Intégration pt. I

Exercice 1 – ***Linéarité de l'intégrale***. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $f, g : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{C}$ deux fonctions μ-intégrables, et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que $\alpha f + \beta g$ est μ-intégrable et

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_X g\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Exercice 2 – ***Théorème de Beppo Levi ?***. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ et $g_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$. Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ p.p., $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ p.p. et que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_R g_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Peut-on en déduire que $1 = 0$?

Exercice 3 – ***Mesure de densité***. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on pose

$$\nu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

Montrer que ν est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$.

Exercice 4 – ***Quand deux mathématiciens s'affrontent***. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, convergeant vers f p.p. et telle que $\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer de deux manières différentes que $f = 0$ p.p..

Exercice 5 – ***Une limite d'intégrales***. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f : X \to [0, +\infty]$ telle que $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = 1$, et $\alpha > 0$. Déterminer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X n \log\left(1 + \frac{f^\alpha}{n^\alpha}\right)\mathrm{d}\mu\,.$$

Exercice 6 – ***Calcul de limite***. Étudier la limite éventuelle de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$w_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(\pi x)}{1 + x^{n+2}}dx.$$

Exercice 7 – ***Presque partout***.

1. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Montrer que si $f \leq g$ p.p. alors pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Supposons que $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Montrer que f est nulle presque partout.
3. Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ sans que f soit nulle presque partout.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = |\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x|$ si et seulement si $f \geq 0$ p.p. ou $f \leq 0$ p.p..
5. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable tel que $f_n \to f$ p.p. et $|f_n| \leq g$ p.p.. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8 – ***Mesure à support discret***. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\mu(\mathbb{R}) = 1$. On introduit sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$, défini pour tout $u \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\mu(dx).$$

On suppose qu'il existe $v \neq 0$ tel que $|\hat{\mu}(v)| = 1$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(\mathbb{R}\backslash A) = 0$, où $A = \{ak + b, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 9 – ***Sommation par tranches***. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Montrer que

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^n}\mu\left(\left\{f > \frac{k}{2^n}\right\}\right).$$

🏠 - DM à rendre au prochain TD ☺