Devoir Maison 2 🏠

À rendre le **lundi 9 ou le mardi 10 décembre 2024** en début de TD.

La rédaction ne devra pas manquer d'arguments, tout en restant concise (vous êtes encouragés à utiliser, dès que cela est possible, tout résultat démontré en cours, en TD **ou au partiel***). Une part importante de la notation portera sur le soin et la rédaction de la copie.*

Exercice 1 – ***Divergence de la série de Fourier en un point***. La convergence des séries de Fourier dans L^2 n'entraîne pas la convergence ponctuelle : le but de cet exercice est d'étudier la divergence ponctuelle de certaines séries de Fourier de fonctions pourtant continues. On utilise les notations suivantes :

- $\mathscr{C}_{2\pi}$ désigne l'ensemble des fonctions 2π-périodiques continues, muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty := \sup_{x\in]-\pi,\pi]} |f(x)|$,
- pour $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de f par

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t\,,$$

- pour $f, g \in \mathscr{C}_{2\pi}$, on définit le produit de convolution de f et g par

$$f \star g : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Dans un premier temps on montre l'existence de fonctions dont la série de Fourier diverge en 0. Pour cela, on fixe $N \in \mathbb{N}$ et on considère l'application $l_N : f \in \mathscr{C}_{2\pi} \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)$ ainsi que le noyau de Dirichlet d'ordre N défini par $D_N : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=-N}^{N} e^{int}$. On admet (calcul facile) que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad D_N(t) = \begin{cases} 2N+1 & \text{si } t \in \pi\mathbb{Z}\,, \\ \frac{\sin\frac{(2N+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que que l_N est une application linéaire et continue, telle que $\|l_N\| := \sup_{f\in\mathscr{C}_{2\pi}\,:\,\|f\|_\infty\le 1} |l_N(f)|$ est majorée par $\|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|\,\mathrm{d}t$.
   <u>Indication :</u> On pourra commencer par écrire $l_N(f)$ sous la forme d'un produit de convolution.
2. Montrer que $\|l_N\| = \|D_N\|_1$.
   <u>Indication :</u> On pourra considérer les fonctions $f_\varepsilon : t \mapsto \frac{D_N(t)}{|D_N(t)|+\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$.
3. En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \|l_N\| = +\infty$.
4. À l'aide du théorème de Banach-Steinhaus rappelé ci-dessous, conclure l'existence d'une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathscr{C}_{2\pi}$, de fonctions continues 2π-périodiques dont la série de Fourier diverge en 0.

   Théorème 1 (*Banach-Steinhaus*). Soient E un espace vectoriel normé complet, F un espace vectoriel normé quelconque, et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Alors :
   - soit la famille $(\|f_i\|)_{i\in I}$ est bornée,
   - soit il existe une intersection dénombrable d'ouverts denses dans E, notée A, telle que $\sup_{i\in I} \|f_i(x)\| = +\infty$ pour tout $x \in A$.

Exercice 2 – ***Dual de*** L^p. Dans tout l'exercice, on considère $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ un ensemble mesuré et des fonctions définies sur Ω à valeurs réelles. Pour tout $p > 1$, on définit $(L^p)^*$ le dual topologique de $L^p := L^p(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ comme l'ensemble des applications linéaires et continues de L^p dans $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que **si Ω est de mesure finie**, et que l'on note $q \in [1, \infty[$ son exposant conjugué i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $(L^p)^* \simeq L^q$. Le résultat est vrai pour tout $p \in [1, \infty[$ mais on ne le montrera que pour $p \in]1, 2]$.

On suppose dans tout l'exercice que Ω est de mesure finie.

Considérons $\underline{p \in]1,2]}$. On pose :

$$\begin{aligned} \phi : L^q &\to (L^p)^* \\ g &\mapsto \phi_g \end{aligned} \qquad \text{où pour tout } f \in L^p,\ \phi_g(f) = \int_\Omega f(x)g(x)d\mu(x) \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que ϕ est une application bien définie, linéaire et continue.
2. Montrer que ϕ conserve la norme i.e. pour tout $g \in L^q$, $\|g\|_{L^q} = |||\phi_g|||_{(L^p)^*}$.
   <u>Indication :</u> Justifier qu'il existe u mesurable de valeur absolue 1 vérifiant $g = u|g|$.
3. Soit $\gamma \in (L^p)^*$.
   (a) En justifiant l'utilisation du théorème de Riesz pour les espaces de Hilbert, montrer qu'il existe $g \in L^2$ tel que la restriction de γ à L^2 vérifie :

   $$\text{pour tous } f \in L^2, \gamma_{|L^2}(f) = \int_\Omega g(x)f(x)d\mu(x).$$

   (b) Montrer que $g \in L^q$.
   <u>Indication :</u> on pourra considérer la suite $g_n := u|g|^{q-1}\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}$ où u est mesurable de valeur absolue 1 et vérifie $g = u|g|$.
4. En déduire que ϕ est surjective en utilisant la densité de L^2 dans L^p.
5. Conclure que $(L^p)^* \simeq L^q$.