Cantor & Stieljes

Exercice 1 – ***Mesures image***. Soit $(X_1, \mathscr{T}_1)$, $(X_2, \mathscr{T}_2)$ deux espaces mesurables et $f : X_1 \to X_2$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $(X_1, \mathscr{T}_1)$, pour tout ensemble mesurable $B \in \mathscr{T}_2$, on pose

$$(f_\# \mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

1. Montrer que $f_\# \mu$ est une mesure sur $(X_2, \mathscr{T}_2)$.
2. Soit $g : X_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que g est $f_\#\mu$-intégrable si et seulement si $g \circ f$ est μ-intégrable, et que dans ce cas
$$\int_{X_2} g \, \mathrm{d} f_\# \mu = \int_{X_1} g \circ f \, \mathrm{d}\mu.$$

Exercice 2 – ***Cardinal de*** $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

Exercice 3 – ***Mesure invariante par homothétie***. Soit $X =]0, +\infty[$. On se place sur $(X, \mathscr{B}(X), \lambda_{|X})$ où λ est la mesure de Lebesgue et on pose $\mu(A) = \int_A \frac{\mathrm{d}\lambda(x)}{x}$ pour $A \in \mathscr{B}(X)$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ est l'unique mesure invariante par translation telle que $\lambda([0, 1]) = 1$.
2. Montrer que μ est une mesure invariante par homothétie de rapport strictement positif.
3. Montrer que μ est l'unique mesure sur $(X, \mathscr{B}(X))$ invariante par homothétie et telle que $\mu([1, e]) = 1$.
4. Soit $\exp : \mathbb{R} \to X$ la fonction exponentielle, montrer que $\mu = \exp_\# \lambda$.

Exercice 4 – ***L'ensemble triadique de Cantor***. On définit par récurrence la suite d'ensembles $(K_3^{(n)})_{n\geq 0}$ de la manière suivante : on pose $K_3^{(0)} = [0, 1]$ puis $K_3^{(1)}$ est obtenu en découpant $K_3^{(0)}$ en trois intervalles de même taille et en ne gardant que les deux intervalles fermés extrêmes, autrement dit $K_3^{(1)} = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Puis $K_3^{(2)}$ est obtenu en faisant subir le même sort aux deux intervalles constituant $K_3^{(1)}$, et ainsi de suite . . .

1. Montrer que la suite $(K_3^{(n)})_{n\geq 0}$ est une suite de compacts emboîtés. En déduire que l'ensemble $K_3 = \bigcap_{n\geq 0} K_3^{(n)}$, appelé *ensemble triadique de Cantor*, est un compact non vide de $[0, 1]$.
2. Montrer que K_3 est un ensemble mesurable négligeable.
3. *Exercice de rédaction délicat.* Vérifier que
$$K_3 = \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} \ : \ (a_n)_{n\geq 0} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \right\}.$$
4. En déduire que K_3 n'est pas dénombrable.

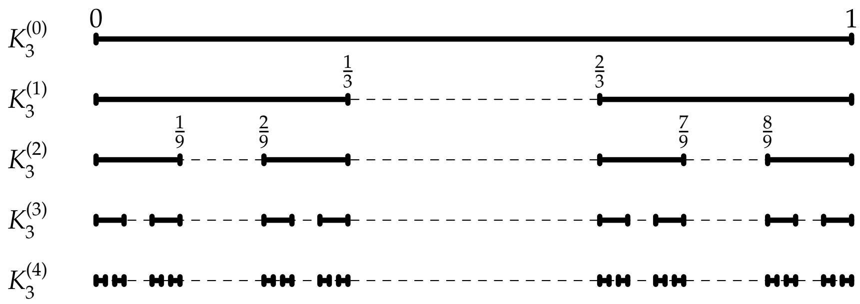

FIGURE 1 – Les premières étapes de la contruction de K_3.

Exercice 5 – ***Volume des pavés***. Soit λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, et $\mathscr{P}$ un pavé fermé de la forme $\mathscr{P} = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$. Montrer que

$$\lambda_d(\mathscr{P}) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

Montrer que le résultat est également vrai lorsque $\mathscr{P}$ est un pavé ouvert.

Exercice 6 – ***Mesure de Stieltjes***. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante et continue à droite. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une unique mesure μ_F sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, appelée *mesure de Stieltjes* de F, telle que

$$\forall a < b \in \mathbb{R}, \quad \mu_F(]a,b]) = F(b) - F(a) .$$

1. Montrer que si une telle mesure existe, alors elle est unique.
2. *Une première construction.* Pour $A \subset \mathbb{R}$, on pose

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n\geq 1} F(b_n) - F(a_n) \;:\; (]a_n, b_n])_{n\geq 1}, A \subset \bigcup_{n\geq 1}]a_n, b_n] \right\} .$$

   (a) Montrer que μ^* est une mesure extérieure.
   (b) Montrer que les intervalles $(]a,b])_{a<b\in\mathbb{R}}$ sont μ^*-mesurables.
   (c) Conclure.
3. *Une deuxième construction (admettant l'existence de la mesure de Lebesgue λ).* On définit G l'inverse généralisée de F par :

$$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ y & \longmapsto & \inf \{x \in \mathbb{R} \;:\; F(x) \geq y\} . \end{array}$$

   (a) Vérifier l'équivalence $G(y) \leq z \Longleftrightarrow F(z) \geq y$ pour $y, z \in \mathbb{R}$ et en déduire que G est mesurable.
   (b) Vérifier que la mesure image de λ par G convient.
4. Montrer que μ_F est sans-atome si et seulement si F est continue.
5. Quelle est la mesure de Stieltjes associée à la fonction $F = \mathrm{id}$?
6. Existe-t-il une mesure non-nulle étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue et sans-atome ?
   Rappel : Une mesure μ est dite sans-atome *si la mesure des singletons est nulle (la mesure de Lebesgue est sans-atome).*
   Deux mesures μ et ν sont étrangères *sur $(X, \mathscr{T})$ s'il existe un ensemble $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $\nu(A^c) = 0$.*
7. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ finie sur les compacts. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_\mu(x) = \begin{cases} \mu(]0,x]) & \text{si } x > 0 \\ -\mu(]x,0]) & \text{sinon .} \end{cases}$$

   Montrer que F_μ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, croissante et continue à droite.