Ensembles mesurables & Mesures

Exercice 1 – ***Exemples de tribus**. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable.

1. Les ensembles suivants sont des algèbres de parties de X. Dire lesquels sont des σ-algèbres.
   (a) L'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X.
   (b) L'ensemble $\mathscr{A}_f$ formé par les parties $A \subset X$ telles que soit A, soit A^c est fini.
   (c) L'ensemble $\mathscr{A}_d$ formé par les parties $A \subset X$ telles que A ou A^c est fini ou dénombrable.
   (d) L'ensemble $\mathscr{A}$ formé par les parties $A \subset X$ telles que $A \subset B$ ou $X \setminus A \subset B$, pour un ensemble $B \subset X$ fixé.
   (e) L'ensemble $\mathscr{A}$ formé par les parties $A \subset X$ telles que $B \subset A$ ou $A \cap B = \emptyset$, pour un ensemble $B \subset X$ fixé.
   (f) L'ensemble $\mathscr{A}$ formé par les unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$.
2. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de X ?
3. Supposons que $\mathrm{card}(X) > 2$, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des paires (c'est-à-dire l'ensemble des ensembles à deux éléments) de X ?

Exercice 2 – ***Tribu image réciproque & tribu image**. Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. *(Tribu image réciproque)* Si $\mathscr{B}$ est une tribu sur Y, montrer que l'ensemble $\mathscr{A} = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\}$ est une tribu sur X, notée $f^{-1}(\mathscr{B})$. Montrer qu'il s'agit de la plus petite tribu sur X (au sens de l'inclusion) rendant f mesurable.
2. *(Tribu image)* Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur X, montrer que l'ensemble $\mathscr{B} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ est une tribu sur Y. Montrer qu'il s'agit de la plus grande tribu sur Y (au sens de l'inclusion) rendant f mesurable.
3. *(Lemme de transport)* Si $\mathscr{B}$ est une tribu sur Y engendrée par $\mathscr{M}$, montrer que $f^{-1}(\mathscr{B})$ est la tribu engendrée par $f^{-1}(\mathscr{M})$.

Exercice 3 – ***Un contre-exemple de tribu**.

1. Soit $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'algèbres de parties d'un ensemble X. Montrer que $\mathscr{A} = \bigcup_{n\geq 1} \mathscr{A}_n$ est une algèbre.
2. Pour tout entier $n \geq 0$, considérons la tribu $\mathscr{T}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\})$ sur $\mathbb{N}$. Montrer que la suite de tribus $(\mathscr{T}_n)_{n\geq 0}$ est croissante, mais que la réunion $\mathscr{T} = \bigcup_{n\geq 0} \mathscr{T}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 4 – ***Tribu et dénombrabilité***. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu infini dénombrable. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. On définit pour tout $x \in X$ l'*atome* de la tribu $\mathscr{T}$ engendré par x par $\bar{x} = \bigcap_{A \in \mathscr{T} \,:\, x \in A} A$.

1. Montrer que les atomes de $\mathscr{T}$ forment une partition de X.
2. Montrer que si $\mathscr{T}$ est au plus dénombrable, alors $\mathscr{T}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathscr{T}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.

Exercice 5 – ***Tribu trace***. Soient X un ensemble, et E une partie de X. Pour $\mathscr{F}$ une famille de parties de X, on note

$$\mathscr{F}_E = \{A \cap E : A \in \mathscr{F}\}.$$

1. Montrer que si $\mathscr{T}$ est une tribu sur X, alors $\mathscr{T}_E$ est une tribu sur E.
2. Montrer que pour tout famille $\mathscr{C}$ de X on a $(\sigma(\mathscr{C}))_E = \sigma(\mathscr{C}_E)$.
3. On suppose que X est un espace topologique. Montrer que les boréliens de E (munie de la topologie induite) sont les intersections avec E des boréliens de X.
4. En déduire qu'une application à valeurs dans $\mathbb{R}$ est mesurable si, et seulement si, elle est mesurable en tant qu'application à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 – ***Boréliens de** $\overline{\mathbb{R}}$. On définit sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la distance (où par convention $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$) :

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

1. Montrer que d est bien une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$.

2. Montrer que la tribu des boréliens est engendrée par $\{[a, +\infty] \,:\, a \in \mathbb{R}\}$.
3. Décrire d'autres familles engendrant les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$.
4. Décrire des familles engendrant les boréliens de $\mathbb{R}_+$ et $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Exercice 7 – ***Mesures sur*** $\mathbb{Z}$.
1. Décrire les mesures sur $(\mathbb{Z}, \mathscr{P}(\mathbb{Z}))$.
2. Quelles sont les mesures finies sur $(\mathbb{Z}, \mathscr{P}(\mathbb{Z}))$ invariantes par translation ?

Exercice 8 – ****Vrai / Faux***. Soit λ_d la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. Pour chacune des affirmations, dire si elle est vraie ou fausse. On demande selon les cas, une démonstration ou un contre-exemple.
1. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de boréliens de $\mathbb{R}^d$ d'intersection vide, alors $\lambda_d(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur vide, alors $\lambda_d(A) = 0$.
3. Si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non-vide, alors $\lambda_d(A) > 0$.
4. Si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors $\lambda_d(K)$ est finie.
5. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie, alors U est borné.
6. Si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure strictement positive, alors $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$.

Exercice 9 – ****Lemme de Borel-Cantelli***. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré (avec μ une mesure positive) et soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{T}$.
1. *(Lemme de Fatou)* Montrer que
$$\mu\Big(\liminf_{n\to+\infty} A_n\Big) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n)\,.$$
Puis montrer que si $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) < +\infty$, alors
$$\mu\Big(\limsup_{n\to+\infty} A_n\Big) \geq \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n)\,.$$
Que se passe-t-il si $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = +\infty$?
2. *(Lemme de Borel-Cantelli)* On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.
3. *(Application du lemme de Borel-Cantelli)* Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour λ-presque-tout $x \in [0, 1]$, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux tels que $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$.
Remarque : On dit qu'un tel x est mal approchable par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$.

Exercice 10 – ****Ouvert dense de mesure arbitrairement faible***.
1. Pour tout $\varepsilon > 0$, construire un ouvert $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(U_\varepsilon) = \varepsilon$.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F_ε un fermé d'intérieur vide tel que pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a
$$\lambda(A \cap F_\varepsilon) \geq \lambda(A) - \varepsilon\,.$$

Exercice 11 – ***L'exemple de Vitali***. Le but de cet exercice est de montrer l'existence d'un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ qui n'est pas Lebesgue-mesurable. Soit $\sim$ la relation d'équivalence définie par $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$.
1. Justifier que chaque classe d'équivalence rencontre $[0, 1]$.
2. Formons un ensemble V en prenant dans chaque classe d'équivalence un représentant dans $[0, 1]$. Montrer que V n'est pas un ensemble Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$.
Indication : On pourra s'intéresser à l'ensemble $\bigcup_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} r + V$.
3. Montrer que $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Moralité : On vient de montrer que $\mathscr{L}(\mathbb{R}) \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Autrement dit, on a exhibé une partie V de $\mathbb{R}$ qui soit non seulement non borélienne, mais également non contenue dans la tribu de Lebesgue $\mathscr{L}(\mathbb{R})$. Et pourtant $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{R})$!