Applications mesurables & Intégration de fonctions étagées

Exercice 1 – ***Exemples de fonctions mesurables*.**

1. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. f est-elle mesurable (borélienne) ?
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. f' est-elle mesurable (borélienne) ?
3. L'inverse d'une bijection mesurable entre deux espaces mesurables quelconques est-elle toujours mesurable ?

Exercice 2 – ***Fonctions mesurables bornées*.** Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

1. Montrer que si $\mu(X) > 0$, alors il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.
2. Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$, alors il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

Exercice 3 – ***Une sorte d'uniforme continuité*.** Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure non-nulle et $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un mesurable $A \in \mathscr{A}$ avec $\mu(A) > 0$ et tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tout $x, y \in A$.

Exercice 4 – ***Nombre de solutions d'une équation*.** Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y \in R$, on note $N(y)$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Exercice 5 – ***Boréliens et applications continues*.** Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$ est un borélien.
2. Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ (f_n(x))_{n\geq 0}$ a une limite$\}$ est un borélien.

Exercice 6 – ***Limite simple de fonctions mesurables*.** Soient $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et (Y, d) un espace métrique. Soit $f_n : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{B}(Y))$ une suite d'applications mesurables convergeant simplement vers une fonction $f : X \to Y$.

1. On suppose dans cette question que (Y, d) est un espace métrique complet séparable. Montrer que l'application f est mesurable.
2. On suppose maintenant que (Y, d) est un espace métrique **quelconque**.
   (a) Soit U un ouvert de Y. Posons pour tout $n \geq 1$,
   $$V_n = \left\{ y \in Y \ : \ \mathrm{d}(y, Y - U) > \frac{1}{n} \right\} \quad \text{et} \quad F_n = \left\{ y \in Y \ : \ \mathrm{d}(y, Y - U) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$
   Montrer que
   $$f^{-1}(U) = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{K\geq 1} \bigcap_{k\geq K} f_k^{-1}(F_n) = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{K\geq 1} \bigcap_{k\geq K} f_k^{-1}(V_n)\,.$$
   (b) Retrouver que l'application f est mesurable.

Exercice 7 – ***Composée d'applications mesurables*.** Soient une fonction $f : X \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$, et $\mathscr{A}_f := f^{-1}(\mathbb{B}(\mathbb{R}))$ la tribu image réciproque de $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ par f.

1. Soient $h : (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ borélienne. Montrer que $g := h \circ f$ est mesurable de $(X, \mathscr{A}_f)$ dans $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$.
2. Soit $s : (X, \mathscr{A}_f) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ une fonction étagée mesurable. Montrer qu'il existe une fonction borélienne t telle que $s = t \circ f$. En déduire que si la fonction $g : (X, \mathscr{A}_f) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, alors il existe h borélienne telle que $g = h \circ f$.
3. *Application : Tribu symétrique.* Soit $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.
   (a) Montrer que la tribu image réciproque de $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ par f est $\sigma(f) := \{A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}),\ A = -A\}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \sigma(f))$ dans $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 8 – ***Intégrale des fonctions étagées*.** Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : (X, \mathscr{A}) \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction étagée. Soit $\beta_1, \ldots, \beta_N \in [0, +\infty[$ et $B_1, \ldots, B_N \in \mathscr{A}$ tels que $f = \sum\limits_{1\leq i\leq N} \beta_i \mathbb{1}_{B_i}$. Sans utiliser l'additivité de l'intégrale, montrer que :
$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{1\leq i\leq N} \beta_i \mu(B_i).$$