Espaces L^p

Exercice 1 – ***Emboîtements des espaces de Lebesgue***. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive.

1. Soient $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq +\infty$. Montrer que
$$L^p(X,\mu) \subseteq L^{p_1}(X,\mu) + L^{p_2}(X,\mu)\,.$$
2. Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$. Montrer que pour tout $p \leq r \leq q$, on a
$$L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu) \subseteq L^r(X,\mu)\,.$$

Exercice 2 – ***Injections d'espaces L^p***.

1. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit $1 \leq p < q \leq \infty$. Montrer que l'injection canonique $j : L^q \to L^p$ est une application linéaire continue et calculer sa norme.
2. Soit $1 \leq p < q \leq \infty$. Montrer que l'injection canonique $j : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^q(\mathbb{N})$ est une application linéaire continue et calculer sa norme.

.

Now let $(x_n)_n \in \ell^p$, applying the previous inequality to $a = p/q$, we have
$$\begin{aligned}\left(\sum_n |x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_n |x_n|^q\right)^{\frac{a}{p}}\\ &\leq \left(\sum_n |x_n|^{qa}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

We have proven that $\|x\|_{\ell^q} \leq \|x\|_{\ell^p}$, this proves that $j : \ell^p \to \ell^q$ is a well-defined continuous injective linear map satisfying $\|j\| \leq 1$. Chosing $x = (1, 0, \dots)$ we obtain that $\|x\|_{\ell^q} = \|x\|_{\ell^p}$ and thus $\|j\| = 1$.

Exercice 3 – ***Super-Hölder***. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ et r défini par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que pour toutes fonctions $f \in L^p(X,\mu)$ et $g \in L^q(X,\mu)$, on a $fg \in L^r(X,\mu)$ et
$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}\,.$$

Exercice 4 – ***Représentation duale des normes L^p***. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(X, \mathbb{R})$. On note q l'exposant conjugué de p.

1. Montrer que :
$$\|f\|_{L^p} = \sup\left\{\int_X fg\,\mathrm{d}\mu \;:\; \|g\|_{L^q} = 1\right\}.$$
2. On suppose que μ est σ-finie, montrer que le résultat précédent s'étend au cas $p = +\infty$.

Exercice 5 – ***Un théorème de densité***. L'objectif de cet exercice est de montrer que l'espace $\mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}^d$ à support compact est dense dans l'espace $L^p(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, où $1 \leq p < +\infty$ et μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.
Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$, on cherche une fonction g lipschitzienne à support compact telle que $\|f - g\|_{L^p} \leq \varepsilon$.

1. Montrer qu'il suffit de montrer le résultat pour $f = \mathbb{1}_A$, avec $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda_d(A) < +\infty$.
2. En utilisant la régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, monter qu'effectivement le résultat est vrai pour $f = \mathbb{1}_A$, avec $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda_d(A) < +\infty$.

Remarque : En particulier, on a montré que l'espace $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 6 – ***Continuité de l'opérateur translation sur*** $L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ et pour $h \in \mathbb{R}^d$, on définit la fonction $\tau_h f$ par $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ et on pose $|h| = \|h\|_2$ la norme euclidienne de h. On notera également $L^p(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

1. Soit $1 \leq p < \infty$.
   (a) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, τ_h définit une isométrie de $L^p(\mathbb{R}^d)$.
   (b) Soit $g \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^0(\mathbb{R}^d)$ une fonction continue à support compact. Montrer que
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (a,b) \in (\mathbb{R}^d)^2,\ |a-b| < \delta \implies \|\tau_a g - \tau_b g\|_{L^p} < \varepsilon.$$
   (c) En utilisant la densité de $\mathrm{C}_\mathrm{c}^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ (cf exercice 5), montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a
   $$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p} = 0.$$
   (d) Application : soit A un borélien de $\mathbb{R}^d$ dont la mesure de Lebesgue est strictement positive. Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset A - A := \{a - b \mid a, b \in A\}$.
2. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors $\lim\limits_{|h| \to +\infty} \|\tau_h f - f\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}$.
3. Donner un contre-exemple simple qui montre que le résultat (1c) n'est pas valable pour $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 7 – ***La norme infinie comme limite***. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesurable.

1. Soit f une fonction mesurable sur X telle que $f \in L^p(\mu)$ pour un $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $\|f\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$.
2. Supposons désormais μ finie et $f \in L^\infty(\mu)$ telle que $\|f\|_\infty > 0$. Posant $\alpha_n = \int_X |f|^n \, \mathrm{d}\mu$ pour $n \geq 0$, montrer que
   $$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty .$$

Exercice 8 – ***Convergence en mesure et convergence*** L^p. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de mesure finie.
Soit une suite de fonctions mesurables $f_n : X \to \mathbb{R}$. On dit que (f_n) converge en mesure vers f si pour tout $\epsilon > 0$,
$$\mu(|f_n - f|^{-1}(]\epsilon, +\infty[)) \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$
Soit p, q tels que $1 \leq p < q \leq +\infty$. On suppose que la suite (f_n) est bornée dans L^q et converge en mesure vers f. Montrer que (f_n) converge dans L^p vers f.