Intégration pt. II et intégrales à paramètre

Exercice 1 – ***Uniforme intégrabilité d'une famille à un élèment*.** Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^1(\mu)$. Prouver que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \epsilon$.

Exercice 2 – ***Lemme des moyennes*.** Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure finie non nulle, et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction μ-intégrable pour laquelle on suppose qu'il existe un fermé F de $\mathbb{C}$ tel que pour tout $A \in \mathscr{T}$ avec $0 < \mu(A) < +\infty$ on a

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x)\, \mu(\mathrm{d}x) \in F\,.$$

1. Montrer que $f(x) \in F$ pour μ-presque tout $x \in X$.
   <u>Indication</u> : *On pourra montrer que pour toute boule ouverte $B(z,r) \subset F^c$, on a $\mu(f^{-1}(B(z,r))) = 0$.*
   <u>Rappel topologique</u> : *Tout ouvert de $\mathbb{C}$ s'écrit comme union dénombrable de boules ouvertes.*
2. On dit qu'une mesure ν sur $(X, \mathscr{T})$ est σ-finie si il existe une suite croissante d'ensembles mesurables $(X_n)_{n\geq 1}$ tel que $\nu(X_n) < +\infty$ et $X = \cup_{n\geq 1} X_n$. Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai si l'on remplace l'hypothèse « μ finie » par « μ σ-finie ».

Exercice 3 – ***Lemme de Scheffé*.** Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives intégrables qui converge simplement vers une fonction f intégrable. Montrer que si :

$$\int_X f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_X f d\mu$$

Alors :

$$\int_X |f - f_n| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice 4 – ***Continuité et dérivabilité sous le signe intégrale*.** Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. (Continuité) Soit $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. Pour $t_0 \in I$, montrer que si :
   - (i) : pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable de $(X, \mathscr{A})$ dans $(\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$.
   - (ii) : la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est continue en t_0 μ-presque partout.
   - (iii) : (*hypothèse de domination*) il existe une fonction positive intégrable $g : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $t \in I$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ $\mu-$presque partout.

   alors, la fonction :

   $$F(t) := \int_X f(t,x) d\mu(x)$$

   est bien définie sur I et est continue en t_0.
2. (Dérivabilité) Supposons ici que I est un intervalle ouvert non vide. Pour $t_0 \in I$, montrer que si :
   - (i) : pour tout $t \in I$, $f(t,.) \in \mathscr{L}^1(\mu)$
   - (ii) : $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)$ existe μ-presque partout.
   - (iii) : il existe une fonction positive intégrable $g : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $t \in I$, :

     $$|f(t,x) - f(t_0,x)| \leq g(x)|t - t_0|$$

     $\mu-$presque partout.

   alors, la fonction :

   $$F(t) := \int_X f(t,x) d\mu(x)$$

   est bien définie sur I et dérivable en t_0 de dérivée :

   $$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) d\mu$$

Exercice 5 – ***Continuité de la primitive d'une fonction*** $\mathscr{L}^1$. Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathscr{L}^1(\lambda)$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Alors, la fonction F définie par :

$$F(t) := \int_a^t f(x) d\lambda(x) := \begin{cases} \int_{]a,t]} f d\lambda & \text{si } t \geq a \\ -\int_{[t,a[} f d\lambda & \text{si } t \leq a \end{cases}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 6 – ***Initiation à la transformation de Fourier***. On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue.
Pour $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, on définit $\mathscr{F}(f)$ par $\mathscr{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} f(x)\, \mathrm{d}x$ lorsque cela à un sens.

1. Montrer que $\mathscr{F}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et bornée par $\|f\|_1$.
2. *(Parenthèse utile pour la suite)* Montrer que si g est une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, on peut trouver des suites $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, la première tendant en décroissant vers $-\infty$, la seconde tendant en croissant vers $+\infty$, et telles que $\lim_{k\to+\infty} g(y_k) = 0$ et $\lim_{k\to+\infty} g(z_k) = 0$.
3. On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que sa dérivée est dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'alors $\mathscr{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\mathscr{F}(f)(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
4. Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact. En considérant $\mathscr{F}(\varphi - \varphi'')$, montrer qu'il existe une constante C telle que $|\mathscr{F}(\varphi)(\xi)| \leq \frac{C}{1+4\pi^2|\xi|^2}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
5. Déduire de ce qui précède que si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\mathscr{F}(f)(\xi)$ tend vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers $+\infty$. (On admet que pour $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$ tel que $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.)

Note : les résultats généraux et plus profonds sur la transformation de Fourier ainsi que sa définition sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ sont au programme du cours du second semestre : intégration et probabilités.

Exercice 7 – ***La formule de Gauss***.

1. Montrer que l'intégrale $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, \mathrm{d}t$ est finie pour tout $s > 0$.
2. Montrer que la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et donner une expression de ses dérivées.
3. Montrer que pour tout $s > 0$, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\, \mathrm{d}t = \Gamma(s)\,.$$
4. En déduire la formule de Gauss
   $$\forall s > 0, \quad \Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}\,.$$
5. En utilisant la formula de la question précédente, démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma(k+1) = k!$.