Mesures de Hausdorff et Théorème d'Egoroff

Exercice 1 (Théorème d'Egoroff)**.** Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale finie. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions réelles mesurables sur X, et f une fonction réelle mesurable sur X telles que $f_n \to f$ μ-p.p. lorsque $n \to \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, et pour tout $\eta > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que
$$\mu\left(\bigcup_{j\geq n}\left\{x \in X \ : \ |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \eta.$$
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$ de mesure $\mu(A) \leq \varepsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $X \setminus A$.
3. Donner un contre-exemple à ce résultat lorsque $\mu(X) = \infty$.
4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{T})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ **converge en mesure** vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\right) = 0.$$
Montrer que si $\mu(X) < +\infty$ et la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge μ-p.p. vers $f : X \to \mathbb{R}$, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge en mesure vers f.

Exercice 2 (Mesures de Hausdorff)**.** On prend $d \in \mathbb{N}^*$ et dans la suite de l'exercice on considère $\mathbb{R}^d$ muni d'une norme arbitraire $\|.\|$. Soit $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$. Pour $A \subset \mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{R}_\epsilon(A)$ l'ensemble des suites $(B_k)_{k\geq 1}$ telles que B_k soient des boules ouvertes de diamètres inférieurs à ϵ (éventuellement l'ensemble vide) et $A \subset \cup_{k\leq 1} B_k$. On pose alors :
$$\mu_\alpha^\epsilon(A) := \inf_{(B_k)_{k\geq 1}\in\mathcal{R}_\epsilon(A)} \left(\sum_{k\geq 1} (\mathrm{diam} B_k)^\alpha\right)$$

Une *mesure extérieure* sur $\mathbb{R}^d$ est une application μ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ telle que :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\,,\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
3. $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}^*},\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

1. Montrer que la fonction $\epsilon \mapsto \mu_\alpha^\epsilon(A)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que l'application μ_α^ϵ est une mesure extérieure.
3. Justifier que l'application $\mu_\alpha := \lim_{\epsilon\to 0} \mu_\alpha^\epsilon$ est une mesure extérieure. On l'appelle la mesure de Hausdorff.
4. Soit $Q = [0; 1]^d$, prouver qu'il existe un constante C (dépendant éventuellement de α et d) telle que $\mu_\alpha^\epsilon(Q) \leq C\epsilon^{\alpha-d}$. En déduire que $\mu_\alpha(Q) = 0$ pour $\alpha > d$ puis que $\mu_\alpha(\mathbb{R}^d) = 0$ toujours pour $\alpha > d$.

5. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$, montrer que $\alpha \mapsto \mu_\alpha(A)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que la fonction $\alpha \mapsto \epsilon^{-\alpha}\mu_\alpha^\epsilon(A)$ pour tout ϵ.
6. Soit $A, B \subset \mathbb{R}^d$ telles qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, $\|x-y\| \geq \delta$. Montrer que $\mu_\alpha(A \cup B) = \mu_\alpha(A) + \mu_\alpha(B)$. On admettra que cette propriété est suffisante pour conclure que μ_α est une mesure sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^d$.
7. Montrer que pour tout α, μ_α est invariante par translation et que pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mu_\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha \mu_\alpha(A)$.
8. Montrer qu'il existe une constante $D > 0$ telle que $\mu_d^\epsilon(Q) \geq D$. En déduire que $0 < \mu_d(Q) < +\infty$ puis que μ_d est un multiple de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.
9. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. On définit la dimension de Hausdorff de A comme :

$$\mathcal{H}(A) := \inf\{\alpha > 0 | \mu_\alpha(A) = 0\} \in [0; d]$$

Montrer que pour $\alpha > \mathcal{H}(A)$, $\mu_\alpha(A) = 0$ et que pour $\alpha < \mathcal{H}(A)$, $\mu_\alpha(A) = +\infty$.

Bonus On définit *l'ensemble triadique de Cantor* K_3 de la manière suivante : $K_3^{(0)}$ est l'intervalle $[0,1]$, $K_3^{(1)}$ est obtenu en découpant $K_3^{(0)}$ en trois intervalles de même taille et en ne gardant que les deux intervalles (fermés) extrêmes ($K_3^{(1)} = [0,1/3] \cup [2/3,1]$), $K_3^{(2)}$ est obtenu en faisant subir le même sort aux (deux) intervalles constituant $K_3^{(1)}$ ($K_3^{(2)} = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$). On construit ainsi par récurrence des compacts $K_3^{(n)}$ formés de 2^n intervalles. Ces compacts sont emboîtés et on pose $K_3 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_3^{(n)}$ (voir figure ci-après).

FIGURE 1 – K_3 : premières étapes de construction (source : wikipédia)

On pose $s = \log 2/\log 3$. Montrer que, en prenant $\|.\| = |.|$ pour $d = 1$, on $\mu_s(K_3) \leq 1$. En déduire que $\mathcal{H}(K_3) \leq s$.