# Mesurabilité, Riemann-intégrabilité et espace $\ell^p(\mathbb{N})$

**Exercice 1 –** ***Application de la régularité de la mesure de Lebesgue***. Soit $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ de mesure de Lebesgue $\lambda_d(E)$ non nulle. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{B}(0,\varepsilon) \subset \mathrm{Diff}(E) = \{x - y \,:\, x \in E, y \in E\}$.
*Indication : On pourra commencer par trouver un compact $K$ et un ouvert $U$ tels que $K \subset E \subset U$, $\lambda_d(K) > 0$ et $\lambda_d(U) < 2\lambda_d(K)$.*

**Exercice 2 –** ***Mesure de Stieltjes***. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante et continue à droite. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une unique mesure $\mu_F$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, appelée *mesure de Stieltjes* de $F$, telle que

$$\forall a < b \in \mathbb{R}, \quad \mu_F(]a,b]) = F(b) - F(a)\,.$$

1. Montrer que si une telle mesure existe, alors elle est unique.
2. *Une première construction.* Pour $A \subset \mathbb{R}$, on pose

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\geq 1} F(b_n) - F(a_n) \,:\, (]a_n,b_n])_{n\geq 1}, A \subset \bigcup_{n\geq 1}]a_n,b_n]\right\}.$$

   (a) Montrer que $\mu^*$ est une mesure extérieure.
   (b) Montrer que les intervalles $(]a,b])_{a<b\in\mathbb{R}}$ sont $\mu^*$-mesurables.
   (c) Conclure.
3. *Une deuxième construction.* On définit $G$ l'inverse généralisée de $F$ par :

$$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ y & \longmapsto & \inf\{x \in \mathbb{R} \,:\, F(x) \geq y\}\,. \end{array}$$

   (a) Vérifier l'équivalence $G(y) \leq z \iff F(z) \geq y$ pour $y, z \in \mathbb{R}$ et en déduire que $G$ est mesurable.
   (b) Vérifier que la mesure image de $\lambda$ par $G$ convient.
4. Montrer que $\mu_F$ est sans-atome si et seulement si $F$ est continue.
5. Quelle est la mesure de Stieltjes associée à la fonction $F = \mathrm{id}$ ?

**Exercice 3 –** ***Critère de Riemann-intégrabilité***. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. L'*oscillation* de $f$ en $x \in [a,b]$ est définie par

$$\omega(x) = \lim_{h\to 0^+} \sup_{y,z\in I_h(x)} |f(y) - f(z)| \qquad \text{où} \quad I_h(x) = [a,b] \cap [x-h, x+h]\,.$$

1. Montrer que $f$ est continue en $x$ si et seulement si $\omega(x) = 0$.
2. Soient $(\sigma_n = [a = x_n^0 < x_n^1 < \cdots < x_n^n = b])_{n\geq 1}$ une suite croissante de subdivisions dont le pas tend vers 0, et les suites de fonctions en escalier définies par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \inf_{y\in I_n^k} f(y) & \text{si } x \in I_n^k = [x^k, x_n^{k+1}[ \text{ où } 0 \leq k < n \\ 0 & \text{si } x = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \sup_{y\in I_n^k} f(y) & \text{si } x \in I_n^k, \text{ où } 0 \leq k < n \\ 0 & \text{si } x = b \end{cases}.$$

   Montrer que les suites $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ et $(\psi_n)_{n\geq 1}$ sont monotones et que

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n - \lim_{n\to+\infty} \varphi_n = \omega \quad \lambda\text{-p.p.}\,.$$

3. En déduire que $f$ est Riemann-intégrable si et seulement si $f$ est continue $\lambda$-p.p..

**Exercice 4 –** ***Les espaces*** $\ell^p(\mathbb{N})$. 1. *Intégrale par rapport à la mesure de comptage*. Soit $X$ un ensemble. Considérons l'espace mesuré $(X, \mathscr{P}(X), m)$ où $\mathscr{P}(X)$ est l'ensemble des parties de $X$ et $m$ la mesure de comptage sur $(X, \mathscr{P}(X))$. Soit une application $f : (X, \mathscr{P}(X)) \longrightarrow \mathbb{C}$.

a) Montrer que $f$ est mesurable.

b) Supposons $f$ positive. Montrer que :

$$\int_X f dm = \sum_{x \in X} f(x) := \sup\{\sum_{i \in I} f(i) : \ I \text{ partie finie de } X\}$$

2. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré quelconque et $p > 0$. On définit :

$$\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu) := \{f : (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C})) \text{ mesurable; } \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$$

Dans le cas particulier où $(X, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m)$ (où $m$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$), on note :

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m)$$

Montrer que

$$f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m) \Longleftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^p < +\infty$$

3. Soit $q \geq p$. Montrer que

$$\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$$

**Exercice 5 –** ***Emboîtements des espaces de Lebesgue***. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré où $\mu$ est une mesure positive.

1. Soient $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq +\infty$. Montrer que

$$L^p(X, \mu) \ \subseteq \ L^{p_1}(X, \mu) + L^{p_2}(X, \mu)\ .$$

2. Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$. Montrer que pour tout $p \leq r \leq q$, on a

$$L^p(X, \mu) \cap L^q(X, \mu) \ \subseteq \ L^r(X, \mu)\ .$$

**Exercice 6 –** ***Super-Hölder***. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ et $r$ défini par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que pour toutes fonctions $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, on a $fg \in L^r(X, \mu)$ et

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q}\ .$$