of a bubble rising in a thin-gap cell. Journal of Fluid Mechanics, 778 : 60–88, 2015.
- A. Gaillard, J. S. Keeler, G. Le Lay, G. Lemoult, A. B. Thompson, A. L. Hazel, et A. Juel. The life and fate of a bubble in a geometrically perturbed Hele-Shaw channel. Journal of Fluid Mechanics, 914 : A34, 2021.
- P.-M. Gassin. Mesure de la tension superficielle par la technique de la goutte pendante. Union des professeurs de physique et de chimie, 108 : 1–8, 2014.
- P. Gondret, N. Rakotomalala, M. Rabaud, D. Salin, et P. Watzky. Viscous parallel flows in finite aspect ratio Hele-Shaw cell : Analytical and numerical results. Physics of Fluids, 9 (6) : 1841–1843, 1997.
- É. Guazzelli et O. Pouliquen. Rheology of dense granular suspensions. Journal of Fluid Mechanics, 852 : P1, 2018.
- M. Hashida, K. Hayashi, et A. Tomiyama. Rise velocities of single bubbles in a narrow channel between parallel flat plates. International Journal of Multiphase Flow, 111 : 285–293, 2019.
- R. Hidalgo, C. Lozano, I. Zuriguel, et A. Garcimartín. Force analysis of clogging arches in a silo. Granular Matter, 15 : 841–848, 2013.
- N. Hooshyar, J. R. Van Ommen, P. J. Hamersma, S. Sundaresan, et R. F. Mudde. Dynamics of single rising bubbles in neutrally buoyant liquid-solid suspensions. Physical Review Letters, 110(24) : 244501, 2013.
- H. F. Hosen, A. Shahmardi, L. Brandt, et J. Solsvik. Dynamics of a single bubble in Newtonian and non-Newtonian fluids : Experimental and simulation approaches. International Journal of Multiphase Flow, 174 : 104789, 2024.

- L. Keiser, K. Jaafar, J. Bico, et E. Reyssat. Dynamics of non-wetting drops confined in a Hele-Shaw cell. Journal of Fluid Mechanics, 845 : 245–262, 2018.
- N. Klonis, A. H. Clayton, E. W. Voss Jr, et W. H. Sawyer. Spectral properties of fluorescein in solvent-water mixtures : applications as a probe of hydrogen bonding environments in biological systems. Photochemistry and Photobiology, 67(5) : 500–510, 1998.
- A. R. Kopf-Sill et G. Homsy. Bubble motion in a Hele-Shaw cell. Physics of Fluids, 31(1) : 18–26, 1988.
- C. Madec. Dynamique de bulles isolées et interactions de bulles multiples dans des suspensions granulaires confinées entre deux plaques. PhD thesis, Université de Lyon, 2021.
- C. Madec, B. Collin, J. J. S. Jerome, et S. Joubaud. Puzzling bubble rise speed increase in dense granular suspensions. Physical Review Letters, 125(7) : 078004, 2020.
- J. Magnaudet et I. Eames. The motion of high-Reynolds-number bubbles in inhomogeneous flows. Annual Review of Fluid Mechanics, 32(1) : 659–708, 2000.
- A. Marin, H. Lhuissier, M. Rossi, et C. J. Kähler. Clogging in constricted suspension flows. Physical Review E, 97(2) : 021102, 2018.
- T. Maxworthy. Bubble formation, motion and interaction in a Hele-Shaw cell. Journal of Fluid Mechanics, 173 : 95–114, 1986.
- T. Maxworthy, C. Gnann, M. Kürten, et F. Durst. Experiments on the rise of air bubbles in clean viscous liquids. Journal of Fluid Mechanics, 321 : 421–441, 1996.
- S. Mer, O. Praud, H. Neau, N. Merigoux, J. Magnaudet, et V. Roig. The emptying of a bottle as a test case for assessing interfacial momentum exchange models for Euler-Euler simulations of multi-scale gas-liquid flows. International Journal of Multiphase Flow, 106 : 109–124, 2018.
- S. Mer, O. Praud, J. Magnaudet, et V. Roig. Emptying of a bottle : How a robust pressure-driven oscillator coexists with complex two-phase flow dynamics. International Journal of Multiphase Flow, 118 : 23–36, 2019.
- B. Monnet, C. Madec, V. Vidal, S. Joubaud, et J. J. S. Jerome. Bubble rise in a Hele-Shaw cell : bridging the gap between viscous and inertial regimes. Journal of Fluid Mechanics, 942 : R3, 2022.
- P. R. Nott et J. F. Brady. Pressure-driven flow of suspensions : simulation and theory. Journal of Fluid Mechanics, 275 : 157–199, 1994.
- C.-W. Park et G. Homsy. Two-phase displacement in Hele Shaw cells : theory. Journal of Fluid Mechanics, 139 : 291–308, 1984.
- L. Pavlov, S. Cazin, P. Ern, et V. Roig. Exploration by shake-the-box technique of the 3D perturbation induced by a bubble rising in a thin-gap cell. Experiments in Fluids, 62 : 1–19, 2021a.

- L. Pavlov, M. V. d'Angelo, M. Cachile, V. Roig, et P. Ern. Kinematics of a bubble freely rising in a thin-gap cell with additional in-plane confinement. Physical Review Fluids, 6(9) : 093605, 2021b.
- A. Prosperetti. Bubbles. Physics of Fluids, 16(6) : 1852–1865, 2004.
- L. Rohilla et A. K. Das. Fluidics in an emptying bottle during breaking and making of interacting interfaces. Physics of Fluids, 32(4) : 042102, 2020.
- V. Roig, M. Roudet, F. Risso, et A.-M. Billet. Dynamics of a high-Reynolds-number bubble rising within a thin gap. Journal of Fluid Mechanics, 707 : 444–466, 2012.
- D. Sharaf, A. Premlata, M. K. Tripathi, B. Karri, et K. C. Sahu. Shapes and paths of an air bubble rising in quiescent liquids. Physics of Fluids, 29(12) : 122104.
- M. Souzy. Mélange dans les suspensions de particules cisillées à bas nombre de Reynolds. PhD thesis, Aix Marseille Université, 2016.
- M. Souzy, X. Yin, E. Villiermaux, C. Abid, et B. Metzger. Super-diffusion in sheared suspensions. Physics of fluids, 27(4) : 041705, 2015.
- G. Taylor et P. Saffman. A note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous medium. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 12(3) : 265–279, 1959.
- C. Toupoint, S. Joubaud, et B. R. Sutherland. Fall and break-up of viscous miscible drops in a Hele-Shaw cell. Physical Review Fluids, 6(10) : 103601, 2021.
- M. K. Tripathi, K. C. Sahu, et R. Govindarajan. Dynamics of an initially spherical bubble rising in quiescent liquid. Nature Communications, 6(1) : 6268, 2015.
- N. Vani, S. Escudier, et A. Sauret. Influence of the solid fraction on the clogging by bridging of suspensions in constricted channels. Soft matter, 18(36) : 6987–6997, 2022.
- K. Yeo et M. R. Maxey. Numerical simulations of concentrated suspensions of monodisperse particles in a Poiseuille flow. Journal of Fluid Mechanics, 682 : 491–518, 2011.

## Résumé

Les écoulements multiphasiques (gaz/liquide/solide) sont présents dans de nombreux processus naturels et industriels. Malgré les nombreuses études sur ce sujet, sa physique riche et complexe soulève encore de nombreuses questions. Dans cette thèse, nous proposons de quantifier d'une part la remontée d'une bulle unique dans un milieu confiné et d'autre part, la vidange d'un réservoir. Dans les deux cas, nous étudierons et comparerons les fluides newtoniens et les suspensions.

Tout d'abord, nous avons regardé la vitesse et la forme d'une bulle remontant à la verticale dans un liquide newtonien. Un modèle théorique quantifiant la vitesse des bulles pour toute viscosité a été développé et vérifié expérimentalement. De plus, il a été noté que la forme des bulles est caractéristique du régime dans lequel elles sont, avec des bulles allongées dans le sens de leur remontée dans le régime visqueux et aplaties perpendiculairement dans le régime inertiel. Étonnamment, l'écoulement du fluide généré par les bulles change peu.

La suite du manuscrit porte sur l'étude de la remontée d'une bulle unique en géométrie inclinée par rapport à la gravité. La forme des bulles change peu et uniquement pour les géométries les plus confinées. Nous montrons que l'inclinaison induit des frottements supplémentaires et en proposons une modélisation théorique.

Nos travaux se sont ensuite focalisés sur la remontée de bulles dans des suspensions. Une méthode expérimentale permettant de visualiser les particules de cette dernière a été mise en place dans le but de déterminer expérimentalement la fraction volumique locale de grains.

Enfin, nous nous sommes intéressés à la vidange d'un réservoir rempli d'un liquide newtonien ou d'une suspension. Dans le premier cas, la diminution du débit volumique et de la fréquence des bulles avec la viscosité a été caractérisée. Dans le second cas, deux régimes distincts ont été observés, l'un où la suspension s'écoule comme un liquide et l'autre où des particules émergent, ce qui a pour conséquence d'accélérer la vidange.

## Abstract

Multiphase flows (gas/liquid/solid) are omnipresent in natural and industrial process. Despite all the studies on this topic, its complex and rich physics still rises a lot of questions. We studied the rise of single bubbles in a confined environment as well as the emptying of a tank. In both cases, Newtonian fluids and suspensions are examined and compared.

First of all, the speed and shape of a freely rising bubble in a vertical cell filled with Newtonian fluid have been looked in details. A theoretical model taking into account the fluid inertia predicting the bubbles speed has been established and experimentally verified. Besides, the bubbles shape strongly depends on the regime, with elongated bubbles in the direction of their movement in the viscous regime and flattened bubbles in the inertial regime. Surprisingly, the liquid flow generated by the bubble does not change significantly.

The following chapter of the manuscript focuses on the rise of single bubbles in a geometry tilted with respect to the gravity. Bubbles shape slightly changes but only for the most confining geometries. The tilting induces additional friction that we modeled theoretically.

Next, we focused on the rise of individual bubbles in a suspension. An experimental method designed to distinguish the particles in a suspension has been implemented in order to locally measure the volume fraction of grains.

Finally, our work aimed at understanding the emptying of a tank filled with Newtonian fluid or suspension. In the former case, we quantified the decrease of flow rate and frequency of bubbles with the viscosity. In the latter case, two distinct regimes are noticeable : first, the suspension flows like a Newtonian fluid and latter, some particles emerge, fastening the emptying but making it incomplete.