Ensembles et dénombrabilité

Exercice 1 – ***Image directe, image réciproque***. Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si une affirmation est fausse dans le cas général, donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que cette affirmation soit vraie.
   (a) Pour tous $A, B \subseteq E$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   (b) Pour tous $A, B \subseteq E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   (c) Pour tout $A \subseteq E$, $f(A^c) = f(A)^c$.
   (d) Pour tous $A, B \subseteq F$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   (e) Pour tous $A, B \subseteq F$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   (f) Pour tout $A \subseteq F$, $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$.
2. Que se passe-t-il si l'on remplace $A \cup B$ (*resp.* $A \cap B$) par une union infinie $\bigcup_{i\geq 0} A_i$ (*resp.* $\bigcap_{i\geq 0} A_i$) ?

Exercice 2 – ***Théorème de Cantor-Bernstein***. Soient E et F deux ensembles. Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant : *S'il existe deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ injectives, alors il existe une bijection entre E et F.*

1. Soit $X = \{A \subset E \,:\, g(F \setminus f(A)) \subset E \setminus A\}$. Montrer que X n'est pas vide.
2. Montrer que X a un plus grand élément pour l'inclusion que l'on note M.
3. Montrer que $g(F \setminus f(M)) = E \setminus M$. Conclure.

Exercice 3 – ***Théorèmes de convergence : cas dénombrable***. On se donne E un ensemble dénombrable.
Pour toute famille $(a_i)_{i\in E}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ on définit $\sum_{i\in E} a_i$ par :

$$\sum_{i\in E} a_i = \sup_{I\subset E, I \text{ finie}} \sum_{i\in I} a_i$$

1. Montrer que cette définition coïncide avec la définition usuelle sur $\mathbb{N}$ (i.e. $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i := \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i$).
2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ une famille $(a_i^n)_{i\in E}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ telle que, à $i \in E$ fixé, la suite (a_i^n) soit croissante et tende vers un réel $a_i \in [0, +\infty[$. Montrer que :

$$\sum_{i\in E} a_i^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i\in E} a_i$$

3. Si on partitionne E en une union disjointe $\bigsqcup_{j\in F} E_j$ où F est un ensemble dénombrable, montrer que :

$$\sum_{j\in F} \left(\sum_{i\in E_j} a_i \right) = \sum_{i\in E} a_i$$

4. On se donne à nouveau pour tout $n \in \mathbb{N}$ un famille $(a_i^n)_{i\in E}$ d'éléments de $[0, \infty]$, Montrer que :

$$\sum_{i\in E} (\liminf_{n\in\mathbb{N}} a_i^n) \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in E} a_i^n \right)$$

   Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 4 – ***Base 3 sans 2***. Soit Φ l'application définie par

$$\begin{aligned} \Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0, 1/2] \\ x := (x_n)_{n\geq 0} &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est une injection.
2. En déduire que $\mathbb{R}$ est infini non dénombrable.

Exercice 5 – ***Limites inférieure et supérieure d'ensembles*.**
Soit E un ensemble et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E.

1. Que représentent les ensembles suivants
$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\,.$$
Le premier ensemble est noté $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ et le second $\limsup_{n\to+\infty} A_n$.
Rappelons que l'on définit de même les limites supérieure et inférieure d'une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\geq n} a_k = \lim_{n\to+\infty}\inf_{k\geq n} a_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n} a_k = \lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n} a_k\,.$$
Relier les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\liminf_{n\to+\infty} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\limsup_{n\to+\infty} A_n}$ aux fonctions $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées :
   (a) $(\limsup_{n\to+\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to+\infty} A_n^c$ et $\liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$,
   (b) $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \{\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{A_n} = +\infty\}$ et $\liminf_{n\to+\infty} A_n = \{\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{A_n^c} < +\infty\}$,
   (c) $\limsup_{n\to+\infty}(A_n\cup B_n) = \limsup_{n\to+\infty} A_n \cup \limsup_{n\to+\infty} B_n$ et $\limsup_{n\to+\infty}(A_n\cap B_n) \subset \limsup_{n\to+\infty} A_n \cap \limsup_{n\to+\infty} B_n$.
3. On dit que $A\subset E$ est la limite de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ si $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n = A$. Si $\limsup_{n\to+\infty} A_n \neq \liminf_{n\to+\infty} A_n$, on dit que la limite $\lim_{n\to+\infty} A_n$ n'existe pas. Montrer que
   (a) si $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante, c'est-à-dire $A_n\subset A_{n+1}$ pour tout $n\geq 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$,
   (b) si $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, c'est-à-dire $A_n\supset A_{n+1}$ pour tout $n\geq 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n$.
4. Calculer $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ dans les cas suivants :
   (a) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G\subset E$ sont fixés,
   (b) $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_{2n} = 1+\frac{1}{2n}$ et $a_{2n+1} = -1-\frac{1}{2n+1}$,
   (c) $A_{2n} =]0, 3+\frac{1}{2n}[$ et $A_{2n+1} =]-1-\frac{1}{3n}, 2]$,
   (d) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de p_n.

Exercice 6 – ***Ouverts de*** $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts.
2. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une réunion dénombrable de pavés ouverts.

Exercice 7 – ***Somme*.** Soit I et $(u_i)_{i\in I}$ une suite de réels positifs indexée par I. Supposons que
$$\sum_{i\in I} u_i < +\infty\,.$$
Montrer que $\{i\in I\colon u_i\neq 0\}$ est dénombrable.